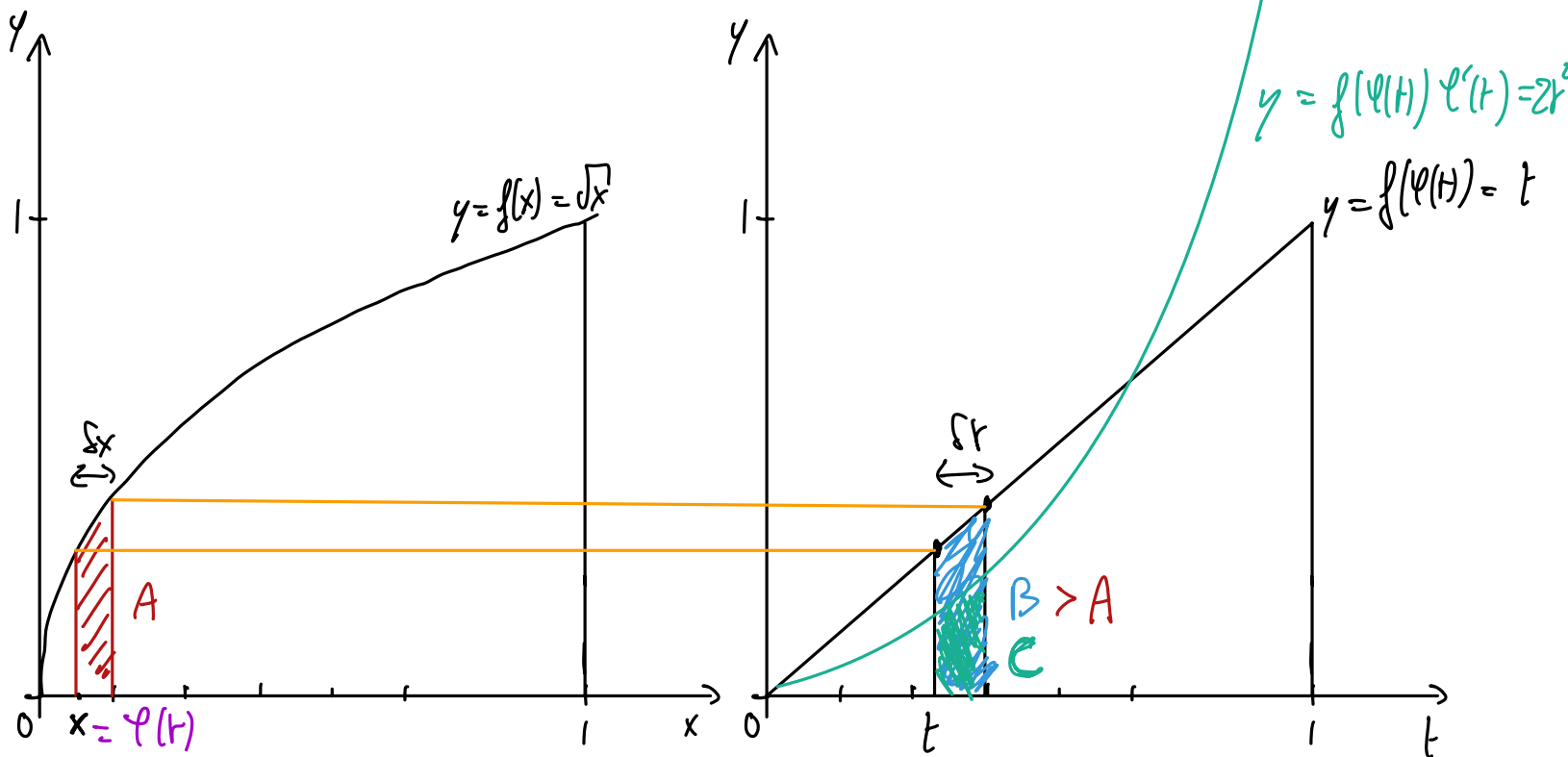


Notion mnémotechnique : écrire $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$

Illustration sur un exemple (trivial) : $I = \int_0^1 \sqrt{x} dx$

On pose $\varphi(t) = t^2$, $\varphi'(t) = 2t$
 ($x = t^2$, $dx = 2t dt$)

$$I = \int_0^1 t \cdot (2t) dt = 2 \int_0^1 t^2 dt.$$



$$\delta x := \varphi(t + \delta t) - \varphi(t) = \varphi'(t) \cdot \delta t + o(\delta t)$$

Lorsque f est continue, on a :

$$A = f(x) \cdot \delta x + o(\delta x) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \delta t + o(\delta t) = C + o(\delta t)$$

Exemples :

A) $I = \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx$

On pose $u = \sqrt{x^2 + 1}$ ($= \varphi(x)$) , $du = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} dx \Leftrightarrow u du = x dx$

$$\text{Donc } I = \int_1^{\sqrt{2}} u u du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}.$$

$$x(x^2 + 1)^{1/2} \leftarrow \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{3/2}$$

B) Calcul de primitives : cherchons les primitives de $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\sqrt{x}+1)^{-3} \end{array} \right.$

Méthode: Calculer $F(x) = \int_{x_0}^x f(u) du$
 $\leftarrow \text{arbitraire } \in \mathbb{R}_+$

Changement de variable : $t = \sqrt{u} + 1 \Leftrightarrow (t-1)^2 = u$; $du = 2(t-1) dt$

On a donc
$$F(x) = \int_{\sqrt{x_0}+1}^{\sqrt{x}+1} t^{-3} \cdot 2(t-1) dt$$

$$= 2 \int_{\sqrt{x_0}+1}^{\sqrt{x}+1} (t^{-2} - t^{-3}) dt$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{t} - \left(-\frac{1}{2} t^{-2} \right) \right]_{\sqrt{x_0}+1}^{\sqrt{x}+1}$$

$$= 2 \left(\frac{-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{2(\sqrt{x}+1)^2} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Vérification:

$$F'(x) = \frac{-2 \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} \right)}{(\sqrt{x}+1)^2} + (-2) \cdot \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{(\sqrt{x}+1)^3}$$

$$= (\sqrt{x}+1)^{-3} \left((\sqrt{x}+1) \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = (\sqrt{x}+1)^{-3}$$

Conclusion: les primitives de f sur $\mathbb{R}_+$ sont les fonctions de la forme

$$F(x) = 2 \left(\frac{-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{2(\sqrt{x}+1)^2} \right) + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

7.7 Intégration par parties

Thm: Soit $f, g \in C^1(I)$ où $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert et $a < b$ deux éléments de I . Alors :

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = \left[f(x) g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Preuve : Comme $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, $\forall x \in I$.

Donc : $\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = \int_a^b (f \cdot g)'(x)dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)$ $\blacksquare$

Applications :

A) S'utilise pour faire disparaître des facteurs polynomiaux avant d'intégrer :

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{f'} \underbrace{e^x}_{g'} dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x dx = (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - [e^x]_0^1$$
$$= e - (e - 1) = 1$$

B) Pensez parfois à utiliser $g' = 1$ comme ici : pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_1^x \underbrace{1}_{g'} \log(t) dt = [t \log t]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} dt$$
$$= x \log x - x + 1$$

C) L'I.P.P. permet parfois d'obtenir des relations de récurrence :

Exemple : $I_n(x) = \int_0^x \underbrace{1}_{g'} \cdot \frac{dt}{(t^2+1)^n}$ pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Par I.P.P : $I_n(x) = \left[\frac{t}{(t^2+1)^n} \right]_0^x - \int_0^x t \cdot \frac{(-n) \cdot 2t dt}{(t^2+1)^{n+1}}$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int_0^x \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{n+1}} dt$$
$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n (I_n(x) - I_{n+1}(x))$$

Donc $I_{n+1}(x) = \frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)I_n(x) \right)$

Par ailleurs $I_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)} = \arctan(x)$

Ainsi on a par exemple : $I_2(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan(x) \right)$, etc...

D) Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $a \neq x \in I$:

Rappel:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \begin{cases} o((x-a)^n) & : \text{Taylor-Young (si } f \in C^n(I)) \\ \frac{f^{(n+1)}(u_x)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} & \text{avec } u_x \in]a, x[\end{cases}$$

: Taylor-Lagrange (si $f^{(n+1)}$ fois dérivable).

Thm (Taylor avec reste intégral). Soit $f \in C^{n+1}(I)$ (I intervalle ouvert) et $a \in I$.
Alors $\forall x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt}_{\text{pas d'indétermination}}$$

Preuve (récurrence sur n): Si $n=0$, on a bien:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x 1 \cdot f'(t) dt$$

Supposons la formule vraie au rang $n' \leq n-1$ montrons la au rang $n+1$.
On a donc:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n'} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^{n'} f^{(n+1)}(t) dt}_{R_n(x)}$$

$$\text{soit } R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^{n'} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n!} \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x - \frac{1}{n!} \int_a^x \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(a) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

On obtient bien la formule au rang $n+1$; ce qui permet de conclure la preuve par récurrence jusqu'à $n' = n$.

7.8 Intégration des fonctions rationnelles

Méthode systématique pour intégrer $R = \frac{P}{Q}$ une fonction rationnelle.

1) Division de polynômes

On peut décomposer R sous la forme :

$$R = P_1 + \frac{P_2}{Q_2} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1, P_2, Q_2 \text{ sont des polynômes} \\ \deg(P_2) < \deg(Q_2) \\ P_2 \text{ et } Q_2 \text{ n'ont pas de facteurs communs.} \\ (\text{le coeff. du terme de plus haut degré de } Q_2 \text{ est } 1). \end{array} \right.$$

Exemple: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2x - 1}$

Méthode:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + x - 1 & 2x - 1 \\ - \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) & \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8} \\ \hline -\frac{1}{2}x^2 + x - 1 & \\ - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x \right) & \\ \hline \frac{3}{4}x - 1 & \\ - \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{8} \right) & \\ \hline -\frac{5}{8} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } R(x) &= \frac{(2x-1)\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}\right) - \frac{5}{8}}{2x-1} \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}\right)}_{P_1} + \frac{\left(-\frac{5}{8}\right)}{x - \frac{1}{2}} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}} \right\} \begin{array}{l} P_2 \\ Q_2 \end{array} \end{aligned}$$

→ Ici on peut directement intégrer le résultat.