

Corollaire: Soit $f \in C^0([a, b])$. Si $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = \underbrace{[G(x)]_a^b}_{\text{notation / abréviation.}}$$

Preuve: $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$ donc $\exists c \in \mathbb{R}$ s.t.

$$F(x) = G(x) + c, \quad \forall x \in [a, b].$$

$$\text{Donc } G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

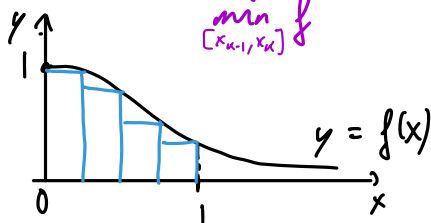
fin 27/11

Exemple: limite de (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$, $\forall n \geq 1$

$$\text{On a } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\substack{\text{min} \\ [x_{k-1}, x_k] f}} \text{ avec } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

On a: f est décroissante



Donc $u_n = \underline{\sigma}_n(f)$ où $\sigma_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ la subdivision régulière de $[0, 1]$. Comme f est continue sur $[0, 1]$, on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Thm (variation des bornes d'intégration) - Soit $f \in C^0([a, b])$, $a < b$. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $g, h : I \rightarrow [a, b]$ deux fonctions dérivables sur I . Alors la fonction $K : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$K(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt$$

est dérivable sur I et $\forall x \in I$, on a $K'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$.

Preuve: Soit $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f . Alors

$$K(x) = F(g(x)) - F(h(x))$$

$$\text{Ainsi } K'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) - F'(h(x)) \cdot h'(x)$$

NB: pour traiter proprement le cas où g et h atteignent a ou b , on peut prolonger f par

$$f \text{ par } \begin{cases} f(a) & \text{si } x \leq a \\ f(b) & \text{si } x \geq b \end{cases}.$$

7.4 Propriétés d'ordre de l'intégrale

Prop. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable. ($a < b$)

(i) $\int_a^b f(t) dt \geq 0$

(ii) Si $\int_a^b f(t) dt = 0$ et $f \in C^0([a, b])$ alors $f = 0$. fonction nulle

Preuve: (i) Conséquence de $\int_a^b f(t) dt \geq (\inf f) \cdot (b-a) \geq 0$ et (ii) exercice.

Corollaire (préservation de l'ordre). Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrables telles que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Preuve: On pose $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $h(x) = g(x) - f(x)$. Alors :

$$0 \leq \int_a^b h(t) dt = \int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) dt$$

↑ prop. précédente ↑ linéarité

Prop: Pour $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable, on a $|\int_a^b f(t) dt| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Preuve: On pose $f^+ = \max\{f, 0\}$ et $f^- = \max\{-f, 0\}$

$$\text{On a : } \begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}$$

$$\text{On a donc : } \left| \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^b (f^+ - f^-)(t) dt \right| \stackrel{\text{linéarité}}{=} \left| \int_a^b f^+(t) dt - \int_a^b f^-(t) dt \right|$$

$$\stackrel{\text{inégalité triangulaire}}{\leq} \int_a^b f^+(t) dt + \int_a^b f^-(t) dt$$

$$\stackrel{\text{linéarité}}{=} \int_a^b (f^+ + f^-)(t) dt = \int_a^b |f|(t) dt \quad \blacksquare$$

Corollaire : Soit $f \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable (donc bornée). Alors :

$$G : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t) dt \end{cases} \quad \text{est lipschitzienne.}$$

Preuve : Soit $K = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Alors, $\forall x, y \in [a, b]$ avec $x < y$, on a

$$\begin{aligned} |G(y) - G(x)| &= \left| \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq K \cdot |y - x| \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Aparté : Prop : L'application $\begin{cases} C^0([a, b])^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \end{cases}$ est un produit scalaire.

- Preuve :
- La bilinéarité : conséquence de la linéarité de l'intégrale.
 - Symétrie : on par commutativité du produit.
 - Positivité : on car $\int_a^b f(x)^2 dx \geq 0, \forall f \in C^0([a, b])$.
 - Définie : on car $\int_a^b f(x)^2 dx = 0$ alors $f = 0$ \(\Rightarrow\)

Donc $C^0([a, b])$ muni de ce produit scalaire et de la norme associée $f \mapsto \int_a^b f^2(x) dx$ est pré-Hilbertien. En revanche cet espace n'est pas complet; (donc ça n'est pas un espace de Hilbert).

Sa complétion est l'espace de Lebesgue $L^2([a, b])$, le "plus important" des espaces de fonctions.

7.5 Théorème de convergence

Thm: Soit (f_n) une suite de fonctions $C^0([a, b])$ qui converge uniformément vers f . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Preuve: f est continue comme limite uniforme de fonctions continues donc $\int_a^b f(x) dx$ bien définie.

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Ainsi $\forall n \geq n_0$, $\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$ ■

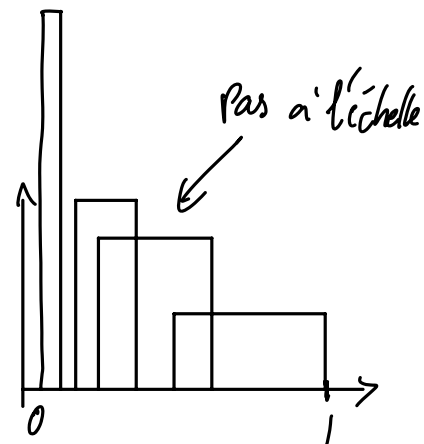
Prop. ci-dessus

"On peut permuter $\int$ et $\lim_{n \rightarrow \infty}$ si la convergence est uniforme"

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$$

Contre-exemple quand la convergence n'est pas uniforme :

Pour $n \geq 2$ $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} n & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



Alors (f_n) converge simplement vers $f=0$ mais pas uniformément.

On a ici : $\int_0^1 f_n(x) dx = n \cdot \frac{1}{n} = 1$, $\forall n \geq 0$ mais $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Thm (intégration/dérivation des séries entières). Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit $F :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction somme. Alors :

(i) la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ a pour rayon de cvge $R' = R$.

(ii) Sa somme $f :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ satisfait $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in]-R, R[$.

Preuve:

$$(i) R = \left(\limsup_{k \rightarrow +\infty} |a_k|^{1/k} \right)^{-1} = \left(\limsup_{k \rightarrow +\infty} k^{1/k} |a_k|^{1/k} \right)^{-1} = R'$$

$\exp\left(\frac{\log(k)}{k}\right)$

$$(ii) \text{ On note } f_N(x) = \sum_{n=0}^N (n+1) a_{n+1} x^n \text{ pour } x \in]-R, R[.$$

On a $f_N \in C^0(]-R, R[)$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

Pour $u \in]-R, R[$ on sait que (f_N) converge uniformément vers f sur $[0, u]$.

Donc par le thm. précédent:

$$\int_0^u f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^u f_N(x) dx \stackrel{\text{linéarité de l'intégrale}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_{n+1} u^{n+1} = F(u) - a_0$$

Comme de plus, f est continue sur $]-R, R[$, on en déduit :

$$F'(u) = f(u), \quad \forall u \in]-R, R[$$

Application: Calculer : $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} \frac{1}{\sqrt{3}^k}$

On pose $f(x) = \sqrt{3} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$, $R = 1$, on a $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = S$

Par dérivation de série entière : $f'(x) = \sqrt{3} \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{\sqrt{3}}{1-x}$ pour $x \in]-1, 1[$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f(x) &= f(0) + \int_0^x \sqrt{3} \frac{dt}{1-t} = f(0) - \sqrt{3} [\log(1-t)]_0^x \\ &= -\sqrt{3} \log(1-x) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } S = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3} \log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

7.6 Changement de variable

Thm: Soit $f \in C^0([a, b])$ et $\varphi \in C^1(I)$ où $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert.
Supposons qu'il existe $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$ tels que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$.

Alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Rmq: On n'impose pas à φ d'être injective.

Preuve: Pour $t \in [\alpha, \beta]$, on définit

$$\begin{cases} G(t) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x) dx \\ g(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t). \end{cases}$$

On a $G'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t) = g(t)$, $\forall t \in]\alpha, \beta[$. Donc G est une primitive de g sur $[\alpha, \beta]$ car $G \in C^0([a, b])$. On obtient donc :

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = G(\beta) - G(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx$$

■
fin 02/12