

Lemme: Pour toutes subdivisions σ_1 et σ_2 on a $\underline{S}(f, \sigma_1) \leq \bar{S}(f, \sigma_2)$. En particulier: $\underline{S}(f) \leq \bar{S}(f)$.

Preuve: La subdivision $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ vérifie:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \underline{S}(f, \sigma_1) \leq \underline{S}(f, \sigma) \\ \bullet \bar{S}(f, \sigma_2) \geq \bar{S}(f, \sigma) \\ \bullet \underline{S}(f, \sigma) \leq \bar{S}(f, \sigma) \end{array} \right\} \text{ donc } \underline{S}(f, \sigma_1) \leq \bar{S}(f, \sigma_2). \quad \blacksquare$$

Définition (Intégrale de Riemann). La fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée est dite intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$ ssi $\underline{S}(f) = \bar{S}(f)$. Dans ce cas,

on note $\underline{S}(f) = \bar{S}(f) = \int_a^b f(x) dx$

qui est appelée l'intégrale de f de a à b .

Décrivons la notation:

$\int_a^b f(x) dx$

- b : borne supérieure.
- a : borne inférieure.
- $f(x)$: l'intégrande.
- dx : rappelle un élément infinitésimal.
- x : variable d'intégration "muette".

$\int f$ (si contexte clair).

Convention: si $a < b$, $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

$\bullet \forall c \in [a, b], \int_c^c f(x) dx = 0.$

fin 2S/11

Thm (intégrabilité des fonctions continues). Soit $f \in C^0([a, b])$. Alors f est intégrable.

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur $[a, b]$:

$$\exists \delta > 0, \forall x, y \in [a, b], (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a})$$

Ainsi pour toute subdivision σ de pas inférieur à δ , on a $|m_j - m_{j-1}| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \forall j$.

et donc $0 \leq \bar{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{b-a} \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) = (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$

On en déduit, comme $\underline{\Sigma}_\sigma(f) \leq \underline{\Sigma}(f) \leq \bar{\Sigma}(f) \leq \bar{\Sigma}_\sigma(f)$, que

$$0 \leq \bar{\Sigma}(f) - \underline{\Sigma}(f) \leq \bar{\Sigma}_\sigma(f) - \underline{\Sigma}_\sigma(f) \leq \varepsilon$$

Ceci étant vrai $\forall \varepsilon > 0$, il s'ensuit que $\bar{\Sigma}(f) = \underline{\Sigma}(f)$ ■

Prop. (calcul de l'intégrale avec une suite). Soit $f \in C^0([a, b])$ et (σ_n) une suite de subdivisions de $[a, b]$. Si $\mathcal{D}(\sigma_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ où $\mathcal{D}(\cdot)$ est le pas d'une subdivision alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Sigma}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\Sigma}_{\sigma_n}(f)$$

Preuve : Reprenons ε et δ de la preuve précédente. Par hypothèse $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\mathcal{D}(\sigma_n) \leq \delta$ et donc :

$$\max \{ |\bar{\Sigma}_{\sigma_n} - \bar{\Sigma}|, |\underline{\Sigma}_{\sigma_n} - \underline{\Sigma}| \} \leq |\bar{\Sigma}_{\sigma_n}(f) - \underline{\Sigma}_{\sigma_n}(f)| \leq \varepsilon$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\Sigma}_{\sigma_n} = \bar{\Sigma} = \int_a^b f(x) dx \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{\Sigma}_{\sigma_n} = \underline{\Sigma} = \int_a^b f(x) dx \quad \blacksquare$$

Exemple de fonction bornée non intégrable (au sens de Riemann) :

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

→ La densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $[0, 1]$ implique pour toute subdivision de $[0, 1]$ on aura toujours $M_i = 1$ et $m_i = 0, \forall i$. Donc

$$\bar{\Sigma}_\sigma(f) = 1 \quad \text{et} \quad \underline{\Sigma}_\sigma(f) = 0, \quad \forall \sigma \text{ subdivision de } [0, 1]$$

$$\text{Donc} \quad \bar{\Sigma}(f) = 1 \neq \underline{\Sigma}(f) = 0.$$

→ Il existe une théorie plus générale d'intégration (de Lebesgue) qui donne la valeur 0 à $\int_0^1 f(x) dx$.

7.2 Propriétés de l'intégrale

Prop: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. Alors

$$(b-a) \cdot \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \cdot \sup_{[a,b]} f.$$

Preuve: on a cet encadrement pour les sommes de Darboux, il suffit de passer au sup / inf.

Prop: Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et intégrable sur $[a, b]$ et $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est égale à f sauf en un nombre fini de points. Alors g est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

Preuve: Soit $K > 0$ tel que $|f(x)| \leq K$ et $|g(x)| \leq K, \forall x \in [a, b]$.

Soit $m \in \mathbb{N}$ le nombre de points où f et g diffèrent.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par hypothèse d'intégrabilité de f , $\exists$ subdivisions σ_1 et σ_2 telles que:

$$\bar{S}_{\sigma_2}(f) - \underline{S}_{\sigma_1}(f) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit $n = 1 + \lfloor 12 \cdot m \cdot K \cdot (b-a) / \varepsilon \rfloor$ et σ_3 la subdivision régulière d'ordre n de $[a, b]$, c'est-à-dire $\sigma_3 = \{x_i = a + \left(\frac{b-a}{n}\right)i; i \in \{0, \dots, n\}\}$

On pose $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3$ qui satisfait $\bar{S}_{\sigma}(f) - \underline{S}_{\sigma}(f) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Comme $\sup_{[a,b]} |f-g| \leq 2K$ et comme le pas de σ est inférieur à $\frac{b-a}{n}$ on a

$$\bar{S}_{\sigma}(g) \leq \bar{S}_{\sigma}(f) + (2m) \cdot (2K) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) \leq \bar{S}_{\sigma}(f) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\text{De même } \underline{S}_{\sigma}(g) \geq \underline{S}_{\sigma}(f) - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{D'où } 0 \leq \bar{S}_{\sigma}(g) - \underline{S}_{\sigma}(g) \leq \bar{S}_{\sigma}(f) - \underline{S}_{\sigma}(f) + \frac{2\varepsilon}{3} \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que g est intégrable.

De plus : $\underline{S}_\sigma(g) - \bar{S}_\sigma(f) \leq \int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) dt \leq \bar{S}_\sigma(g) - \underline{S}_\sigma(f)$
 $\leq \bar{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{2\varepsilon}{3}$
 $\xrightarrow{-\frac{2\varepsilon}{3} \leq} \text{on fait de même qu'ici} \nearrow$

Donc $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt$. ■

Thm. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et $c \in [a, b]$. Alors :

$(f \text{ est intégrable sur } [a, b]) \Leftrightarrow (f \text{ est intégrable sur } [a, c] \text{ et sur } [c, b])$

Et dans ce cas : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$. (Relation de Chasle) [?]

Idée de preuve : Résultat évident si $c \in \{a, b\}$. Pour $c \in]a, b[$, considérer des subdivisions dont les sommes de Darboux sont ε -près de l'intégrale puis former des unions (pour $\Leftarrow$) ou des restrictions (pour $\Rightarrow$) de ces subdivisions.

Prop (linéarité) : Soient f, g intégrables sur $[a, b]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha f + \beta g$ est intégrable et $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.

(Preuve dans la série 12.1).

Thm (de la valeur moyenne). Si $f \in C^0([a, b])$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Preuve : En posant $m = \min_{[a, b]} f$ et $M = \max_{[a, b]} f$. On a :

$$(b-a) \cdot m \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a) \cdot M \quad \text{donc} \quad m \leq \frac{\int_a^b f(t) dt}{(b-a)} \leq M.$$

Par le T.V.I, $\exists c \in [a, b]$ t.q. $f(c) = \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a}$. ■

Contre-exemple si f n'est pas continue : Soit $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$
 Cette fonction est intégrable et son intégrale est $\frac{1}{2} \neq \int_0^1 f(x) dx$.

7.3 Relation entre intégration et dérivation.

Def (primitive). Soit $f \in C^0(I)$, I intervalle. On dit $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f ssi $G \in C^0(I)$ et si $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in \overset{\circ}{I}$ (intérieur de I).

Rmq: Si $I = [a, b]$ alors $G'_d(a) = f(a)$ et $G'_g(b) = f(b)$ (par le Thm. de la continuité de la dérivée).

Prop: Soit $f \in C^0(I)$, I intervalle. Si F et G sont deux primitives de f , alors $F - G$ est constante.

Preuve: On a $(F - G)' = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$. On conclut avec le corollaire du T.A.F.

Thm. fondamental de l'analyse: Soit $f \in C^0([a, b])$. Alors la fonction

$$G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est une primitive de f sur $[a, b]$.

Preuve: Soit $x_0 \in]a, b[$ fixé et $x \in]a, b[$. Par le Thm. de la valeur moyenne $\exists c_x \in [x_0, x]$ tel que :

$$G(x) - G(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt = f(c_x) \cdot (x - x_0)$$

$$\text{Ainsi : } \frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} = f(c_x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0) \text{ (par continuité de } f\text{).}$$

$$\text{Donc } G'(x_0) = f(x_0), \forall x_0 \in]a, b[.$$

Reste à montrer la continuité à gauche en b et à droite en a .

$$\text{En prenant } x_0 = a, \text{ on a } G(x) - G(a) = \int_a^x f(t) dt = f(c_x) \cdot (x - a) \text{ avec } c_x \in [a, x].$$

$$\text{Donc } G(x) - G(a) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} 0 \text{ donc } G \text{ continue à droite en } a.$$

On raisonne de même en b pour conclure.

Corollaire: Soit $f \in C^0([a, b])$. Si $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = \underbrace{[G(x)]_a^b}_{\text{notation / abréviation.}}$$

Preuve: $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$ donc $\exists c \in \mathbb{R}$ s.t. $F(x) = G(x) + c$.

$$F(x) = G(x) + c, \quad \forall x \in [a, b].$$

$$\text{Donc } G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

■
fin 27/11
←