Chapitre 6 : Exp et Log

Prétendons un instant que nous n'avons jamais rencontré ces fonctions.

6.1 Exponentielle

Def : $\exp : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \end{array}$

Prop 1 : a) $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$

b) $\exp(0) = 1$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

En particulier $\exp(-x) \cdot \exp(x) = 1$.

c) exp est strictement positive, strict. croissante, strict. convexe

d) $\exp(x) \geq 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. En particulier $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \end{cases}$

e) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est bijective

f) $\forall x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\exp\left(\frac{mx}{n}\right) = [\exp(x)]^{\frac{m}{n}}$

puissance au sens "classique" de $\sqrt[n]{\underbrace{\exp(x) \cdot \ldots \cdot \exp(x)}_{m \text{ fois}}}$.

On définit $e = \exp(1) \simeq 2{,}71\ldots$

Par f) on a $\exp(q) = e^q$, $\forall q \in \mathbb{Q}$

On généralise cette notation à tous les réels : $\exp(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Preuve :

a) La série entière converge sur $\mathbb{R}$ donc $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$ (même $C^\omega(\mathbb{R})$). Par dérivation terme à terme de la série entière :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

$(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots) \rightsquigarrow (0 + 1 + x + \ldots$

b) $\exp(0) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1$. Soit $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(x)\cdot\exp(-x) \end{vmatrix}$

Alors $\begin{cases} f'(x) = \exp(x)\cdot\exp(-x) - \exp(x)\cdot\exp(-x) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Donc f est constante égale à $f(0) = 1$ c-à-d : $\exp(x)\cdot\exp(-x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Pour $y \in \mathbb{R}$, soit $g : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(-x)\cdot\exp(x+y) - \exp(y) \end{vmatrix}$

Alors on a $\begin{cases} g'(x) = -\exp(-x)\cdot\exp(x+y) + \exp(-x)\cdot\exp(x+y) = 0 \\ g(0) = \exp(y) - \exp(y) = 0 \end{cases}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$: $\exp(-x)\cdot\exp(x+y) = \exp(y)$

$\Downarrow$ ← multiplier par $\exp(x)$

$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$$

c) Si $x \geq 0$, clairement $\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1$.

Si $x < 0$, alors $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \in]0, 1]$

$\Big\}$ $\exp(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Comme $\exp = \exp' = \exp''$ on a la stricte croissance et stricte convexité.

d) Inégalité de convexité : $\exp(x) \geq \exp(0) + \exp'(0)(x-0) = 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc par comparaison $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = 0$.

e) exp est strict. croissante donc injective. Comme exp continue, par le T.V.I et les limites ci-dessus $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ surjective et donc bijective.

f) Par b) pour $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \exp(mx) = \exp(x)^m \\ \exp(-mx) = \frac{1}{\exp(mx)} = \exp(x)^{-m} \end{cases}$

Aussi $\forall x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\exp\left(\frac{m}{n}x\right)^n = \exp(mx) = \exp(x)^m$

On obtient f en prenant la racine n-ième de part et d'autre. ∎

Def : $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la réciproque de exp.

Prop 2 : a') log est strict. croissante et bijective (découle de c et e)
b') log est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\log'(x) = \frac{1}{x}$ (dérivée de la réciproque)
c') $\log(1) = 0$, $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$, $\forall x, y > 0$ (découle de b)
d') $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\log(x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}\log(x)$ (découle de f).

Rmq : • de b') on déduit le développement en série entière de $x \mapsto \log(1+x)$.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \qquad \text{sur } x \in]-1,1[.$$

• d') suggère la notation $x^y = \exp(y \log x)$, $\forall x > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$.
cela définit la fonction puissance.

Prop : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{x}{n})^n = \exp(x)$.

Preuve : $$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \exp(x + o(1)) = \exp(x) \qquad \blacksquare$$

Comparaisons asymptotiques :

Prop : Soit $\alpha > 0$ et $a > 1$. On a $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \end{cases}$ et $\begin{cases} \lim_{x\to0+} x^\alpha \log(x) = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} a^x \cdot |x|^\alpha = 0 \end{cases}$ $\blacksquare$

Aparté : l'exponentielle complexe et la formule d'Euler

Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ (converge sur $\mathbb{C}$)
satisfait $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$. (preuve : série II.2)

Pour $z = ix$, $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\exp(ix) = 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$= \cos(x) + i\sin(x)$$

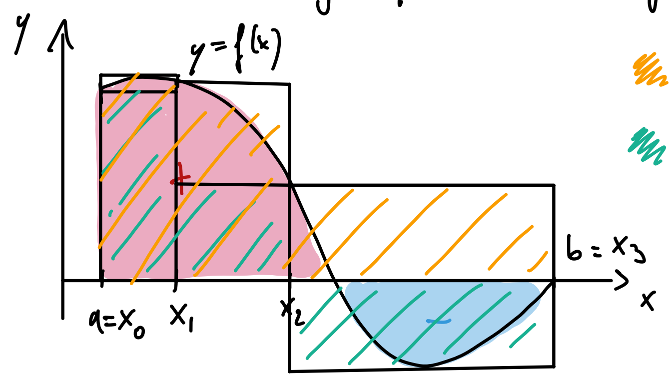
En particulier ($x = \pi$) on obtient $\exp(i\pi) + 1 = 0$ (Identité d'Euler).

Chapitre 7 : intégration

7.1 Construction de l'intégrale (de Riemann)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée.

Peut-on calculer l'aire "algébrique" entre le graphe de f et l'axe des abscisses ?



: somme de Darboux supérieure.

: ——————— inférieure.

On définit :

- une subdivision de $[a, b]$: $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
  $\rightarrow$ on appelle $\max\{x_i - x_{i-1} \; ; \; 1 \leq i \leq n\}$ le pas de la subdivision
- la somme de Darboux supérieure (associée à une subdivision σ) :

$$\overline{S}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \quad \text{avec} \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

- la somme de Darboux inférieure :

$$\underline{S}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \quad \text{avec} \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Etant donnée une subdivision on a :

$$(b-a) \cdot \inf_{[a,b]} f \leq \underline{S}(f, \sigma) \leq \overline{S}(f, \sigma) \leq (b-a) \cdot \sup_{[a,b]} f$$

On a $\cdot\, \underline{S}(f) = \sup\{\underline{S}(f, \sigma) \; ; \; \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\} \in \mathbb{R}$ (intégrale inférieure).

$\cdot\, \overline{S}(f) = \inf\{\overline{S}(f, \sigma) \; ; \; \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\} \in \mathbb{R}$ (intégrale supérieure)

Lemme : Pour toutes subdivisions σ_1 et σ_2 on a $\underline{S}(f,\sigma_1) \leq \overline{S}(f,\sigma_2)$. En particulier : $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$.

Preuve : La subdivision $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ vérifie :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \underline{S}(f,\sigma_1) \leq \underline{S}(f,\sigma) \\ \bullet\ \overline{S}(f,\sigma_1) \geq \overline{S}(f,\sigma) \\ \bullet\ \underline{S}(f,\sigma) \leq \overline{S}(f,\sigma) \end{array}\right\} \text{ donc } \underline{S}(f,\sigma_1) \leq \overline{S}(f,\sigma_2).$$

∎

Définition (Intégrale de Riemann). La fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée est dite intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$ ssi $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$. Dans ce cas, on note

$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

qui est appellée l'intégrale de f de a à b.

Décortiquons la notation : $\int_a^b f(x)\,dx$

borne supérieure.

rappelle un élément infinitésimal.

variable d'intégration "muette".

borne inférieure

l'intégrande

Convention :
- si $a<b$, $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
- $\forall c \in [a,b]$, $\int_c^c f(x)\,dx = 0$.

fin 25/11

Thm (intégrabilité des fonctions continues).