Lemme d'Abel (sommation par parties). Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles, alors :

$(m, n \in \mathbb{N})$, $$\sum_{k=m}^{n} u_k (v_k - v_{k-1}) = (u_{n+1} v_n - u_m v_{m-1}) - \sum_{k=m}^{n} v_k (u_{k+1} - u_k)$$

Preuve : $\sum_{k=m}^{n} u_k (\cancel{v_k} - v_{k-1}) + \sum_{k=m}^{n} v_k (u_{k+1} - \cancel{u_k}) = \sum_{k=m}^{n} (v_k u_{k+1} - v_{k-1} u_k) = v_n u_{n+1} - v_{m-1} u_m$ ■

Preuve du Thm. d'Abel : On peut sans difficultés se ramener au cas où $R = 1$ et $\sum a_n = 0$.

Montrons que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$. (le cas de la limite en -1 est analogue).

fin 18/11

À suivre ...

(Examen blanc : mercredi 4 décembre 16:00 à 19:00, salle BCH 2201)

En posant $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Par sommation par partie :

$s_{-1} = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1}) x^k = (x^{n+1} s_n - \underbrace{x^0 s_{-1}}_{=0}) - \sum_{k=0}^{n} s_k (x^{k+1} - x^k)$$

$$= x^{n+1} \underset{\text{cvgte donc bornée}}{s_n} + (1-x) \sum_{k=0}^{n} s_k x^k$$

Pour $|x| < 1$, $\lim_{n \to +\infty} x^{n+1} \cdot s_n = 0$ et donc

$$f(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{+\infty} s_k x^k$$

Soit $\varepsilon > 0$.

- Comme $s_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_0$, $|s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.
- Par continuité en 1, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in [1-\delta, 1[$, $\underbrace{\left|(1-x) \sum_{k=0}^{N_0} s_k x^k\right|}_{\text{polynôme, donc continu.}} < \frac{\varepsilon}{2}$
- Ainsi $\forall x \in [\max(0, 1-\delta), 1[$:

$$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left|(1-x) \sum_{k=N_0+1}^{+\infty} s_k x^k\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + (1-x) \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \leq \frac{\varepsilon}{2} + (1-x) \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{1-x} \leq \varepsilon$$

Ceci montre $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$. ■

Thm. (dérivation des séries entières). Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ avec un rayon de convergence $R > 0$. Alors $f \in C^\infty(]-R, R[)$ et $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$ et le rayon de convergence est encore R. Plus généralement : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\, a_k\, x^{k-n} \quad (\text{même rayon } R)$$

Preuve : chapitre "intégration".

Application : somme de la série harmonique alternée.

On a vu : $\begin{cases} f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \text{ a pour } R = 1 \\ g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \text{ a pour } R = 1 \end{cases}$ (exemples A) et B) ci-dessus)

Par dérivation des séries entières $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k-1} = g(x)$ pour $x \in]-1, 1[$

Mais $g(x) = \frac{1}{1-x}$ et $f(0) = 0$ donc $f(x) = -\log(1-x)$ pour $x \in]-1, 1[$

On sait que la série converge pour $x = -1$ (série harmonique alternée).

On en déduit, par le Thm d'Abel que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{x \to (-1)^+} -\log(1-x) = -\log(2)$$

5.3 Série de Taylor

Soit I un intervalle ouvert et $f \in C^\infty(I)$. On rappelle Taylor-Lagrange en $a \in I$:

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u_x) \text{ avec } u_x \in]a, x[$$

Naturellement on est amenés à étudier le lien entre f et l'objet suivant :

(ou série de MacLaurin si $a = 0$)

Def (Série de Taylor). On appelle série de Taylor de f en a la série entière :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Def | Soit I un intervalle ouvert et $f \in C^\infty(I)$. Si pour $a \in I$, il existe $\delta > 0$ t.q f coïncide avec sa série de Taylor en a sur $]a-\delta, a+\delta[$ alors on dit que f est analytique au voisinage de a. Si f est analytique au voisinage de tout point de I, on dit que f est analytique sur I.

Prop: Toute série entière de rayon de cvgce $R > 0$ est analytique sur $]-R, R[$.
(admis - cf. analyse complexe)

On a $\underbrace{C^\omega(I)}_{\text{ensemble des fonctions analytiques.}} \subsetneq C^\infty(I)$

est strictement inclus dans

Exemples:

A) $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$.

On a $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$, ...

La série de Taylor de sin en $a = 0$ est :

$$0 + x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

- Intervalle de convergence ?

D'Alembert : $\left| \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{(2k-1)!}{x^{2k-1}} \right| = \frac{|x|^2}{(2k+1)2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $\forall x \neq 0$.

Donc $R = +\infty$ et la série converge sur $\mathbb{R}$.

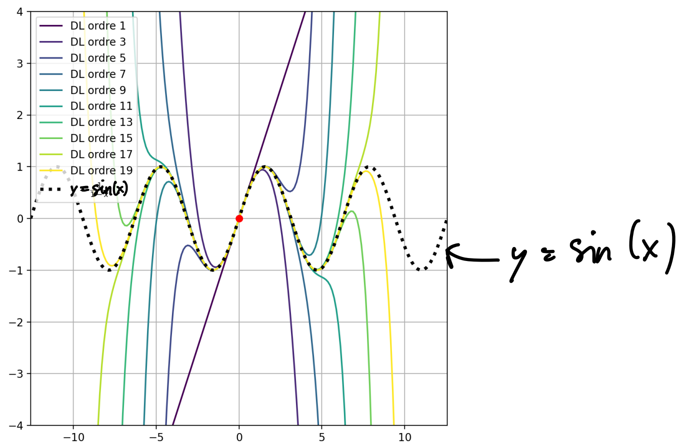
- Lien entre f et sa série de Taylor ?

Pour $x \neq 0$, $R_k(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} f^{(2k+2)}(u_{x,k})$, $u_{x,k} \in]0, x[$

$$|R_k(x)| \leq \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Ainsi $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\sin \in C^\omega(\mathbb{R})$.



B) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable tq. $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$. Montrons que $f = \exp$.

Par récurrence $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(n)} = f$ et $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

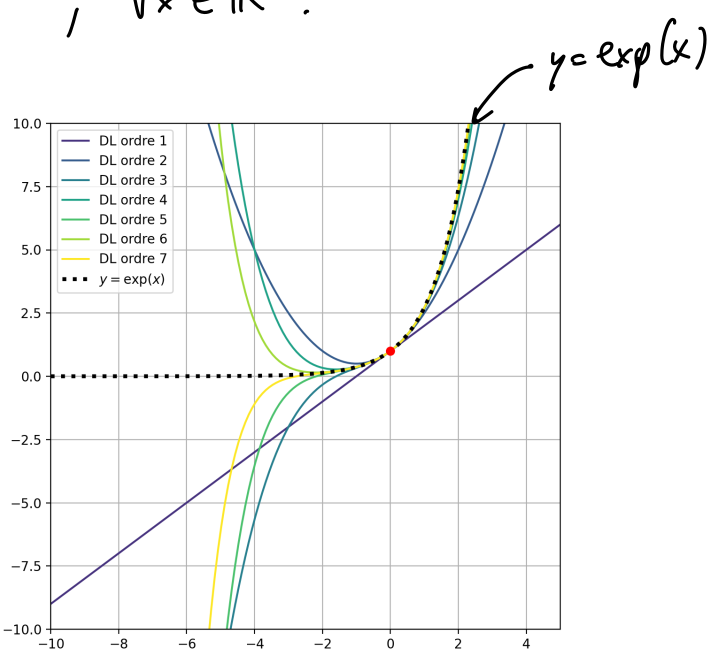
Série de Taylor en $a = 0$: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Rayon de cvgce : $R = +\infty$ (vu plus haut).

$\forall x \neq 0$, $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f(u_{n,x})$, avec $u_{n,x} \in]0, x[$

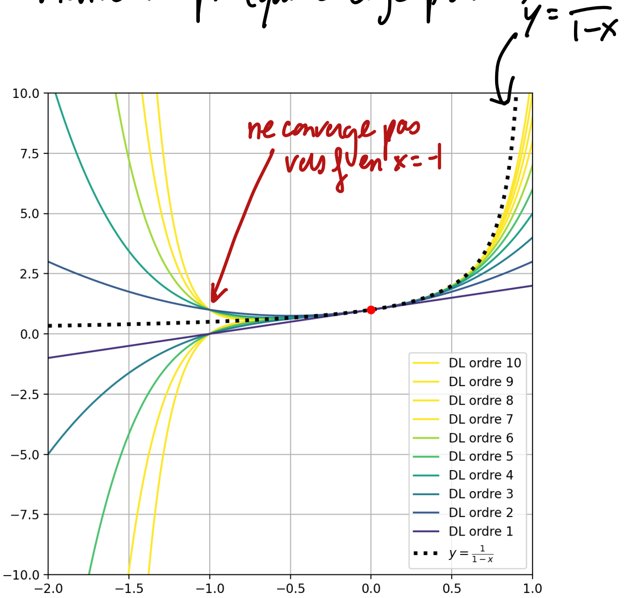
$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max\{ |f(t)| ; |t| \leq |x| \} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{(d'Alembert pour suites)}$$

Ainsi $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

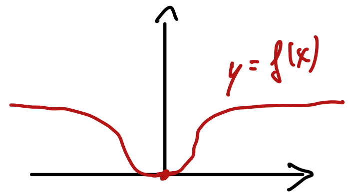
et $\exp \in C^\omega(\mathbb{R})$.



Autre exemple (qui ne cvge pas sur $\mathbb{R}$): $y = \frac{1}{1-x}$



c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.



Prop : $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (exercice).

Ainsi la série de Taylor de f en 0 est $\sum_{k=0}^{+\infty} 0 \cdot x^k = 0$ $(R = +\infty)$

Donc f ne coïncide avec sa série de Taylor que en 0 $(f \notin C^\omega(\mathbb{R}))$

Tableau récapitulatif : quelques fonctions développables en séries de Taylor (À connaître)

$f(x)$	Série de Taylor en 0 $(S(x))$	$f(x) = S(x)$ pour $x \in \ldots$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$	$]-1, 1[$
$\log(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots$	$]-1, 1]$
$\exp(x)$	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$\mathbb{R}$
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	$\mathbb{R}$
$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$\mathbb{R}$.

20/11

Addendum (unicité) : Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ deux séries entières de rayon de convergence $R_a, R_b > 0$ et de fonctions somme f_a, f_b respectivement. Si $\exists \delta \in]0, \min(R_a, R_b)[$ tel que $\forall x \in]-\delta, \delta[$ on a $f_a(x) = f_b(x)$, alors $a_k = b_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Preuve : Par dérivation des séries entières, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $k!\, a_k = f_a^{(k)}(0) = f_b^{(k)}(0) = k!\, b_k$ ∎