

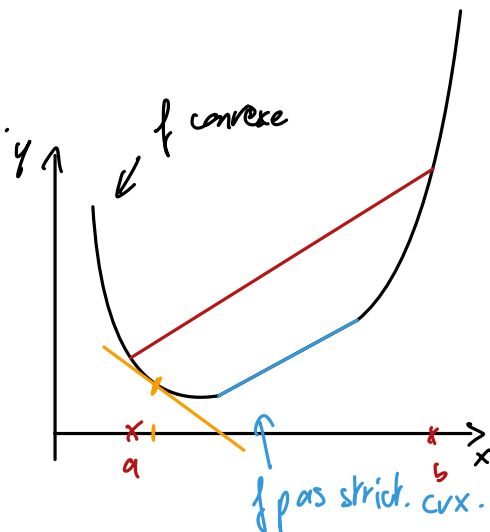
4.13 Fonctions convexes

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Def : f est dite convexe ssi $\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

"le graphe de f est en dessous de ses cordes"



- Si l'inégalité est stricte du moment que $a \neq b$ et $\lambda \notin \{0, 1\}$ alors on dit que f est strictement convexe.
- f est concave ssi $-f$ est convexe.

On a les propriétés suivantes (série 9.2) :

- Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe alors f est continue sur $\overset{\circ}{I}$ (intervalle I privé de ses bornes) et admet des dérivées à gauche et à droite en tout point de $\overset{\circ}{I}$.

- Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I , alors :

$$f \text{ convexe} \Leftrightarrow f' \text{ croissante}$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in I, f(y) \geq f(x) + f'(x) \cdot (y - x)$$

"le graphe d'une fonction convexe est au dessus de ses tangentes".

- Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I alors :

$$f \text{ convexe} \Leftrightarrow f'' \geq 0.$$

Chapitre 5 : séries entières

5.1 Généralités

Def: Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle "série entière" l'expression
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + \dots + a_n \cdot (x-x_0)^n + \dots$$

On appelle n -ième somme partielle de la série entière et la quantité

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot (x-x_0)^k$$

Rmq: (S_n) est une suite de polynômes de degré croissant.

- La série entière s'interprète comme un polynôme de degré infini, mais ses propriétés peuvent être très différentes des polynômes
- Sans perte de généralité, fixons $x_0 = 0$ par la suite.

Def: Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, on dit que :

- la série entière converge (simplement/partiellement) sur I si la suite (S_n) converge.
- la série entière converge uniformément si la suite (S_n) converge uniformément.

Thm. S'il existe $\hat{x} \neq 0$ t. q la série (numérique) $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \hat{x}^k$ converge alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ converge absolument pour tout $x \in I =]-\hat{x}, \hat{x}[$. Donc la série entière converge simplement sur I .

Preuve: Si $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \hat{x}^k$ converge alors on a $|a_k \cdot \hat{x}^k| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ donc

$$\exists C > 0 \text{ t.q. } |a_k \cdot \hat{x}^k| \leq C, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si $x \in \mathbb{R}$ t.q. $|x| < |\hat{x}|$, le ratio $p = \frac{x}{\hat{x}}$ satisfait $|p| < 1$.

$$\text{Ainsi, } |a_k \cdot x^k| = |a_k| \cdot |x|^k = |a_k| \cdot |\hat{x}|^k \cdot |p|^k \leq C \cdot |p|^k$$

Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} |p|^k < +\infty$ (converge) cela montre, par comparaison

que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ converge absolument. ■

Def: On appelle "rayon de convergence" le nombre :

$$R = \sup \left\{ |x| ; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\} \in [0, +\infty]$$

D'après le thm. précédent: on a que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. converge absolument si $|x| < R$
• diverge si $|x| > R$

→ on ne peut rien dire a priori pour $x = R$ ou $x = -R$.

Exemples :

A) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$. La série entière est $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

$$\text{Rappel: } \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}, \text{ pour } x \neq 1.$$

On obtient $R = 1$ et la somme vaut $f(x) = \frac{1}{1-x} \forall x \in]-1, 1[$.

et la série diverge pour $|x| \geq 1$.

B) On pose $a_0 = 0$ et $a_k = \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, la série entière est

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n}x^n + \dots$$

$$\text{Comme } \forall n \geq 1, x \neq 0 \text{ on a } \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \cdot \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|$$

Donc par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence est $R=1$.

De plus : • Si $x = 1$: la série diverge (série harmonique)

• Si $x = -1$: la série converge (série harmonique alternée).

C) On pose $a_n = \frac{1}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ($0! = 1$). La série est $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

$$\text{Comme } \forall n \in \mathbb{N}, x \neq 0, \quad \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence est $R = +\infty$.

C'est ainsi que l'on définit l'exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{étude au prochain chapitre}).$$

D) On pose $a_n = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$. La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (n!) x^n$ a pour rayon de convergence $R = 0$, d'après le critère de d'Alembert car :

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \cdot (n+1) \rightarrow +\infty, \quad \forall x \neq 0.$$

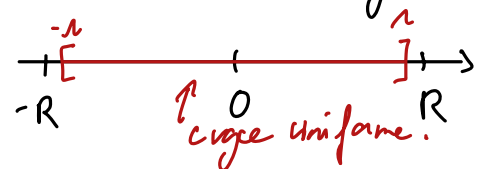
Prop: Si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R > 0$ alors :

$$R = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1}.$$

Preuve: On a $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n \cdot x^n|^{1/n} = |x| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$ puis critère de Cauchy version lim sup

5.2 Comportement des séries entières en tant que fonctions.

Thm (convergence uniforme). Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors $\forall r \in]0, R[$, la série entière converge uniformément sur $[-r, r]$.



Preuve: Soit $\rho \in]0, R[$. Pour tout $x \in [-\rho, \rho]$ on a :

$$\begin{aligned} |S(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right| \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| \cdot |x|^k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| \cdot \rho^k \end{aligned}$$

Par le Thm ci-dessus, $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \cdot \rho^k$ converge donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| \cdot \rho^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Ainsi $\sup_{x \in [-\rho, \rho]} |S(x) - S_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ce qui montre la convergence uniforme de (S_n) vers S sur $[-\rho, \rho]$. ■

Rmq 1: ⚠ La convergence n'est en général pas uniforme sur $] -R, R[$!

Contre-exemple: $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ ne converge pas uniformément sur $] -1, 1[$. En effet :

→ chaque somme partielle est bornée $] -1, 1[$ (polynôme)

→ mais la limite $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ n'est pas bornée (au voisinage de 1).

Rmq 2: En particulier la fonction somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $] -R, R[$ (car continue sur $[-\rho, \rho]$, $\forall \rho \in]0, R[$, comme limite uniforme de $f|_{[-\rho, \rho]}$ continue).

→ Qu'en est-il de la continuité aux bords ?

Thm d'Abel: Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière, $R > 0$ son rayon de convergence.

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $|x| < R$.

• Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ converge alors $\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ (continuité à gauche en R)

• Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$ converge alors $\lim_{x \rightarrow -R^+} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$ (continuité à droite en $-R$)

Lemme d'Abel (sommatation par parties). Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles, alors :

$$(m, n \in \mathbb{N}), \quad \sum_{k=m}^n u_k (v_k - v_{k-1}) = (u_{n+1} v_n - u_m v_{m-1}) - \sum_{k=m}^n v_k (u_{k+1} - u_k)$$

Preuve : $\sum_{k=m}^n u_k (\cancel{v_k} - v_{k-1}) + \sum_{k=m}^n v_k (u_{k+1} - \cancel{u_k}) = \sum_{k=m}^n (v_k u_{k+1} - v_{k-1} u_k) = v_n u_{n+1} - v_{m-1} u_m \quad \blacksquare$

Preuve du Thm. d'Abel : On peut sans difficulté se ramener au cas où $R=1$ et $\sum a_n = 0$.

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$. (le cas de la limite en -1 est analogue).

À suivre ...

fin 18/11