Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Corrigé 5.1 – mardi 8 octobre 2024

Exercice 1.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. On souhaite montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) < +\infty \iff \exists \ell \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \lim_{n\to\infty} a_n = \ell.$$

En développant les sommes partielles de la série, on obtient une somme télescopique:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k) = a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \cdots + a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - a_0.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_{n+1} - a_0$ et par passage à la limite des sommes de suites, (S_n) converge $\iff$ (a_n) converge.
Remarque: En passant à la limite, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty} S_n = (\lim_{n\to\infty} a_n) - a_0.$$

Exercice 2.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls. Montrons que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n} < +\infty$. Pour tout $n > 0$, on a

- Si $a_n = 0$, on a $0 = \frac{a_n}{1+n^2a_n} < \frac{1}{n^2}$;
- Si $a_n > 0$, on a $0 \leq \frac{a_n}{1+n^2a_n} < \frac{a_n}{n^2a_n} = \frac{1}{n^2}$.

Par comparaison avec $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, on conclut à la convergence de la série.

Exercice 3.

(i) Par le critère de d'Alembert, la série converge (absolument), car

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^4}{3n^4}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^4}{3n^4} = \frac{1}{3} < 1.$$

(ii) On a

$$\sqrt{n^2+7} - n = \frac{(\sqrt{n^2+7}-n)(\sqrt{n^2+7}+n)}{\sqrt{n^2+7}+n} = \frac{7}{\sqrt{n^2+7}+n}.$$

Observons que pour $n > 3$, on a $n^2 + 7 < (n+1)^2$ et donc

$$\frac{7}{\sqrt{n^2+7}+n} > \frac{7}{\sqrt{(n+1)^2}+n} > \frac{7}{3n}.$$

Comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{3n} = \frac{7}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ diverge, la série initiale diverge aussi par le critère de comparaison.

(iii) Étudions la convergence de
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n + n^2}.$$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a $\frac{n}{4^n+n^2} \leq \frac{n}{4^n}$. Par ailleurs,
$$\lim_n \left| \frac{(n+1)}{4^{n+1}} \frac{4^n}{n} \right| = \lim_n \frac{(n+1)}{4n} = \frac{1}{4}$$
donc par le critère de d'Alembert, la série $\sum_n \frac{n}{4^n}$ converge et donc par comparaison, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n+n^2}$ converge.

(iv) Étudions la convergence de
$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n^2) \sin\left(\frac{1}{2^n}\right).$$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a que
$$0 \leq \left| \cos(n^2) \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \right| \leq \left| \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \right| \leq \frac{1}{2^n},$$
donc on a que
$$0 \leq \sum_{n=0}^{N} \left| \cos(n^2) \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \right| \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \leq 2,$$
donc la série est absolument convergente et donc convergente.

Exercice 4.

Identifions les trois réels α, β et μ tels que pour tout entier $n \geq 3$:
$$\frac{n^3}{n!} = \frac{\alpha}{(n-1)!} + \frac{\beta}{(n-2)!} + \frac{\mu}{(n-3)!}.$$
On a
$$\frac{\alpha}{(n-1)!} + \frac{\beta}{(n-2)!} + \frac{\mu}{(n-3)!} = \frac{n\alpha + n(n-1)\beta + n(n-1)(n-2)\mu}{n!} = \frac{\mu n^3 + (\beta - 3\mu)n^2 + (\alpha - \beta + 2\mu)n}{n!}.$$
Par identification des coefficients du polynôme en n au numérateur, on a que α, β et μ vérifient donc le système suivant :
$$\begin{cases} \mu = 1 \\ \beta - 3\mu = 0 \\ \alpha - \beta + 2\mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \\ \mu = 1 \end{cases}$$
Ainsi, si $n \geq 3$,
$$\frac{n^3}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!}.$$

Considérons maintenant les sommes partielles $S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{n^3}{n!}$, avec $p \geq 3$. Par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{n^3}{n!} &= \sum_{n=1}^{2} \frac{n^3}{n!} + \sum_{n=3}^{p} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!} \right) \\
&= \frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \sum_{n=3}^{p} \frac{1}{(n-1)!} + 3 \sum_{n=3}^{p} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{p} \frac{1}{(n-3)!} \\
&= 1 + 4 + \sum_{n=2}^{p-1} \frac{1}{n!} + 3 \sum_{n=1}^{p-2} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} \\
&= 5 + \sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{(p-2)!} + \frac{1}{(p-1)!} + 3 \Big(\sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} + \frac{1}{(p-2)!} \Big) + \sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} \\
&= 5 \sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} + \frac{4}{(p-2)!} + \frac{1}{(p-1)!}.
\end{aligned}$$

En passant à la limite, nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = \lim_{p \to \infty} S_p = 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 5e.$$

Exercice 5.

1. On a que $\sup\{a_k \; ; \; n \leq k\} + \sup\{b_k \; ; \; n \leq k\} \geq \sup\{a_k + b_k \; ; \; n \leq k\}$. Le résultat s'obtient en prenant la limite $n \to \infty$ de cette inégalité. Preuve de la première inégalité: notons $\alpha = \sup\{a_k \; ; \; n \leq k\}$, $\beta = \sup\{b_k \; ; \; n \leq k\}$ et $\gamma = \sup\{a_k + b_k \; ; \; n \leq k\}$. Soit $\epsilon > 0$. Alors par la caractérisation analytique du sup, on a $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\gamma - \epsilon \leq a_{k_0} + b_{k_0}$. Par ailleurs on a $a_{k_0} \leq \alpha$ et $b_{k_0} \leq \beta$, et donc en combinant ces inégalités, on a $\gamma - \epsilon \leq \alpha + \beta$. Ainsi on a montré, $\forall \epsilon > 0$, $\alpha + \beta - \gamma \geq -\epsilon$. Ceci implique $\alpha + \beta - \gamma \geq 0$ (raisonner par l'absurde). On a donc montré $\gamma \leq \alpha + \beta$ ce qui l'inégalité voulue.

2. À cause du point précédent, qui se généralise par récurrence au cas de sommes finies, on ne peut pas obtenir cette propriété avec une famille *finie* de suites. On peut considérer la famille infinie:

$$a_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

   et alors on a que $\limsup_n \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,n} = 1$, et $\sum_{j=1}^{\infty} \limsup_n a_{j,n} = 0$.

3. Soient (a_n) et (b_n) les suites récurrentes de période 4 suivantes :

$$(a_n) : 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \ldots$$

$$(b_n) : 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \ldots$$

   Alors, on a $\liminf_n a_n + \liminf_n b_n = 0$, $\liminf_n (a_n + b_n) = 1$, $\liminf_n a_n + \limsup_n b_n = 2$, $\limsup_n (a_n + b_n) = 3$, et $\limsup_n a_n + \limsup_n b_n = 4$.

Exercice 6.

1. Puisque les termes généraux des deux séries sont positifs, il suffit de démontrer que les sommes partielles d'une des séries sont majorées si et seulement si les sommes partielles de l'autre le sont. Le point clé est l'encadrement suivant :

$$2^k u_{2^{k+1}} \leq (2^{k+1} - 2^k) u_{2^{k+1}-1} \leq u_{2^k} + \cdots + u_{2^{k+1}-1} \leq (2^{k+1} - 2^k) u_{2^k} \leq 2^k u_{2^k}.$$

Ainsi, supposons que $\sum_k 2^k u_{2^k}$ est convergente, et soit M tel que, pour tout K, on a $\sum_{k=0}^K 2^k u_{2^k} \leq M$. Alors, considérons N un entier et fixons K tel que $N \leq 2^{K+1} - 1$. On a

$$\sum_{n=1}^N u_n \leq \sum_{n=1}^{2^{K+1}-1} u_n \leq \sum_{k=0}^K \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} u_j \leq \sum_{k=0}^K 2^k u_{2^k} \leq M.$$

On en conclut que $\sum_n u_n$ est convergente.

Réciproquement, supposons que $\sum_n u_n$ est convergente, et soit M tel que, pour tout N, on a $\sum_{n=1}^N u_n \leq M$. Alors, pour tout entier K, on a

$$\sum_{k=0}^K 2^k u_{2^k} = u_1 + \sum_{k=0}^{K-1} 2^{k+1} u_{2^{k+1}} \leq u_1 + 2 \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} u_j \leq u_1 + 2 \sum_{n=1}^{2^K} u_n \leq u_1 + 2M.$$

Ainsi, la série $\sum_n 2^n u_{2^n}$ est convergente.

2. La série de Riemann

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

a même comportement que sa “série condensée”

$$\sum_{k\geq 0} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k\geq 0} (2^{1-\alpha})^k.$$

Cette dernière est une série géométrique, qui converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3. La série de Bertrand

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$$

converge si et seulement si sa “série condensée”

$$\sum_{k\geq 1} 2^k \frac{1}{2^k(\log(2^k))^\alpha} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k\log 2)^\alpha}$$

converge, c’est-à-dire (d’après l’étude de la série de Riemann) ssi $\alpha > 1$;

Remarque Par un argument similaire, il en est de même pour la série

$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n\log n(\log\log n)^\alpha},$$

et on peut ainsi de suite étudier le comportement des séries avec de plus en plus de logarithmes emboîtés au dénominateur.