

Corrigé 4.2 – jeudi 3 octobre 2024

Exercice 1.

- Montrons que la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ donnée par $x_0 = 0, x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n > 0$ est de Cauchy.
 On a, pour $n, m \geq 1$:

$$|x_{n+m} - x_n| = \left| \frac{(-1)^{n+m}}{n+m} - \frac{(-1)^n}{n} \right| = \left| \frac{(-1)^m}{n+m} - \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{n(-1)^m - (n+m)}{(n+m)n} \right|$$

et donc

$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{m+2n}{(n+m)n} = \frac{1}{n+n^2/m} + \frac{2}{n+m} \leq \frac{3}{n},$$

ce qui montre que la suite est de Cauchy. En effet, pour $\epsilon > 0$ donné, on choisit un entier N tel que $N \geq \frac{3}{\epsilon}$ et on vérifie que $|x_p - x_q| < \epsilon$ si $p, q > N$.

- Montrons que la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ donnée par $x_n = (-1)^n, n \geq 0$ n'est pas de Cauchy, i.e. :

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N}, \exists m, n \geq N \text{ tel que } |x_n - x_m| > \epsilon.$$

Il suffit de prendre $\epsilon = 1$ et $n = N, m = N + 1$ pour avoir $|x_m - x_n| = 2 > 1$.

- Montrons que la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ donnée récursivement par $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{x_n+2}, n \geq 0, x_0 = 1$ est de Cauchy et calculons sa limite.
 Pour $n > 0$, on a, puisque $x_n > 0, \forall n$ (par récurrence immédiate):

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{x_n+1}{x_n+2} - \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-1}+2} \right| = \left| \frac{(x_n+1)(x_{n-1}+2) - (x_{n-1}+1)(x_n+2)}{(x_n+2)(x_{n-1}+2)} \right| = \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{(x_n+2)(x_{n-1}+2)} \right|$$

et donc, par récurrence immédiate,

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{2^n} |x_1 - x_0|.$$

Par conséquent :

$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{1}{2^n} |x_1 - x_0| \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} \right) \leq \frac{1}{2^{n-1}} |x_1 - x_0|,$$

ce qui montre que la suite est de Cauchy. Sa limite x vérifie $x = \frac{x+1}{x+2}$, ou encore $x^2 + x - 1 = 0$ et donc, comme par ailleurs $x \geq 0$,

$$x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}).$$

- On considère la suite donnée par 8, 8.8, 8.88, 8.888, 8.8888, ... dont le terme général est $x_n = 8 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{10}\right)^k, n \geq 0$. Le terme général de cette suite est $x_n = 8 \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{80}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right)$ et donc cette suite converge vers $\frac{80}{9} = 9 - 1/9$.

Exercice 2.

Considérons la suite (a_n) définie par $a_n = \ln(n)$. On a $\lim_n a_n = \infty$, mais $\forall p \in \mathbb{N}, \lim_n (a_{n+p} - a_n) = \lim_n \ln(1 + \frac{p}{n}) = 0$. La réponse est donc non. (Prendre le temps de comprendre pourquoi la propriété étudiée ici est plus faible que la propriété de Cauchy.)

Exercice 3.

Considérons la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ est donnée par

$$x_0 = 0, \quad x_{\frac{q(q-1)}{2}+p} = \frac{p}{q},$$

pour $1 \leq p \leq q, \quad q = 1, 2, \dots$

1. En prenant successivement $q = 1, p = 1$ puis $q = 2$ avec $p = 1, 2, q = 3$ avec $p = 1, 2, 3, \dots$ etc, la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ s'écrit :

$$0, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$$

Pour justifier que cette définition est bien valide ("bien définie"), il faut montrer que chaque entier $n \geq 1$ peut s'écrire comme $n = q(q-1)/2 + p$ pour un choix d'entiers $1 \leq p \leq q$ et que de plus ce choix est unique. Puisque $q(q-1)/2 + p = p + 1 + 2 + \dots + q - 1$ (avec le cas particulier $p + 0$ si $q = 1$), on voit que cette écriture n'est rien d'autre que l'expression de n comme la somme de plus grand nombre d'entiers consécutifs possible sans atteindre n (donc $1 + \dots + q - 1 < n$) plus un reste (qui est donc $1 \leq p \leq q$).

2. Points d'accumulation de la suite :

- Soit $\lambda \in \mathbb{Q} \cap]0, 1]$. Alors, il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \leq q$ et $\lambda = \frac{p}{q}$. Si $k = 1, 2, 3, \dots$, posons

$$m_k = \frac{kq(kq-1)}{2} + kp.$$

Par définition de la suite, nous obtenons

$$x_{m_k} = \frac{kp}{kq} = \lambda.$$

Ainsi, la sous-suite $(x_{m_k})_{k=1}^\infty$ de la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ est constante égale à λ et donc converge (trivialement) vers λ , ce qui prouve que λ est un point d'accumulation de (x_n) .

- Si on pose

$$m_q = \frac{q(q-1)}{2} + 1$$

où $q = 1, 2, \dots$, on obtient $x_{m_q} = \frac{1}{q}$ et la sous-suite $(x_{m_q})_{q=1}^\infty$ de la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ converge vers $\lambda = 0$ ce qui montre que $\lambda = 0$ est un point d'accumulation.

Conclusion 1: L'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est un ensemble de points d'accumulation de la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$.

- Soit $\lambda \in]0, 1]$. Si $\lambda \in \mathbb{Q}$, alors on a vu que λ est un point d'accumulation de la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$. Si $\lambda \notin \mathbb{Q}$, alors par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ il existe deux suites d'entiers $(p_k)_{k=1}^\infty$ et $(q_k)_{k=1}^\infty$ tels que $1 \leq p_k \leq q_k$ et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k} = \lambda.$$

(il s'agit d'une conséquence de la propriété de densité telle que vue en cours). Posons

$$m_k = \frac{kq_k(kq_k-1)}{2} + kp_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

On a donc

$$x_{m_k} = \frac{p_k}{q_k}.$$

La suite des entiers $(m_k)_{k=1}^\infty$ ainsi construite n'est pas nécessairement strictement croissante, mais elle tend vers l'infini lorsque k tend vers l'infini (une autre approche serait de poser $m_k = \frac{q_k(q_k-1)}{2} + p_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ directement, et d'utiliser le dernier exercice de la série pour argumenter que $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = +\infty$). Ainsi, on peut extraire une sous-suite $(m_{k_j})_{j=1}^\infty$ qui est strictement croissante et qui tend vers l'infini lorsque j tend vers l'infini. Ainsi donc, $(x_{m_{k_j}})_{j=1}^\infty$ est une sous-suite de $(x_n)_{n=0}^\infty$ qui converge vers λ puisque $x_{m_k} = \frac{p_k}{q_k}$, ce qui prouve que λ est un point d'accumulation de la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$.

Conclusion 2: L'ensemble des points d'accumulation de la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ est donné par l'intervalle fermé $[0, 1]$.

Exercice 4.

On a que

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n) \quad b_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \quad c_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n - b_n).$$

Si on définit la suite $\Delta_n = \max\{|a_n - b_n|, |b_n - c_n|, |c_n - a_n|\}$, on a que $\Delta_{n+1} = \frac{1}{2}\Delta_n$ et donc $\Delta_n = \frac{\Delta_0}{2^n} \rightarrow 0$.

Maintenant, on voit que $\max\{|a_{n+1} - a_n|, |b_{n+1} - b_n|, |c_{n+1} - c_n|\} = \frac{1}{2}\Delta_n$, et donc pour $n > m \geq 1$, on a que $|a_n - a_m|, |b_n - b_m|, |c_n - c_m|$ sont tous inférieurs à

$$\left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) \Delta_0 \leq \frac{\Delta_0}{2^{m-1}}.$$

Cela prouve que les trois suites sont de Cauchy, donc elles convergent. Puisque nous avons que $\Delta_n \rightarrow 0$, les trois suites doivent avoir la même limite ℓ . On a que $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n = \cdots = a_0 + b_0 + c_0$, et donc $3\ell = \lim_n a_n + b_n + c_n = a_0 + b_0 + c_0 \Rightarrow \ell = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{3}$.

Exercice 5.

On suppose (pour obtenir une contradiction) que $\lim_n a_n \neq \infty$. Alors il existe une sous-suite (a_{n_k}) bornée. Alors la suite (a_{n_k}) est bornée parce que $\{a_{n_k} ; k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, mais on a $\lim_k a_{n_k} = \lim_k n_k^4 = \infty$, donc on abouti à une contradiction. Ainsi, $\lim_n a_n = \infty$.

Exercice 6.

Raisonnons par l'absurde et supposons

$$q_n \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Il existe $A \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N \text{ et } q_n < A).$$

Il en résulte l'existence d'une extractrice $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, q_{\sigma(k)} < A.$$

Mais $[1, A[\cap \mathbb{N}^*$ est fini ; on en déduit qu'il existe une extractrice $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite $(q_{\tau(\sigma(k))})_{k \in \mathbb{N}}$ soit constante. Notons q cette constante et notons $(u_n) = (\frac{p_n}{q_n})$.

On a :

$$p_{\tau \circ \sigma(k)} = u_{\tau \circ \sigma(k)} q_{\tau \circ \sigma(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} xq.$$

La suite $(p_{\tau \circ \sigma(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est à termes dans $\mathbb{Z}$ et converge, donc est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang). Il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, (k \geq k_0 \implies p_{\tau \circ \sigma(k)} = xq).$$

Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, (k \geq k_0 \implies u_{\tau \circ \sigma(k)} = x),$$

donc $x \in \mathbb{Q}$, contradiction.

Ceci montre : $q_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

Comme $(\forall n \in \mathbb{N}, p_n = q_n u_n)$ et que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \in \mathbb{R}^*$, on en déduit $|p_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.