Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Corrigé 4.1 – mardi 1 octobre 2024

Exercice 1.

(i) Supposons $a = 1$. Alors (u_n) est une suite arithmétique, son terme général est donné par $u_n = n \cdot b + u_0$ (récurrence immédiate) et on a, par une étude immédiate que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} u_0 & \text{si } b = 0, \\ +\infty & \text{si } b > 0, \\ -\infty & \text{si } b < 0. \end{cases}$$

(ii) Supposons $a \neq 1$ et $b = 0$. Alors (u_n) est une suite géométrique, son terme général est donné par $u_n = a^n \cdot u_0$ (récurrence immédiate). Ignorons pour l'instant le facteur u_0 et étudions le comportement de $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (il est aisé d'en déduire le comportement de (u_n) ensuite).

(a) Supposons $a \in]1; +\infty[$.
Alors il existe $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r = 1 + h$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k \geq 1 + nh$, en utilisant la formule du binôme de Newton. Il est clair que $nh \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, on déduit que $a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(b) Supposons $|a| < 1$ et $a \neq 0$ (le cas $a = 0$ est évident). On a :

$$|a| < 1 \implies \frac{1}{|a|} > 1 \implies \left(\frac{1}{|a|}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \implies |a|^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(c) Finalement, si $a < -1$ alors $(|a|^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc (a^n) n'est pas bornée donc diverge. Par ailleurs, elle est de signe alterné donc elle ne tend pas vers $+\infty$ ou $-\infty$. Le cas $a = -1$ diverge, par étude immédiate.

(iii) Supposons $a \neq 1$. En posant $v_n = u_n + \frac{b}{a-1}$, on a $v_{n+1} = a \cdot v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison a. Comme (u_n) converge ssi (v_n) converge, on déduit que (u_n) converge ssi $|a| < 1$ ou $0 = v_0 = u_0 + b/(a-1)$, et dans ce cas sa limite vaut $-b/(a-1)$. Dans tous les autres cas, la suite diverge. Par ailleurs on a, si $a > 1$, que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < v_0 = u_0 + b/(a-1), \\ -\infty & \text{si } 0 > v_0 = u_0 + b/(a-1). \end{cases}$$

Exercice 2.

Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ pour $n \in \mathbb{N}$. D'abord remarquons que

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k}.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0.$$

Donc (u_n) est (strictement) croissante. D'autre part, $u_n \leq n \cdot \frac{1}{n+1} \leq 1$ donc (u_n) est majorée. On conclut par le théorème du cours que (u_n) converge (on pourra montrer en fin de semestre que la limite vaut $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log(2)$ en l'interprétant comme somme de Riemann).

Exercice 3.

1) *(Convergence)* Montrons par récurrence que la suite est minorée par 1 et décroissante, i.e

$$1 < x_{n+1} < x_n < x_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Pour $n = 1$, on a

$$x_0 = 3 > x_1 = 2 > x_2 = \sqrt[3]{2+3} > 1.$$

b) On suppose maintenant l'hypothèse vraie jusqu'à $n \in \mathbb{N}^*$ et on va montrer qu'elle est vraie pour $n+1$. On a donc

$$1 < x_{k+1} < x_k < x_{k-1}, \quad \forall k = 1, \ldots, n,$$

et on veut montrer que

$$1 < x_{n+2} < x_{n+1} < x_n.$$

Comme la fonction $\sqrt[3]{x}$ est strictement croissante, on a bien par l'hypothèse de récurrence que

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + x_{n-1}} > \sqrt[3]{x_{n+1} + x_n} = x_{n+2}.$$

De plus, comme x_n et x_{n+1} sont plus grands que 1, on a

$$x_{n+2} = \sqrt[3]{x_{n+1} + x_n} > 1.$$

Ainsi la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est minorée et décroissante, donc convergente.

2) *(Limite)* Si $x \in \mathbb{R}$ est la limite de la suite, alors x vérifie alors l'équation

$$x^3 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Mais comme $x_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a finalement que $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

Exercice 4.

Tout d'abord, on remarque que $0 \leq x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ce qui montre en utilisant les définitions de lim-sup et lim-inf que $\limsup_{n\to\infty} x_n \leq 1$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n \geq 0$. Ensuite,

- comme $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 1$, on obtient $\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$.
- comme $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{2n}\right) = 0$, on obtient $\liminf_{n\to\infty} x_n = 0$.

Exercice 5.

Soit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 = 0$ et $x_n = \sqrt[n]{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

1. Montrons pour commencer que $\forall \delta > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\delta)^n} = 0$.

   On applique le critère de d'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{(1+\delta)^{n+1}}}{\frac{n}{(1+\delta)^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(1+\delta)^n}{n(1+\delta)^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})}{(1+\delta)} = \frac{1}{(1+\delta)} < 1, \quad \forall \delta > 0,$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\delta)^n} = 0.$$

2. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left|\frac{n}{(1+\delta)^n}\right| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

En particulier en prenant $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left(\left|\frac{n}{(1+\delta)^n}\right| = \frac{n}{(1+\delta)^n} < 1, \quad \forall n > N\right) \iff \left(n < (1+\delta)^n, \quad \forall n > N\right) \iff \left(\sqrt[n]{n} - 1 = |\sqrt[n]{n} - 1| < \delta\right).$$

Comme nous avons commencé avec $\delta > 0$ arbitraire, on a donc prouvé que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Exercice 6.

On suppose :

$$u_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_1, \quad u_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_2, \quad u_{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_3.$$

Considérons la suite $(u_{4n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, qui est extraite à la fois de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, car $4n^2 = 2(2n^2)$, et de la suite $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, car $4n^2 = (2n)^2$.

Comme suite extraite d'une suite convergente, cette suite $(u_{4n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et converge vers ℓ_3, d'où $\ell_1 = \ell_3$.

De même, en considérant la suite $(u_{(2n+1)^2})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est à la fois extraite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient $\ell_2 = \ell_3$.

Ainsi, $u_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $u_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_2 = \ell_1$.

On veut maintenant montrer que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_1.$$

À cette fin, soit $\epsilon > 0$. Alors $\exists K_1, K_2 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k \geq K_1 \implies |u_{2k} - \ell_1| < \epsilon)$ et $(k \geq K_2 \implies |u_{2k+1} - \ell_1| < \epsilon)$. Alors $\forall n \geq \max\{2K_1, 2K_2+1\}$, on a soit $n = 2k$ avec $k \geq K_1$ (si n pair), soit $n = 2k+1$ avec $k \geq K_2$ (si n impair). Dans les deux cas, on donc $|u_n - \ell_1| < \epsilon$.

On a ainsi montré

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_1.$$

et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 7.

Soit (x_n) une suite. On dit qu'un indice n est un *pic* s'il vérifie $x_m < x_n$ pour tout $m > n$. Il y a alors deux cas :

1. ou bien il y a une infinité de pics. Dans ce cas, les x_n correspondants forment une sous-suite (strictement) décroissante ;

2. ou bien il n'y a qu'un nombre fini de pics. On choisit un indice p_0 strictement supérieur à tous les pics, puis un indice $p_1 > p_0$ tel que $x_{p_1} \geq x_{p_0}$ (qui existe car x_{p_1} n'est pas un pic), puis $p_2 > p_1$ tel que $x_{p_2} \geq x_{p_1}$ (qui existe car x_{p_2} n'est pas un pic), etc. On construit ainsi une sous-suite croissante (au sens large).