

Corrigé 3.2 – jeudi 26 septembre 2024

Exercice 1.

Étudions $(\frac{\log(n!)}{5^n})_{n \geq 0}$. On a :

$$\log(n!) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) = \sum_{k=1}^n \log(k).$$

Puisque $\log(k) \leq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\log(n!) \leq \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ainsi :

$$\frac{\log(n!)}{5^n} \leq \frac{n(n+1)}{2 \cdot 5^n} = \frac{n^2}{2 \cdot 5^n} + \frac{n}{2 \cdot 5^n} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

En effet :

- Par le critère de d'Alembert, la suite de terme général $y_n = \frac{n^2}{2 \cdot 5^n}$ converge vers 0 car :

$$\left| \frac{y_{n+1}}{y_n} \right| = \frac{(n+1)^2}{2 \cdot 5^{n+1}} \cdot \frac{2 \cdot 5^n}{n^2} = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \rightarrow \frac{1}{5}.$$

- De même, on montre que la suite $\frac{n}{2 \cdot 5^n}$ converge vers 0.
- Enfin, puisque $0 \leq \frac{\log(n!)}{5^n} \leq \frac{n^2}{2 \cdot 5^n} + \frac{n}{2 \cdot 5^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, par le Thm. d'encadrement/des gendarmes, on conclut que $\frac{\log(n!)}{5^n}$ converge vers 0.

Exercice 2.

1. Soit E un ensemble à n éléments (par exemple $E = \{1, \dots, n\}$). Si $k = 0$ alors la seule partie de E à 0 éléments est $\emptyset$. Le nombre de tels sous-ensembles est donc $1 = \binom{n}{0}$.

Pour $k > 0$, le nombre de façons de choisir une *famille* de k éléments *distincts* de E est $n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ car il y a n choix pour le 1^{er} élément de la famille, $(n-1)$ choix pour le 2^{ème}, et ainsi de suite jusqu'au k ^{ème} élément pour lequel on a $(n-k+1)$ choix (on rappelle que 2 familles contenant les mêmes éléments ordonnés différemment sont considérées distinctes, ce qui n'est pas le cas pour les ensembles).

Or, lorsque l'on énumère les *familles* de k éléments *distincts* de E , chaque partie de E à k éléments apparaît exactement $k(k-1) \dots 1 = k!$ fois, c'est le nombre de façons distinctes d'ordonner k éléments distincts. En conclusion, le nombre de parties à k éléments de E est bien $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

2. Soit E un ensemble à n éléments, par exemple $E = \{1, \dots, n\}$ et soit $a \in E$. Parmi les parties de E de cardinal k , on distingue:
 - celles qui contiennent a ; qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$ car, en plus de a , il reste à choisir $k-1$ éléments de $E \setminus \{a\}$;

- celles qui ne contiennent pas a ; qui sont au nombre de $\binom{n-1}{p}$ car cela revient à choisir p éléments dans $E \setminus \{a\}$.

Comme ces ensembles de parties sont disjoints et que leur union contient toutes les parties de cardinal k dans E , qui sont au nombre de $\binom{n}{k}$, on obtient $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- On développe $(x+y)^n = (x+y) \cdot (x+y) \cdots (x+y)$. Chaque terme du produit s'obtient en prenant un facteur dans chaque parenthèse, soit x soit y . S'il y a k facteurs x , il y a $n-k$ facteurs y . Donc chaque terme est de la forme $x^k \cdot y^{n-k}$, où $0 \leq k \leq n$.
- Pour k fixé, il y a autant de termes de la forme $a^k b^{n-k}$ qu'il y a de façons de choisir les k parenthèses où l'on prend les facteurs x , c'est à dire $\binom{n}{k}$.

Comme k peut varier de 0 à n , ce qui précède montre que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Exercice 3.

1. En appliquant la formule du binôme de Newton avec $x = 1$ et $y = \frac{1}{n}$, on obtient :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)! n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \underbrace{\left(1 - \frac{i}{n}\right)}_{\leq 1} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

où l'on a utilisé $\frac{n!}{(n-k)! n^k} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}$ et on utilise la convention que $\prod_{i=0}^{-1} (\dots) = 1$ (un produit vide est remplacé par l'élément neutre pour la multiplication).

2. Pour tout $k \geq 1$, on a $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \leq 2$, on en déduit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3,$$

ce qui prouve que la suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ est bornée.

3. Montrons que $(x_n)_{n=1}^\infty$ est croissante. En reprenant l'expression de $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ développée par le binôme de Newton, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) = x_{n+1}$$

Ainsi, $x_n < x_{n+1}$ (la suite est en fait *strictement* croissante). La suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ est donc croissante et bornée par 3 donc elle converge vers une limite inférieure (ou égale) à 3. De plus, pour $n = 2$, on a $x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$. Comme (x_n) est croissante, on conclut donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 2$.

Exercice 4.

1. Montrons que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^\infty$ converge vers α , où $\alpha = \inf \left\{ \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots \right\}$. Avant cela, on observe que pour $p, q, r \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$x_{pq+r} \leq x_{pq} + x_r \leq x_q + x_{(p-1)q} + x_r \leq \cdots \leq p x_q + x_r.$$

Soit $\epsilon > 0$. Par la propriété de l'inf, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha \leq \frac{x_q}{q} < \alpha + \frac{\epsilon}{2}$. On prend un entier $N > q$ tel que $N > 2 \max\{x_r : r = 0, \dots, q-1\}/\epsilon$. On a alors, pour $n > N$:

$$\alpha \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{p x_q + x_r}{n} = \frac{p x_q}{pq+r} + \frac{x_r}{n} \leq \frac{x_q}{q} + \frac{x_r}{N} < \alpha + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \alpha + \epsilon.$$

où on a écrit n de la forme $n = pq + r$, avec $0 \leq r < q$. Ceci prouve la convergence de la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^\infty$ vers α .

2. Si on définit la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ par $x_n = 0$ si n est pair et $x_n = 1$ si n est impair, la suite est trivialement sous-additive ($x_n + x_m = 0$ si et seulement si n et m sont pairs et alors, $n + m$ est aussi pair) et $(\frac{x_n}{n})_{n=1}^{\infty}$ n'est pas monotone.