

Corrigé 3.1 – mardi 24 septembre 2024

Exercice 0.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors (en prenant $\epsilon = 1$ dans la définition de convergence), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq 1$, et donc $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq 1 + |\ell|$. En posant

$$C = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|\}$$

on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq C$, ce qui montre que l'ensemble $\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est borné (caractérisation des ensembles bornés vue en cours), et donc que la suite (u_n) est bornée.

Exercice 1.

1. La suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge si et seulement si

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N, \text{ et } |x_n - \ell| > \epsilon).$$

2. Montrons que $(\cos(n))_{n \geq 0}$ diverge. Par l'absurde, supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n) = \ell \in \mathbb{R}$.

- (a) D'abord faisons une remarque d'ordre général (*très utile!*): si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite $(x_n)_{n \geq -k}$ définie par $x_n = u_{n+k}$, $\forall n \geq -k$ converge aussi vers $\ell \in \mathbb{R}$. En effet, soit $\epsilon > 0$. Alors $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| < \epsilon$ donc $\forall n \geq N - k$, $|x_n - \ell| = |u_{n+k} - \ell| < \epsilon$. Ceci montre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$.

- (b) Pour $n \geq 0$, on a:

$$\cos(n+2) = \cos(n) - 2 \sin(1) \sin(n+1).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n+2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n) = \ell$ et $\sin(1) \neq 0$, on a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n) = 0$ (par les propriétés algébriques des limites).

- (c) De même, on a:

$$\sin(n+2) = \sin(n) + 2 \sin(1) \cos(n+1)$$

et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n) = 0$.

Mais comme $\sin^2(n) + \cos^2(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient une contradiction ($0 = 1$) en passant à la limite (en utilisant les propriétés algébriques). Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n)$ n'existe pas.

Exercice 2.

Montrons que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{2} \sin(2x_n) \right), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

est convergente et calculons sa limite. Pour cela, on va montrer que la suite est décroissante et minorée.

1. *Minoration*: Montrons par induction que $x_n > 0$, $\forall n \geq 0$:

- Pour $n = 0$, on a $x_0 = 1 > 0$.
- Supposons que $x_n > 0$, pour $n = 0, 1, \dots, N$, et montrons que $x_{N+1} > 0$.

$$x_{N+1} = \frac{1}{2} \left(x_N + \frac{1}{2} \sin(2x_N) \right) = \frac{1}{4} (2x_N + \sin(2x_N)) \geq \frac{1}{4} (2x_N - |\sin(2x_N)|).$$

Puisque $\forall t > 0$, $|\sin t| < t$, et que par hypothèse d'induction $x_N > 0$, on a bien $x_{N+1} > 0$.

La suite est donc bornée inférieurement par zéro.

2. *Décroissance*: On voit facilement que

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}\sin(2x_n) \leq \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4} \cdot 2x_n = x_n.$$

La suite est donc décroissante. Ainsi, il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

3. *Limite*: Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2x_n) = \sin(2x)$, on a

$$x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sin(2x) \Rightarrow 2x = \sin(2x),$$

d'où on obtient $x = 0$.

Conclusion : La limite de la suite est 0.

Exercice 3.

Théorème. Soient $(x_n)_{n=0}^\infty$ une suite croissante et $(y_n)_{n=0}^\infty$ une suite décroissante telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$. Alors :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq y_n \leq y_{n-1} \leq \dots \leq y_0$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Démonstration :

1. Posons $z_n = x_n - y_n$. On a pour $n \geq 1$:

$$z_n - z_{n-1} = (x_n - y_n) + (y_{n-1} - x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) + (y_{n-1} - y_n) \geq 0.$$

Ainsi, $z_n \geq z_{n-1}$, et la suite $(z_n)_{n=0}^\infty$ est croissante. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, on a $z_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (une suite croissante et majorée converge vers la borne supérieure de ses termes), et donc $x_n \leq y_n$.

2. Clairement, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée, donc elle converge vers x . La suite $(y_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée, donc elle converge vers y . De plus, on a :

$$|x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y_n| + |y_n - y|,$$

et comme $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, on a en passant à la limite $|x - y| \leq 0$ et donc $x = y$.

Exercice 4.

1. Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; puisque $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n > N_1 \implies |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 + 1$. On a, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|v_n - l| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - l) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k - l| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - l| + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^n |u_k - l|. \quad (1)$$

D'une part,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^n |u_k - l| \leq \frac{(n - N_1)}{n} \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

D'autre part, comme $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - l| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N_2 \implies \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - l| \leq \frac{\epsilon}{2} \right).$$

En notant $N = \max(N_1, N_2)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies |v_n - l| \leq \epsilon),$$

c'est-à-dire $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$.

Remarque: ici la rédaction est complète, mais pour ce genre d'exercice plus difficiles, on pourra à l'avenir se contenter d'une rédaction moins détaillée qui donne les grandes lignes du raisonnement – en insistant sur les étapes clés (ici la décomposition (1) après avoir fixé ϵ) –, sans nécessairement complètement détailler les parties plus “routinières”. Bien entendu faire l'inverse – c'est-à-dire détailler les parties routinières et passer rapidement et vaguement sur les étapes clés – est tout à fait contre-indiqué! Savoir quoi mettre ou ne pas mettre comme détails de preuve est un art sans règles précises qui s'apprend en lisant et en rédigeant des mathématiques.

2. La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ est divergente et cependant $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$, puisque

$$\begin{cases} v_n = 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ v_n = -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$