

Corrigé 13.1 – mardi 10 décembre 2024

Exercice 1.

Soit $a > 0$. Montrer que si $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire et intégrable, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Si l'on suppose que la fonction f est continue. Définissons la fonction $g : x \mapsto f(-x)$ sur $[-a, a]$. Comme f est impaire, on a $g = -f$. Comme f est intégrable, par linéarité de l'intégrale, on a que g est intégrable et

$$\int_{-a}^a f(x)dx = - \int_{-a}^a g(x)dx = - \int_{-a}^a f(-x)dx = - \int_a^{-a} f(u)(-du) = \int_a^{-a} f(u)du = - \int_{-a}^a f(u)du$$

où l'on a utilisé le changement de variable $u = -x$. On a donc obtenu $2 \int_{-a}^a f(x)dx = 0$ ce qui montre $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Si la fonction f est seulement supposée intégrable. Alors il faut revenir aux sommes de Darboux supérieures et inférieures, car le thm. du changement de variable vu en cours requiert la continuité. La preuve qui suit a été adaptée d'une preuve par Girardo Alegre.

Pour $\sigma = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = a\}$ une subdivision quelconque de $[0, a]$, on note $-\sigma = \{-x_n < \dots < -x_0\}$ la subdivision de $[-a, 0]$ qui est symétrique par rapport à 0 (on remarque que toute subdivision de $[-a, 0]$ peut s'exprimer sous cette forme). L'imparité de f implique

$$\begin{aligned} M_i^- &:= \sup_{x \in [-x_i, -x_{i-1}]} f(x) = \sup_{-x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \\ &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(-x) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} -f(x) = - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) =: -m_i^+. \end{aligned}$$

On en déduit que pour toute subdivision σ de $[0, a]$,

$$\overline{S}_{-\sigma}(f|_{[-a, 0]}) = \sum_{k=1}^n M_k^-(-x_{i-1} - (-x_i)) = - \sum_{k=1}^n m_k^+(x_i - x_{i-1}) = - \underline{S}_{\sigma}(f|_{[0, a]}).$$

Comme f est supposée intégrable sur $[-a, a]$ (et donc intégrable sur $[-a, 0]$ et $[0, a]$ séparément), il s'ensuit

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \inf_{\sigma} \overline{S}_{-\sigma}(f|_{[-a, 0]}) = \inf_{\sigma} - \underline{S}_{\sigma}(f|_{[0, a]}) = - \sup_{\sigma} \underline{S}_{\sigma}(f|_{[0, a]}) = - \int_0^a f(x)dx.$$

Ainsi, on a $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0$.

Remarque: En fait, la formule de changement de variables reste valide quand on suppose juste l'intégrabilité de f , mais est plus délicate à montrer (il faut introduire l'intégrale de Stieltjes), et il y a une condition de monotonie sur le changement de variable. Voici ci-dessous l'énoncé, copié du livre "Analysis 1" de Terence Tao (une référence que je conseille pour ceux qui veulent aller un peu plus loin autour des thèmes de ce cours). Le cas *monotone decreasing*; utilisé dans l'approche ci-dessus se démontre aussi.

Proposition 11.10.7 (Change of variables formula III). *Let $[a, b]$ be a closed interval, and let $\phi : [a, b] \rightarrow [\phi(a), \phi(b)]$ be a differentiable monotone increasing function such that ϕ' is Riemann integrable. Let $f : [\phi(a), \phi(b)] \rightarrow \mathbf{R}$ be a Riemann integrable function on $[\phi(a), \phi(b)]$. Then $(f \circ \phi)\phi' : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ is Riemann integrable on $[a, b]$, and*

$$\int_{[a, b]} (f \circ \phi)\phi' = \int_{[\phi(a), \phi(b)]} f.$$

Exercice 2.

1. Puisque $x \geq x^2$ sur $[0, 1]$, l'aire entre ces deux fonctions s'obtient comme:

$$\int_0^1 x \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - 0 \right) - \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

2. Un exemple de disque de rayon r est donné par l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq r^2\} = D_+ \cup D_-$ où D_+ (resp. D_-) est le sous ensemble de D qui satisfait $y \geq 0$ (resp. $y \leq 0$). Comme l'intersection de D_+ et D_- est d'aire nulle, on a $\text{Aire}(D) = \text{Aire}(D_+) + \text{Aire}(D_-)$. Par ailleurs, comme $D_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; -r \leq x \leq r \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$, on a

$$\begin{aligned} \text{Aire}(D_+) &= \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \\ &= r \int_{-r}^r \sqrt{1 - (x/r)^2} \, dx \\ &= r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)^2 \, du \\ &= \frac{r^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(2u) + 1) \, du \\ &= \frac{r^2}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2u) + u \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{r^2}{2} \pi \end{aligned}$$

où l'on a posé le changement de variable $x = r \sin(u)$ et $dx = r \cos(u) du$. Ainsi, comme on peut calculer de manière analogue que $\text{Aire}(D_-)$ est la même, on a $\text{Aire}(D) = \frac{r^2}{2} \pi + \frac{r^2}{2} \pi = \pi r^2$.

Exercice 3.

Nous utilisons d'abord quelques résultats du cours comme suit:

Comme toute fonction continue est intégrable, f est intégrable sur $[1, 2]$. Sur $[0, 1]$, la fonction coïncide avec une fonction continue modifiée en un unique point, et donc f est intégrable sur $[0, 1]$. Il suit par un résultat du cours que f est intégrable sur $[0, 2]$.

Si $x < 1$, nous avons $F(x) = 0$. En utilisant à nouveau que l'intégrale n'est pas affectée si on change f en un point, on a encore $F(1) = 0$. Pour $x > 1$, nous avons

$$F(x) = \int_0^x f = \int_0^1 0 \, dt + \int_1^x 1 \, dt = 0 + [t]_{t=1}^x = x - 1.$$

Est-ce que f admet une primitive? Nous voyons en particulier que F est continue mais non dérivable. Attention, ce dernier point n'est pas à proprement parler une preuve du fait que f n'admette pas une primitive (qui pourrait être une autre fonction). En revanche, le théorème de continuité de la dérivée montre qu'une dérivée ne peut pas avoir une limite (à gauche) en 1 sans être continue (à gauche) en 1. Donc f n'admet pas de primitive.

Exercice 4.

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{1+t}$. Cette fonction f est continue (donc intégrable) et décroissante. En choisissant la suite de subdivisions $\sigma_n = \{t_j = \frac{j}{n} ; j \in \{0, \dots, n\}\}$, dont la suite des pas tend vers 0 (c'est à dire que l'on a $\sup_{j \in \{1, \dots, n\}} t_j - t_{j-1} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$), on a

$$S_{\sigma_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = x_n.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_{\sigma_n} = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \log 2.$$

2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^2$. Alors f est continue (donc intégrable) et croissante et en procédant de la même manière que précédemment, on a

$$\bar{S}_{\sigma_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} = x_n$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_{\sigma_n} = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Remarque: dans ce genre d'exercices faisant le lien entre intégrales et suites ou séries, il est souvent bénéfique de faire un schéma pour visualiser si l'on a affaire à une somme de Darboux supérieure ou inférieure (ou bien quelque chose entre les deux, ou bien juste une inégalité, etc).

Exercice 5.

1. Calculer $I = \int_0^1 e^{-2x} \cos(2\pi x) dx$.

On a, avec 2 intégrations par parties successives:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 e^{-2x} \cos(2\pi x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} e^{-2x} \sin(2\pi x) \right]_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{-2x} \sin(2\pi x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{1}{2\pi} e^{-2x} \cos(2\pi x) \right]_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{-2x} \cos(2\pi x) dx \right) \\ &= \frac{-e^{-2}}{2\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} I \end{aligned}$$

d'où, en isolant I d'un côté de l'équation:

$$I = \frac{1 - e^{-2}}{2(1 + \pi^2)}.$$

2. Calculer $\int_0^{\pi/3} \cos^5(x) \sin(x) dx$.

En remarquant que la dérivée de $\cos^6$ est $-6 \cos^5 \cdot \sin$, on a:

$$\int_0^{\pi/3} \cos^5(x) \sin(x) dx = -\frac{1}{6} [\cos^6(x)]_0^{\pi/3} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2^6} \right) = \frac{21}{128}.$$

3. Calculer $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)} dx$.

En se rappelant que la dérivée de $\tan$ est $\frac{1}{\cos^2}$, on procède par intégration par parties:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)} dx = [x \tan x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan(x) dx = \frac{\pi}{4} + [\log \cos x]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

4. On pose $x^2 = y$, $2x dx = dy$ et donc

$$\int_0^b x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{b^2} \sin y dy = -\frac{1}{2} [\cos y]_0^{b^2} = -\frac{1}{2} \cos b^2 + \frac{1}{2}.$$

Exercice 6.

Choisissons $a > 0$. On écrit $t \log \sqrt{t} = \frac{1}{2} t \log(t)$ et on intègre par parties:

$$\int_a^x t \log(t) dt = \left[\frac{t^2}{2} \log(t) \right]_a^x - \int_a^x \frac{1}{t} \frac{t^2}{2} dt = \left[\frac{t^2}{4} (2 \log(t) - 1) \right]_a^x$$

et donc une primitive est $x \mapsto \frac{x^2}{8} (2 \log x - 1)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7.

On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$y_n = \int_1^n \left(\frac{1}{[x+1]} - \frac{1}{x} \right) dx \leq 0$$

où $[x]$ dénote la partie entière de x , soit le plus grand entier qui est plus petit ou égal à x . On a

$$y_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{[x+1]} \right) - \log n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right) - \log n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \log n = x_n - 1.$$

Pour $x \in [k, k+1[$, on a

$$\frac{1}{[x+1]} - \frac{1}{x} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+t}$$

avec $t \in [0, 1[$ et donc

$$\left| \frac{1}{[x+1]} - \frac{1}{k+t} \right| \leq \frac{2}{k^2}.$$

On en déduit, en utilisant ce majorant sur chaque segment $[k, k+1[$ de l'intégrale (qui devient un minorant à cause du signe négatif de l'intégrande dans l'expression de y_n), que

$$y_n = \int_1^n \left(\frac{1}{[x+1]} - \frac{1}{x} \right) dx \geq - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k^2} \geq -\frac{\pi^2}{3}.$$

(Ici on a utilisé que $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$, mais il suffit de savoir que cette série converge pour conclure l'argument; la valeur de la limite n'est pas nécessaire). Ainsi (y_n) est une suite décroissante et minorée par $-\frac{\pi^2}{3}$ et donc converge. Donc la suite (x_n) converge.