

Corrigé 10.2 – jeudi 21 novembre 2024

Exercice 1.

1. On note $R' = \sup\{|x| ; (a_n x^n) \text{ bornée}\}$. Clairement, si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $|x| > R'$ alors la série $\sum a_n x^n$ ne converge pas et donc $|x| \geq R$, donc $R' \geq R$.

Soit maintenant $y \in \mathbb{R}^*$ tel que $|y| < R'$. Alors, par les propriétés du sup, il existe $x \in]|y|, R']$ tel que $a_n x^n$ est bornée – disons $|a_n x^n| \leq C \in \mathbb{R}$ – et donc en raisonnant comme en cours, en posant $\mu = y/x$ on a $|\mu| < 1$ et

$$|a_n y^n| = |a_n x^n \mu^n| \leq C |\mu|^n.$$

Comme la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} |\mu|^n$ converge, on a par critère de comparaison que $\sum a_n y^n$ converge (absolument). Ainsi $|y| < R$. Ainsi $R' \leq R$. On a donc montré $R = R'$.

2. Soit R le rayon de convergence de cette série. Comme $(a_n \cdot 1^n)$ est bornée par M , on a par le résultat du point précédent que $R \geq 1$. Maintenant, si $|x| > 1$, on a $|a_n x^n| \geq m |x|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et donc la série diverge. Ceci montre que $R \leq 1$ et conclut la démonstration.
3. Il suffit de remarquer que la suite $(a_n r^n)$ est bornée si et seulement si la suite $(a_n r^{n/\alpha})$ (obtenue en prenant la puissance $1/\alpha$ de la première) est bornée. Ainsi, si $r < R^\alpha$, alors $r^{1/\alpha} < R$ et donc les suites $(a_n r^{n/\alpha})$ et $(a_n^\alpha r^n)$ sont bornées. De même, si $r > R^\alpha$, de sorte que $r^{1/\alpha} > R$, alors les suites $(a_n r^{n/\alpha})$ et $(a_n^\alpha r^n)$ ne sont pas bornées. Ceci prouve que le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n^\alpha x^n$ est égal à R^α .

Exercice 2.

Nous justifions brièvement le raisonnement qui conduit au rayon de convergence dans chaque cas, sans nécessairement donner tous les détails:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{3n}}{n}$. On utilise le critère de d'Alembert:

$$\left| \frac{2^{n+1} x^{3(n+1)}}{n+1} \frac{n}{2^n x^{3n}} \right| = \frac{n}{n+1} \cdot 2 \cdot |x|^3 \rightarrow 2 \cdot |x|^3.$$

Donc, par le critère de d'Alembert, $R = 2^{-1/3}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \sin(1/n)) x^n$. En composant les DL de $\sin$ en 0 et $\log$ en 1, on trouve que $a_n = \log(1 + \sin(1/n)) = 1/n + o(1/n)$ et donc $|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}| \rightarrow |x|$. Donc par le critère de d'Alembert, on a $R = 1$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - 1) x^n$. Par le DL de $\exp$ en 0, on a $e^{1/n} - 1 = 1/n + o(1/n)$. Donc comme précédemment, $R = 1$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}} x^n$, $a > 0$. Appliquons le critère de Cauchy: pour $a > 0$

$$|a^{\sqrt{n}} x^n|^{1/n} = |a|^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|$$

car $|a|^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \exp(\log(a)/\sqrt{n}) \rightarrow 1$. Donc par le critère de Cauchy, $R = 1$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$. Appliquons le critère de Cauchy: on a pour $n \geq 1$, $|x^{n!}|^{1/n} = |x|^{(n-1)!}$ et cette suite converge vers 0 si $|x| < 1$ et diverge vers $+\infty$ si $|x| > 1$. Donc $R = 1$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log(n)} x^n$. Appliquons le critère de Cauchy: on a pour $n \geq 1$: $|n^{\log(n)} x^n|^{1/n} = \exp(\log(n)^2/n) |x| \rightarrow |x|$. Donc par le critère de Cauchy, $R = 1$. Dans ce raisonnement, on a utilisé que $\log(n)^2/n \rightarrow 0$ qui peut s'obtenir par une double application de la règle de Bernoulli l'Hôpital en $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\log n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Exercice 3.

1. $[\implies]$

Supposons que (f_n) converge uniformément vers f sur D . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

- si $n \geq N_\varepsilon$, alors, pour tout $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$,
- si $p \geq N_\varepsilon$, alors, pour tout $x \in I$, $|f_p(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

On a alors, pour tout x de D et $n, p \geq N_\varepsilon$,

$$|f_p(x) - f_n(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci prouve bien que (f_n) est uniformément de Cauchy sur I .

$[\impliedby]$

Supposons que (f_n) est uniformément de Cauchy. Pour tout x de D , $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc $(f_n(x))$ converge. On note $f(x)$ sa limite.

On a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, n \geq N \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon.$$

Puis, on fait tendre p vers $+\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Donc, (f_n) converge uniformément vers f sur D .

2. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $(\sum a_n)$ est convergente, elle satisfait le critère de Cauchy, donc:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, p \in \mathbb{N}, \quad (N \leq n < p \implies a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_p < \varepsilon).$$

Soient alors $n, p \in \mathbb{N}$ vérifiant $N \leq n < p$ et soit $x \in D$, on a par l'inégalité triangulaire:

$$|f_{n+1}(x) + \dots + f_p(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots + |f_p(x)| \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_p < \varepsilon.$$

Donc la suite des sommes partielles $x \mapsto S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ vérifie le critère de Cauchy uniforme, et donc la série entière converge uniformément sur D .

3. Considérons la série de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par les sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (pas de dépendance en x). Chaque fonction étant constante, cette série converge uniformément vers la fonction constante égale à la somme de la série harmonique alternée. En revanche, comme la série harmonique diverge, cette série ne converge pas normalement.
4. Chaque somme partielle de cette série est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$. En revanche la différence entre 2 termes successifs n'est pas bornée et donc la série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrons que la série converge uniformément sur tout intervalle borné, ce qui sera suffisant pour notre but. Pour $|x| < C$, on a

$$\left| \frac{k^2 + x^4}{k^4 + x^2} \right| \leq \frac{k^2 + C^4}{k^4 + C^2} = \frac{1}{k^2} \frac{1 + C^4/k^2}{1 + C^2/k^2} = O(1/k^2).$$

Comme la série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ converge, la série de fonctions converge normalement sur $[-C, C]$. Par ailleurs, pour un x donné, en prenant $C = |x|$, la borne ci-dessus montre que la série converge ponctuellement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Par le résultat de la question 2, la série converge uniformément vers f sur tout intervalle borné, et donc f est continue sur tout intervalle borné, et donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

1. On suppose que $f'(x_0) > 0$; puisque f' est continue, il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que $f'(x) > 0 \forall x \in I$.

Donc f est strictement croissante sur I . Donc f est injective et continue sur I , donc par le thm. du cours : $f : I \rightarrow f(I)$ admet une fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ qui est continue et strictement monotone.

Nous avons aussi par un thm. du cours, que f^{-1} est dérivable, et $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. De part son expression (composition de fonctions continues), on a $(f^{-1})' \in C^0(f(I))$ et donc $f^{-1} \in C^1(f(I))$.

2. On peut considérer la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et alors on a

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Donc $f'(0) = 1$, mais pour tout les voisinages de $x = 0$ on peut trouver des points t_1, t_2 t.q. $f'(t_1) > 0$ et $f'(t_2) < 0$, et donc f n'est pas monotone, mais une fonction injective et continue est monotone (théorème du cours). Donc, f n'est injective sur aucun intervalle ouvert non vide contenant 0.