



Exercises

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

Surname, First name

MATH-100(a)-Analyse avancée

Examen blanc

4 Dec, 2024, 16:15-19:15

1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9
0	0	0	0	0	0	0

Durée de l'examen: 3 heures.
Les documents, formulaires et calculatrices ne sont pas autorisés.
Si vous manquez de place pour une question, utiliser les dernières feuilles du livret et bien indiquer le renvoi de page.



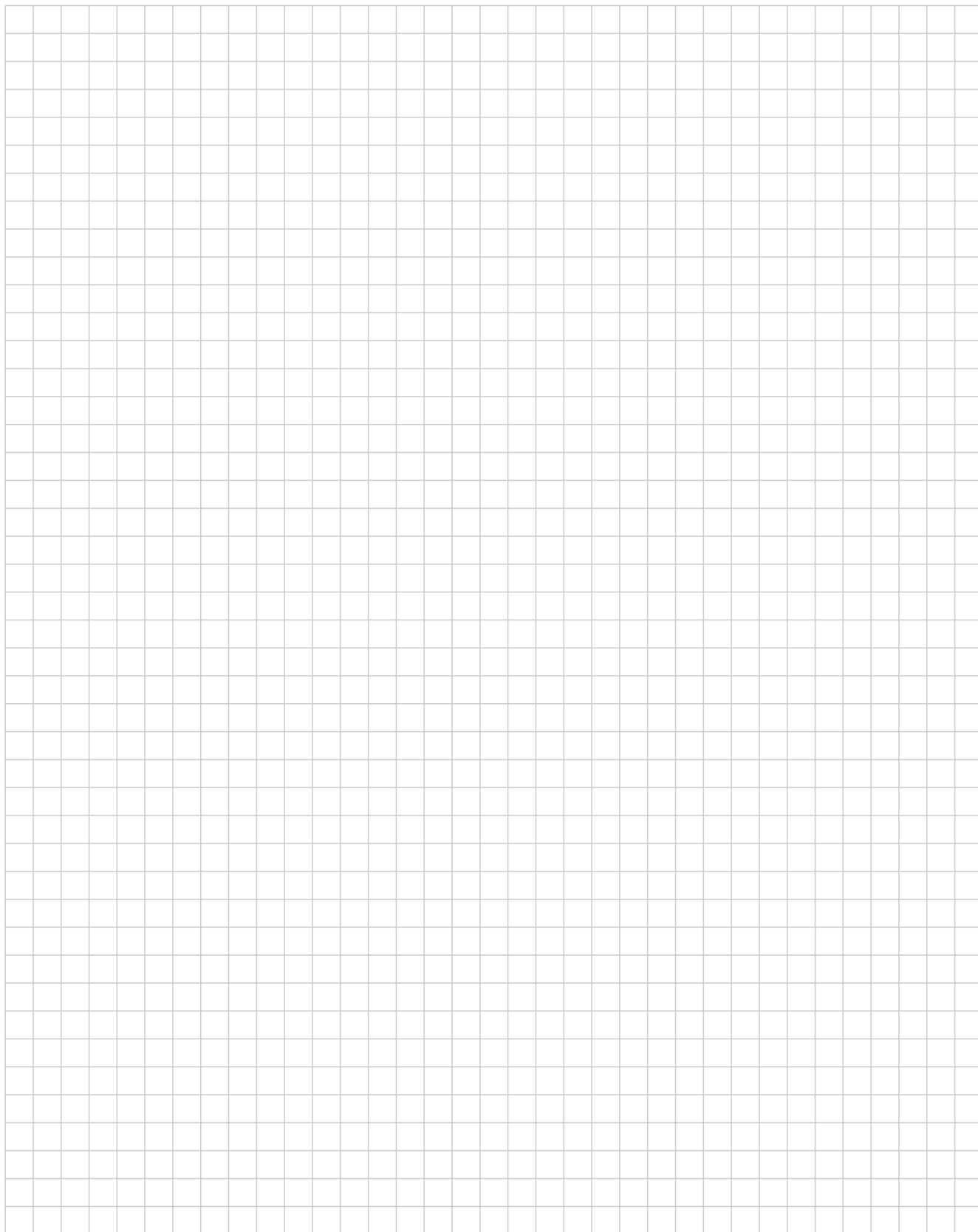
Co

1a

1b

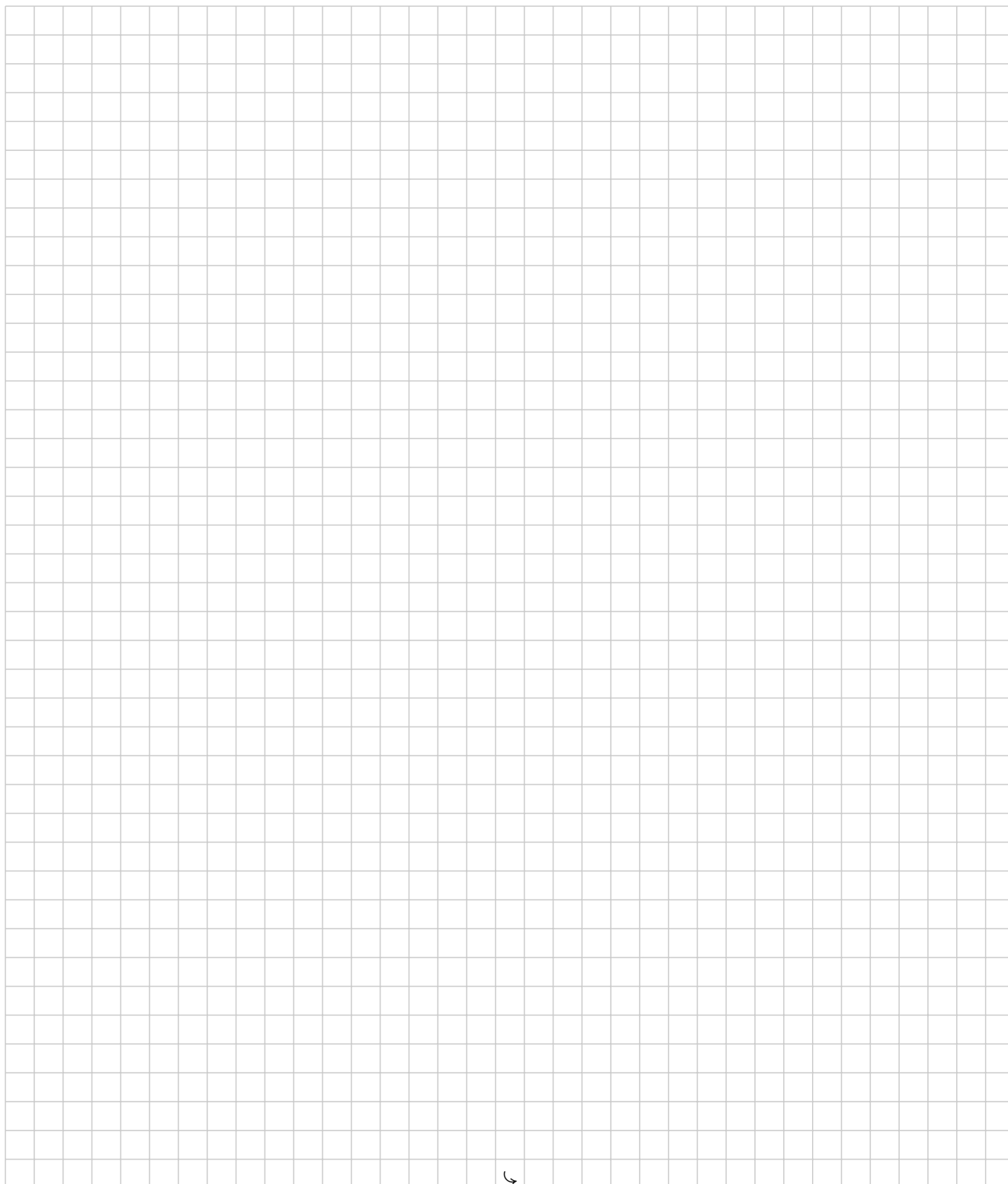


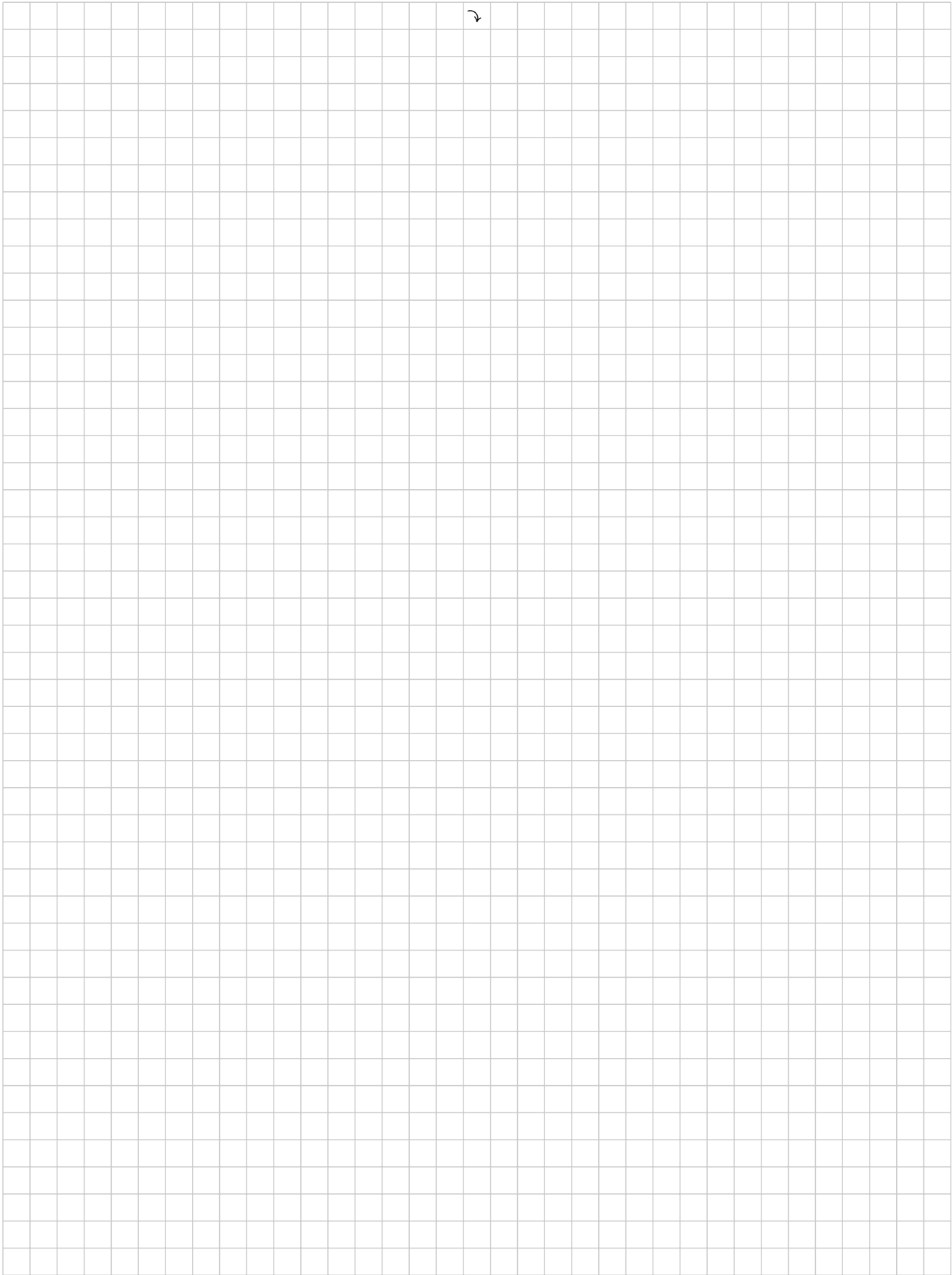
1c Montrer que si I est un intervalle borné et f est uniformément continue alors $f(I)$ est borné.



Suites et récurrence

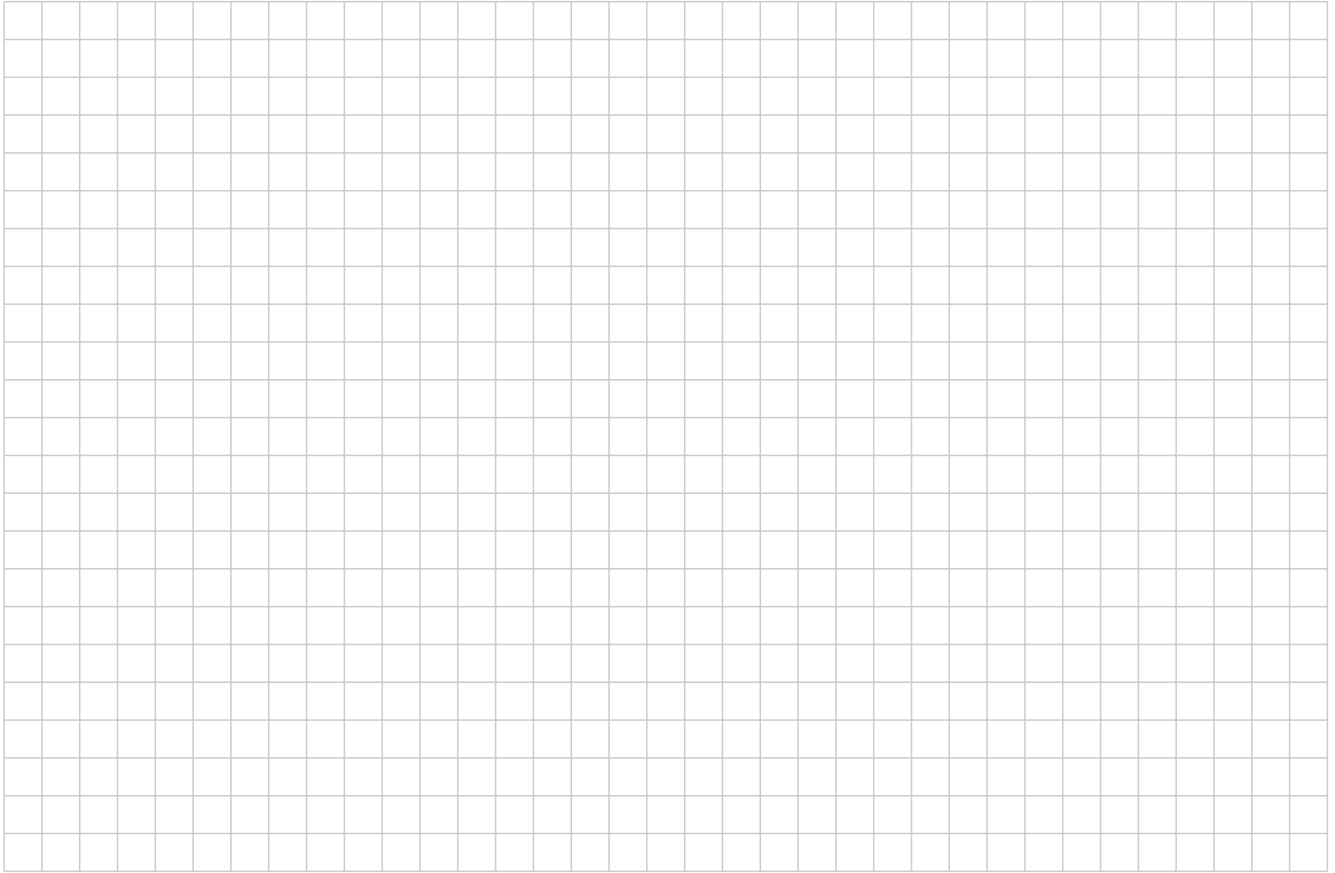
- 2 Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{R}_+$ telle que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_k < +\infty$. Montrer que la suite (α_n) définie par $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 + a_n} \right)$ est convergente.



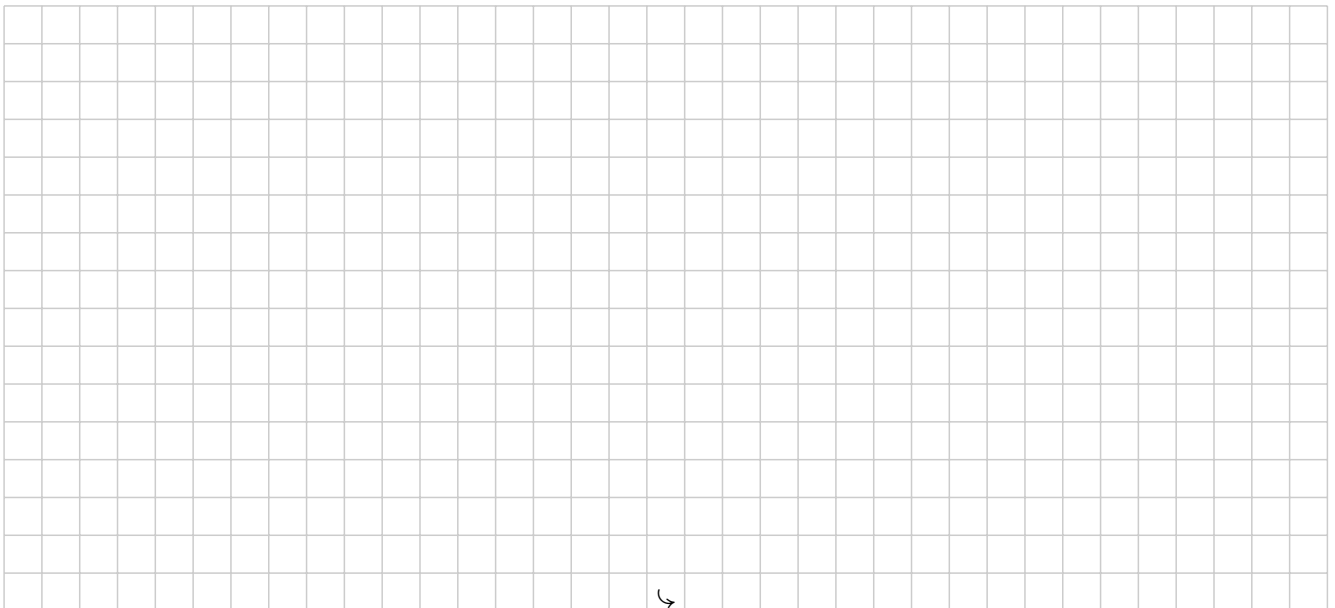


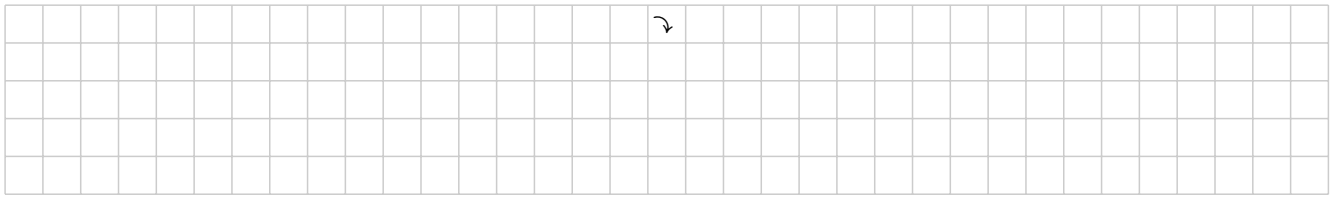
Étude de limites et de sommes

3a Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n^2} \log\left(\frac{1}{3^{k \sin(2/n)}}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

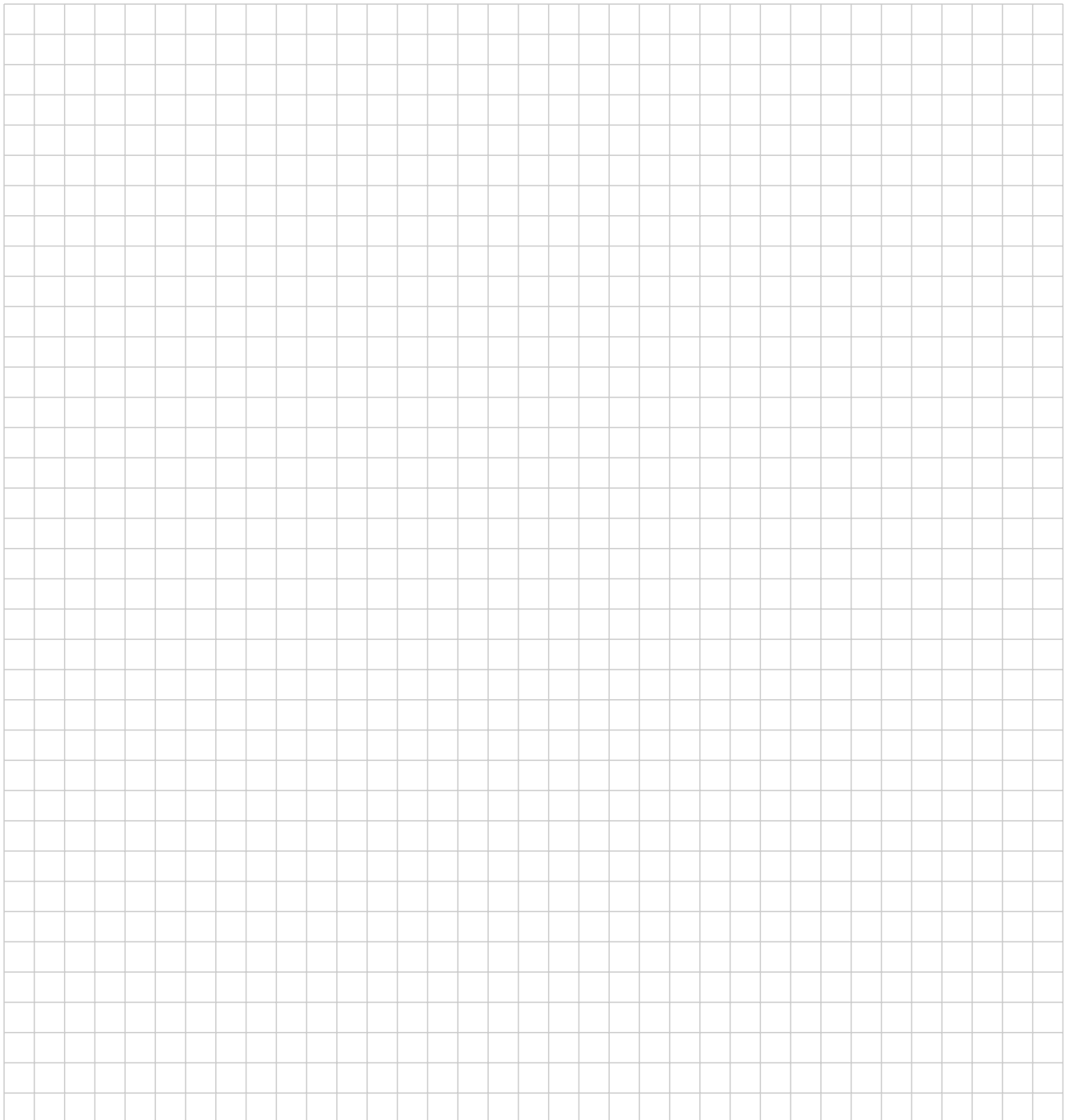


3b Déterminer la valeur de la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^k}$ en fonction de la valeur de $k \in \mathbb{Z}$.



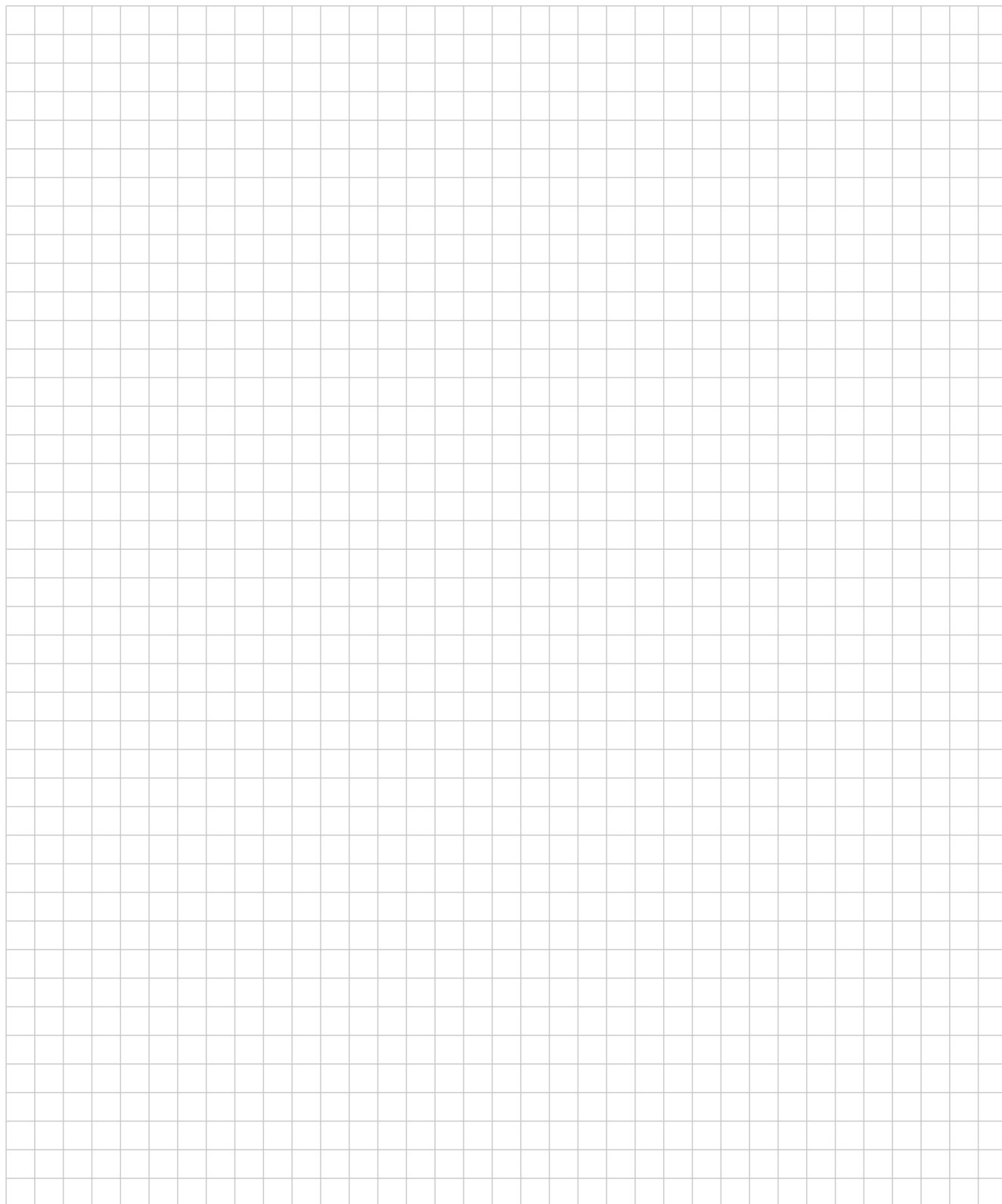


3c Déterminer l'ensemble des valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n + n}{2^n}$ converge, et déterminer sa somme.



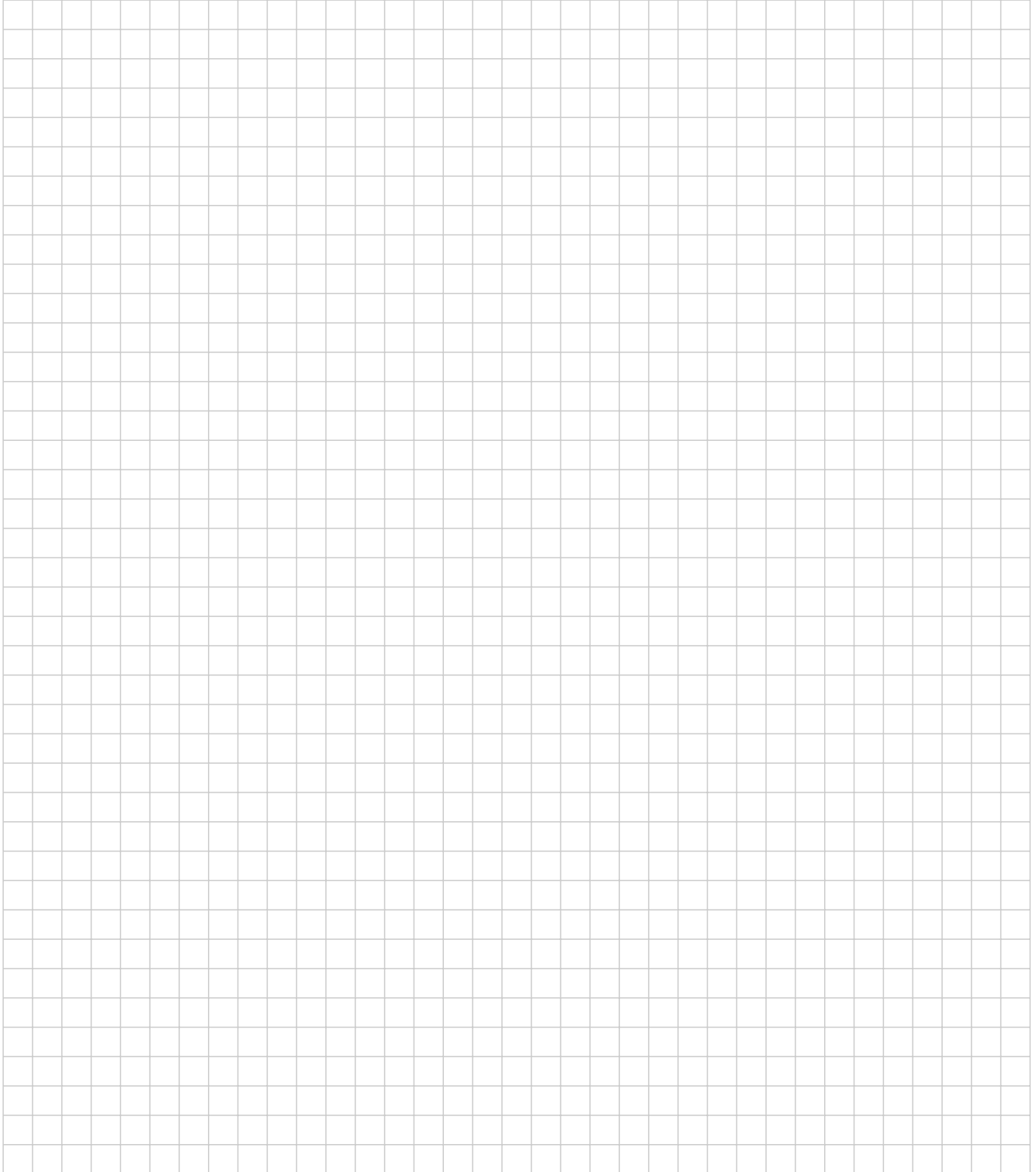
Dérivabilité

4 Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[)$ telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \ell$. Montrer que f est Lipschitzienne.



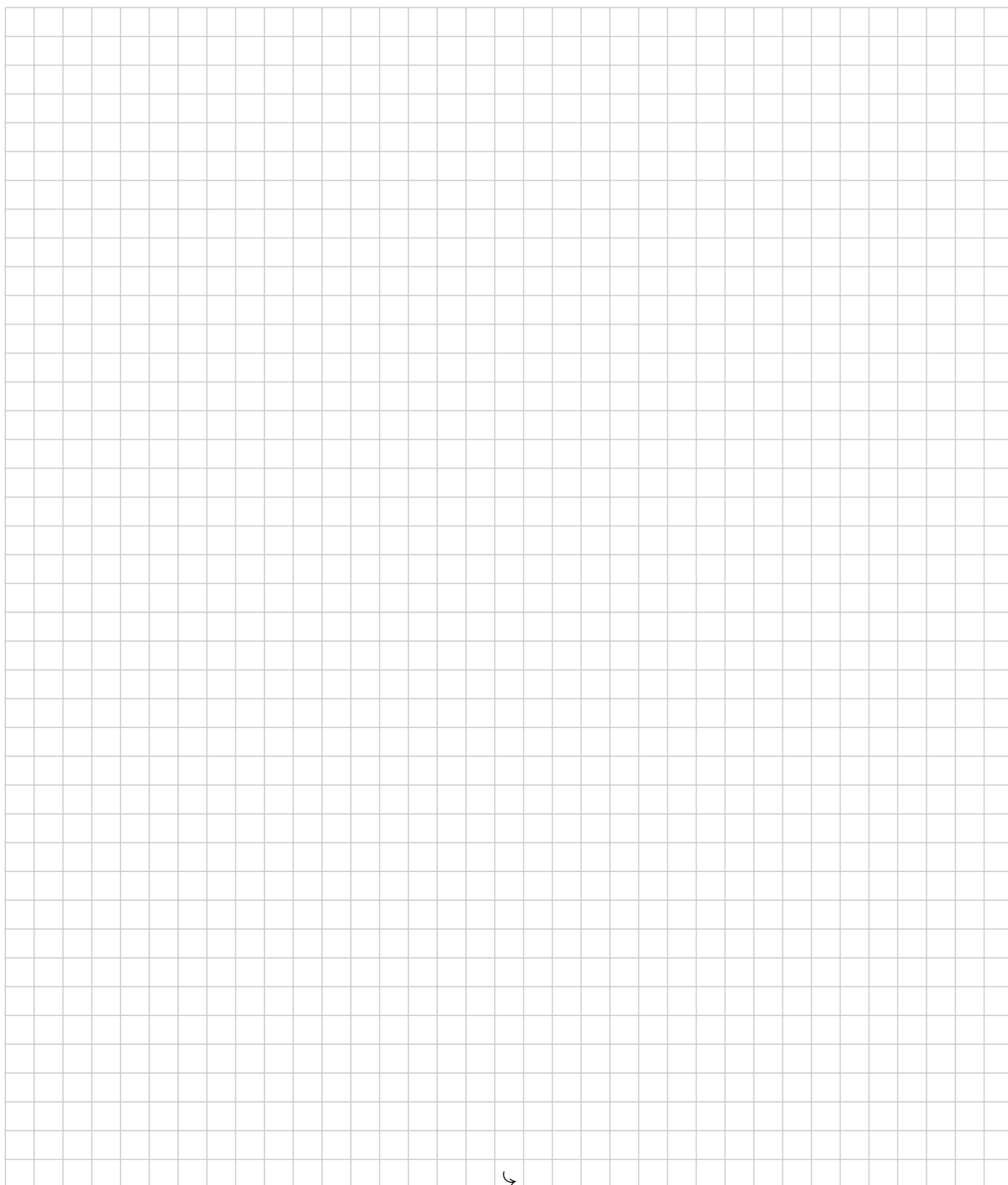
Suites de fonctions

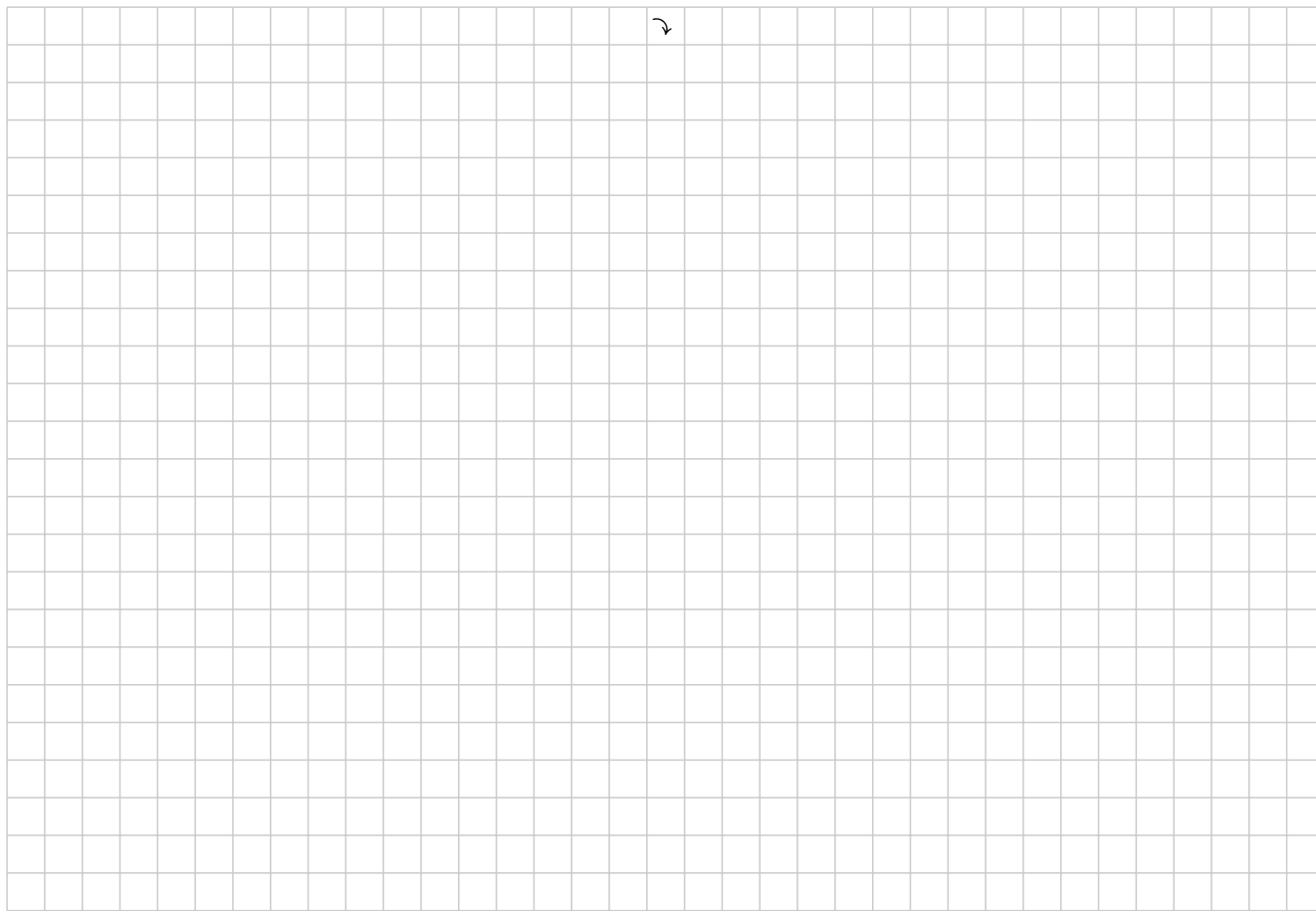
- 5 Vrai ou Faux? Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$. Si la suite de fonctions $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ converge uniformément, alors la suite de fonctions (f_k) converge uniformément vers 0. (Si c'est vrai, le prouver, si c'est faux, donner un contre-exemple).



Continuité

- 6a** Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue surjective qui atteint chaque valeur de $\mathbb{R}$ exactement 2 fois (c'est-à-dire telle que chaque point de $\mathbb{R}$ a exactement 2 antécédents par f).





de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et surjective

- 6b** Donner un exemple de fonction γ qui atteint chaque valeur exactement 3 fois (c'est-à-dire telle que chaque réel a exactement 3 antécédents). Le tracé d'une portion du graphe qui permet de définir la fonction sans ambiguïté sera suffisant.



Sous-suites

- 7 Vrai ou faux? Soit (a_n) une suite réelle telle que pour tout $n > 1$, la sous-suite $a_n, a_{2n}, a_{3n}, \dots$ est convergente. Alors (a_n) est convergente. (Si c'est vrai, le prouver, si c'est faux, donner un contre-exemple).

