

ANALYSE I EXAMEN

23 JANVIER 2019

Nom et prénom: _____

SCIPER: _____

- Matériel autorisé: aucun (pas de polycopié, pas de calculatrice)
- Les problèmes sont ordonnés par ordre croissant de difficulté. Le dernier problème est difficile.
- Vous pouvez utiliser, sans les reprouver, des résultats vus en cours ou dans le polycopié. Néanmoins, vous ne pouvez pas faire référence aux exercices du cours: si un problème ressemble à un problème vu en exercices, refaites-le simplement.
- Vous avez 19 problèmes, chaque problème vaut 7 points. Pour les questions vrai/faux, un point pour la bonne réponse, 6 points pour la preuve (si vrai) ou le contre-exemple (si faux).
- Vous pouvez écrire sur des feuilles de brouillon, mais les réponses qui seront corrigées devront figurer sur les feuilles.

(1) Si $f(x+h) = \mathcal{O}(h^n)$ pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$ quand $h \rightarrow 0$ alors f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Vrai ou faux? Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.

(2) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont convexes alors $f \circ g$ est convexe. Vrai ou faux? Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.

(3) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{1/n}$$

existe pour tout x . Alors f est dérivable. Vrai ou faux? Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.

(4) Si $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite avec $|a_n| \leq 1/n$ et $a_n a_{n+1} < 0$ pour tout n alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente. Vrai ou faux?
Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.

- (5) Si $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite avec $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ et $a_n a_{n+1} < 0$ pour tout n alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente. Vrai ou faux? Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.

- (6) Trouvez la primitive de $\ln^2(\sin(x)) \cos(x)$.

- (7) Si $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite avec $|a_n| < 1$ et $\prod_{n=0}^{\infty} (1 - a_n) = 0$ est-il vrai que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$? Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.
- (8) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ avec $|f'| < 1$ et avec $f([a, b]) \subset [a, b]$ prouvez précisément que f a un point fixe sur $[a, b]$.

(9) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors il existe toujours $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_{x-2}^{x+2} f(y) \, dy = 4f(x).$$

Vrai ou faux? Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.

(10) Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables avec $g(0) = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{f(x)}}{g(x)} = 1,$$

est-il vrai $f(x) = \mathcal{O}(x^3)$ quand $x \rightarrow 0$? Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.

- (11) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui est 2π -périodique. Alors il existe une suite de points $x_n \rightarrow \infty$ telle que $f^{(n)}(x_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Vrai ou faux? Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.

- (12) Soit $f(x) = \sin^4(x) + \cos^2(x)$. Alors la fonction $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \int_0^x f(y) \, dy$ est uniformément continue. Vrai ou faux? Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.

- (13) Soit $f_n(x) = \min(x^n, (2-x)^n)$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, est-il vrai qu'il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $m \geq 0$, on a

$$\sup_{x \in [0,2]} |f_n(x) - f_{n+m}(x)| \leq \epsilon?$$

Justifiez votre réponse.

- (14) Soit $\{a_n\}_{n \geq 0}$ une suite bornée des nombres réels telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+m} - a_n) = 0$, alors a_n est convergente. Vrai ou faux? Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.

(15) Soit g une fonction continue positive. Alors la limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha e^{-\int_0^x g(y) dy} g(x) dx$$

existe. Vrai ou faux? Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.

(16) Soit f une fonction continue positive telle que la limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha f(x) dx$$

existe. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Vrai ou faux? Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.

- (17) Si f est une fonction telle qu'il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ et une constante C_N telle que pour tout N on a

$$\sum_{n=0}^N a_n x^n - C_N x^N \leq f(x) \leq \sum_{n=0}^N a_n x^n + C_N x^N.$$

Alors si $\sup C_n < \infty$ f est analytique sur $[-r, r]$ pour tout $r < 1$. Vrai ou faux? Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.

- (18) Prouvez, en utilisant des résultats vus en classe, que si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions continues avec $f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ et telle que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

est continue, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b F(x) dx.$$

Soyez très précis!

(19) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\sup_{A \subset \mathbb{R}, \#(A) < +\infty} \sum_{x \in A} |f(x)| < +\infty$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $a_n = \#(\{x : f(x) > \frac{1}{n}\})$, où $\#(X)$ indique la cardinalité de l'ensemble X . Alors on a

$$\sum_n \frac{a_n}{n^2 \log^2 n} < +\infty.$$

Vrai ou faux? Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.