

Exercice 1.

Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, périodique et de classe C^1 , est Lipschitz.

Exercice 2.

Trouver une primitive du logarithme $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h^4} \left[f(x+2h) + f(x-2h) + 6f(x) - 4f(x+h) - 4f(x-h) \right].$$

Exercice 4.

Soit (a_n) une suite de nombres réels. Montrer que si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe.

Exercice 5.

Soient f, g des fonctions C^0 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et une suite de fonctions f_n de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont C^1 . Montrer que si f'_n converge uniformément vers g et f_n converge vers f , alors f est C^1 et $f' = g$.

Indication : intégrer

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Montrer que si $f(0) = f(1) = f(2)$ alors il existe un point $x \in \mathbb{R}$ tel que $f''(x) = 0$.

Exercice 7.

Etudier la convergence de

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Indication : comparer avec une intégrale.

Exercice 8.

(un peu plus difficile) Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est analytique et vérifie $f(1/n) = 0$ pour tout entier $n > 0$ alors $f = 0$.

Exercice 9 (Question Vrai/Faux : si Vrai, justifier, si Faux, donner un contre-exemple).

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue en un point $x \in \mathbb{R}$, alors f^2 n'est pas continue en x .

Exercice 10 (Question Vrai/Faux : si Vrai, justifier, si Faux, donner un contre-exemple).

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors il existe une fonction C^1 $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F' = f$.

Exercice 11 (Question Vrai/Faux : si Vrai, justifier, si Faux, donner un contre-exemple).

Soient $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, une suite de fonctions C^∞ , et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f_n converge vers f alors f est aussi C^∞ .

Exercice 12 (Question Vrai/Faux : si Vrai, justifier, si Faux, donner un contre-exemple).

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et vérifie $f(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, alors il existe $\alpha < \beta$ dans $\mathbb{R}$ tq $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 10000$.

Exercice 13 (Question Vrai/Faux : si Vrai, justifier, si Faux, donner un contre-exemple).

Soit $\alpha \in]0, 1]$. Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \forall x, y \in \mathbb{R}$ pour un réel $C > 0$ alors f est uniformément continue.

Exercice 14 (Question Vrai/Faux : si Vrai, justifier, si Faux, donner un contre-exemple).

Soit (a_n) une suite de nombres réels. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge.

Exercice 15 (Question Vrai/Faux : si Vrai, justifier, si Faux, donner un contre-exemple).

(plus difficile) Soit (a_n) une suite de nombres réels. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^3$ converge.

Exercice 16 (Question Vrai/Faux : si Vrai, justifier, si Faux, donner un contre-exemple).

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et si $f(x) = x + o(x)$ lorsque x tend vers 0, alors f est différentiable en 0.