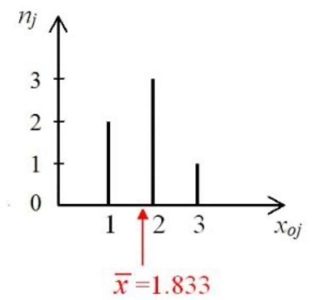
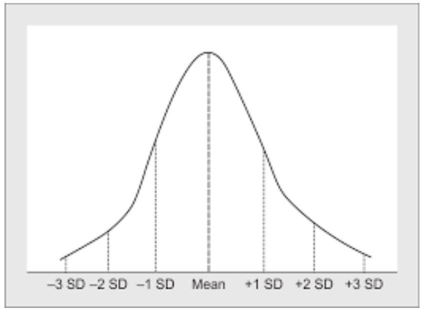
Exemple

2. Moyenne via « la compensation conditionnelle » (à la maison)

- Design
  - *comment* former les conditions?
  - combien de conditions pour *5 mesures*?
  - Y a-t-il *d'autres façons possibles* de les former?
- Résultats
  - le choix des conditions affectera-t-il
    - i) la moyenne ?
    - ii) sa variance ?
    - iii) $\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}}$, $\mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$?
- Procédé
  - A vous réfléchir
  - Questions pour jeudi



Exemple – moyenne arithmétique
en compensation conditionnelle



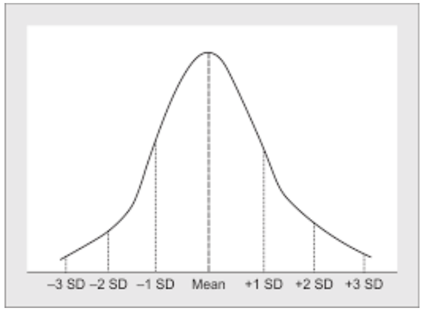
- Modèle fonctionelle (option)

  - $$\mathbf{f}(\ell) = \begin{bmatrix} \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 - \ell_1 \\ \ell_4 - \ell_1 \\ \ell_5 - \ell_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_I} \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \\ \ell_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix}$$

  - $$\hat{\mathbf{v}} = \cancel{\mathbf{Q}_{\ell\ell}} \underbrace{\mathbf{B}^T \left(\mathbf{B}\cancel{\mathbf{Q}_{\ell\ell}}\mathbf{B}^T\right)^{-1}}_{\mathbf{K}} \overset{\mathbf{w}}{\mathbf{B}\cdot\ell}$$

  - $$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & \cdots & \cdots & -0.2 \\ -0.2 & 0.8 & & & \vdots \\ \vdots & & 0.8 & & \vdots \\ \vdots & & & 0.8 & -0.2 \\ -0.2 & \cdots & \cdots & -0.2 & 0.8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \\ \ell_5 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \begin{bmatrix} \bar{\ell} \\ \bar{\ell} \\ \bar{\ell} \\ \bar{\ell} \\ \bar{\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \\ \ell_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

Exemple – moyenne arithmétique
en compensation conditionnelle

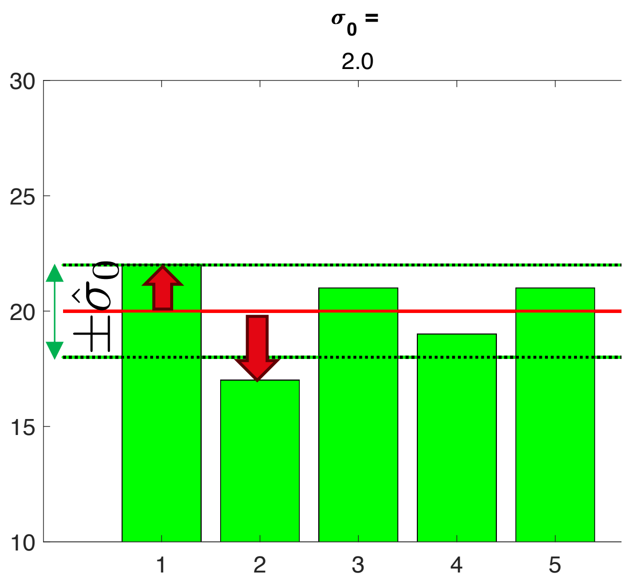


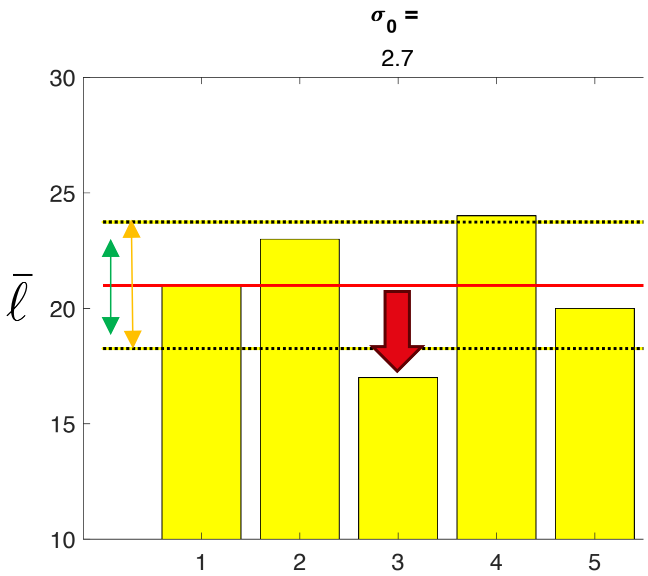
- Modèle fonctionelle (indépendant de l'option)

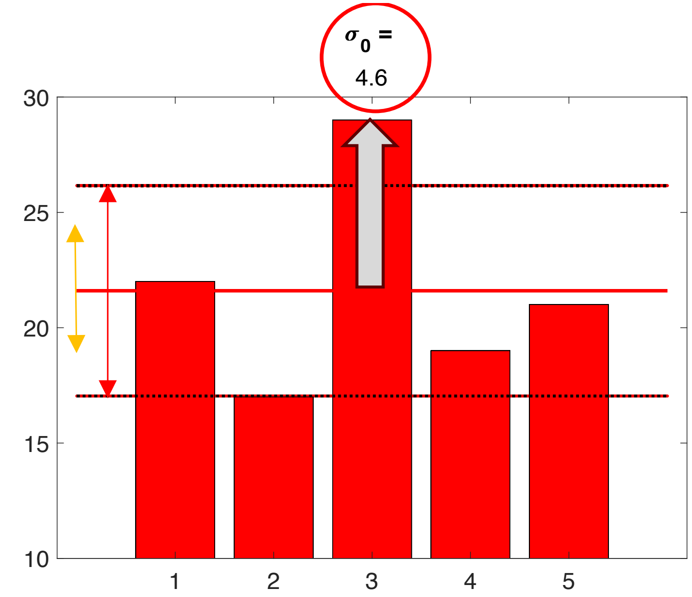
  - $\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \cancel{\mathbf{Q}_{\ell\ell}}\underbrace{\mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\cancel{\mathbf{Q}_{\ell\ell}}\mathbf{B}^T\right)^{-1}\mathbf{B}}_{\mathbf{K}}\cancel{\mathbf{Q}_{\ell\ell}}$
    $$\begin{cases} q^2_{\hat{v}_1} = 0.8 \longrightarrow q_{\hat{v}_1} = \sqrt{0.8} \Longrightarrow \sigma_{\hat{v}_1} = \sigma_0 \cdot \sqrt{0.8} \\ \vdots \\ \rho_{\hat{v}_i\hat{v}_j} = \dfrac{-0.2}{\sqrt{0.8}\sqrt{0.8}} = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$
    la variance de résidus est uniforme

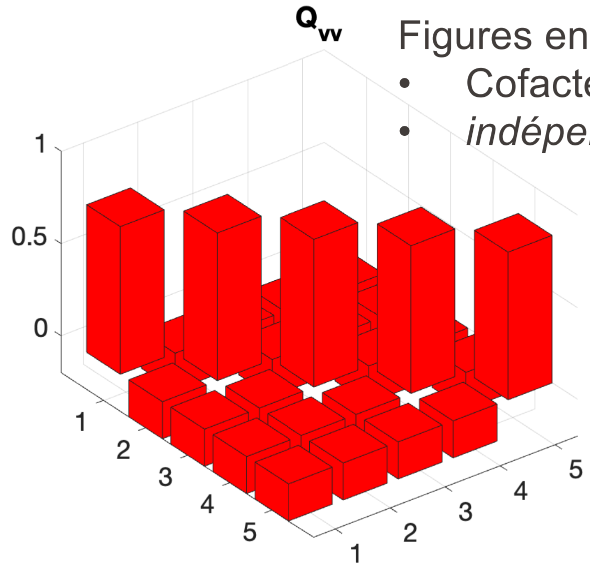
  - $\mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell} - \mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \begin{bmatrix} 0.2 & \cdots & 0.2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.2 & \cdots & 0.2 \end{bmatrix}$
    $$\begin{cases} q^2_{\hat{\ell}_1} = 0.2 \longrightarrow q_{\hat{\ell}_1} = \sqrt{0.2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \qquad \Longrightarrow \sigma_{\hat{\ell}_1} = \sigma_0 \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \vdots \\ \rho_{\hat{\ell}_i\hat{\ell}_j} = \dfrac{0.2}{\sqrt{0.2}\sqrt{0.2}} = 1 \end{cases}$$
    les données sont entièrement corrélées!

  - pourquoi les cofacteurs sont le même?
    - même matrice **K = B(BB^T)$^{-1}$B^T** …
    - dépend uniquement des modèles (stochastique et fonctionnelle), pas les mesures !



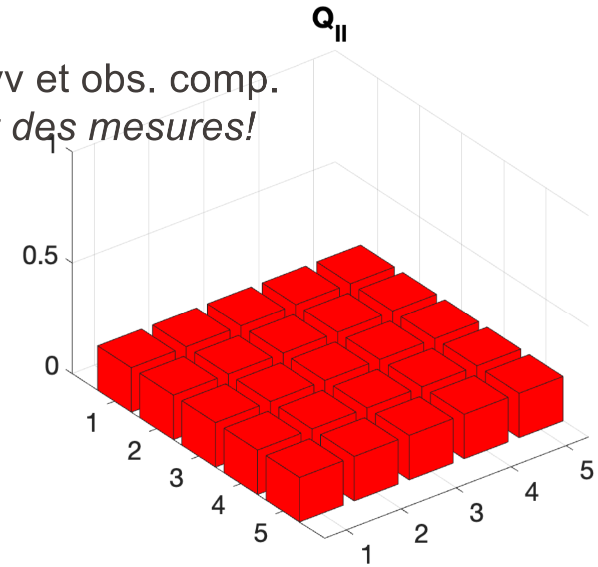






Figures en bas:

- Cofacteurs vv et obs. comp.
- *indépendant des mesures!*



Figures en haut :

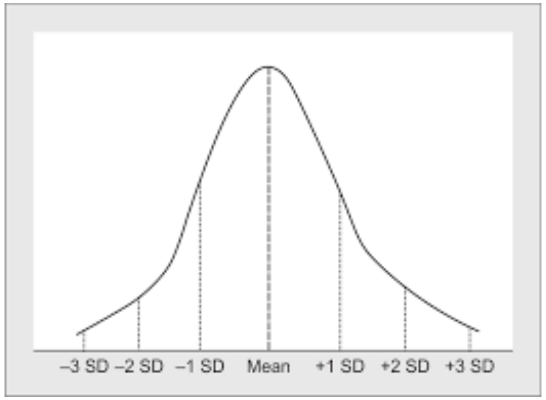
- 3 séries des mesures (bar)
- la moyenne (ligne)
- le sigma *a posteriori* (…)

Une mesure décalée:

- modifie la moyenne
- a un résidu important
- augment le sigma *a posteriori*

la variance des résidus est uniforme   les obs. compensées sont entièrement corrélées!

ME 8-1 : Exemples



- Moyenne arithmétique
  - Visualisation des résidus
  - Modèle conditionnel
  - Options pour $\mathbf{B}$, similitude avec le gaz parfait
  - Apparition du noyau K (*Kernel*)
  - Visualisation des matrices des cofacteurs
  - Ecart-type *a posteriori*

    cas particuler: $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ et $r = n - 1 \longrightarrow \hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{r}} = \sqrt{\frac{\sum \hat{v}_i^2}{n-1}}$

- Quadrilatère
  - Certaines angles mesurés 2 fois
  - Options, équivalences et pièges