ENG-267: Méthodes d'estimation

Complément du cours: La moyenne pondérée

Semaine 3

Poids et cofacteurs pour $\mathbf{K}_{\ell\ell}$ diagonale

Pour $\mathbf{K}_{\ell\ell}(3 \times 3)$ diagonale, dont le dernier élément est la variance de référence:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_c^2/\sigma_a^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sigma_c^2/\sigma_b^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_a & \cdot & \cdot \\ \cdot & p_b & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \sigma_a^2 \cdot p_a = \sigma_b^2 \cdot p_b = \sigma_c^2 \cdot 1 = \sigma_0^2$$

Procédé

Lors du cours, nous avons considéré deux mesures d'une grandeur avec des appareils différents (les deux mesures sont indépendantes): a avec σ_a et b avec σ_b.

On aimerait calculer *la moyenne pondérée* : $m = p_a a + p_b b$ ou la somme des pondérations correspond à l'unité: $p_a + p_b = 1$. Selon la définition (statistique de base) la moyenne pondérée est la moyenne dont la variance est minimale (précision maximale). On écrit le calcul de la moyenne pondérée sous forme vectorielle:

$$m = \begin{bmatrix} p_a & p_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_a \\ p_b \end{bmatrix} \tag{1}$$

et on exprime la variance de la moyenne pondérée selon la loi de propagation de la variance:

$$\sigma_m^2 = \begin{bmatrix} p_a & p_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \\ & \sigma_b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_a \\ p_b \end{bmatrix} = p_a^2\sigma_a^2 + p_b^2\sigma_b^2 \tag{2}$$

En remplaçant $p_b^2 = (1 - \sigma_a^2)$ on obtient la fonction de coût (*cost function*) à minimiser:

$$\Omega : \ \sigma_m^2 = p_a^2\sigma_a^2 + (1 - p_a^2)\sigma_b^2 = p_a^2\sigma_a^2 + p_a^2\sigma_b^2 - 2p_a\sigma_b + \sigma_b^2$$

On trouve le minimum de cette fonction en effectuant la dérivée partielle le long du terme inconnu p_a et en la mettant à zéro:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial p_a} : \ 2p_a(\sigma_a^2 + \sigma_b^2) - 2\sigma_b^2 = 0$$

$$\Longrightarrow p_a = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$$

Enfin, en utilisant l'égalité $\sigma_a^2 \cdot p_a = \sigma_b^2 \cdot p_b$, on trouve p_b:

$$p_b = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$$

La prochaine fois, nous insérerons les valeurs de p_a et p_b dans l'éq. (2) et nous développerons ce point.