Série d'exercices 4 : Propagation d'erreur

Grâce au corrigé de la série 3, Alice et Benjamin ont compris la cause de leurs égarements. L'arrivée de l'automne ils souhaitent tester les performances d'un scanner laser terrestre avant de l'utiliser pour surveiller la nature (éboulement, arbres, ...) ou la construction (chantier, barrage, ...). L'instrument incline l'émetteur laser dans les directions horizontale et verticale. Lorsque l'impulsion laser est réfléchie par l'objet et revient vers l'instrument, le temps de propagation est converti en distance. La trigonométrie est utilisée pour exprimer les observés (distances ρ, les angles horizontaux θ et verticaux α) en coordonnées cartésiennes.

Figure 1: Scanner laser (gauche), cibles de contrôle (centre), observations (droite).

Ils installent l'instrument dans la pièce (Fig. 1)[1] où se trouvent des cibles sur les murs, dont les coordonnées sont connues. En appuyant sur le bouton de balayage, ils récupèrent les coordonnées d'une cible dans le nuage de points du scanner et les comparent à la référence. Ils considèrent les différences obtenues comme des erreurs (ε_{xyz}^{obs}) et souhaitent vérifier si elles se situent dans les limites de la spécification du scanner.

Les mesures sont affectées par des erreurs maximales.

$$\boldsymbol{\ell} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \theta \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho = 8.423 \text{ m} \\ \theta = 89.457 \text{ gon} \\ \alpha = 12.283 \text{ gon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon_\rho = 5.0 \text{ mm}^2 \\ \varepsilon_\theta = 10.0 \text{ mgon}^3 \\ \varepsilon_\alpha = 10.0 \text{ mgon} \end{cases}$$

Ils considèrent trois fonction de ces mesures.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathsf{y}_1 \\ \mathsf{y}_2 \\ \mathsf{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_{ij} = \rho \cdot \cos\theta_{ij} \cdot \cos\alpha_{ij} \\ y_{ij} = \rho \cdot \sin\theta_{ij} \cdot \cos\alpha_{ij} \\ z_{ij} = \rho \cdot \sin\alpha_{ij} \end{cases}$$

Pour linéariser ces fonctions, ils établissent la matrice $\mathbf{F}$ de taille $[3 \times 3]$ telle que:

$$\mathsf{d}\mathbf{y} = \mathbf{F} \cdot \mathsf{d}\boldsymbol{\ell}, \text{ soit: } \begin{bmatrix} \mathsf{dy}_1 \\ \mathsf{dy}_2 \\ \mathsf{dy}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathsf{d}\ell_1 \\ \mathsf{d}\ell_2 \\ \mathsf{d}\ell_3 \end{bmatrix}.$$

[1]après D. Lichti (2007) *J. ISPRS*, 61(5), 307–324.
[2]pour la distance $\rho \leq 10$ m sur une cible de faible réflexion.
[3]Correspond à 0.01 gon, une unité angulaire de nombreux appareils où le cercle complet (2π) est de 400 gon.

Linéarisation avec une calculette, puis avec Python

(a) Combien de chiffres significatifs sont nécessaires pour les éléments de F ?

(b) Calculez ces éléments par linéarisation numérique.

(c) Calculez ces éléments par linéarisation analytique.

Erreurs maximales (tolérances)

(d) Calculez les erreurs maximales sur y_1 , y_2 et y_3

(e) Commentez les valeurs maximales par rapport aux erreurs observées de localisation de la cible, qui sont $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)^{obs} = (-2.5, 4.0, -2.0)$ mm.

Variances et écarts-types (erreurs moyennes ou quadratiques)

On considère maintenant un écart-type correspondant au tiers de l'erreur maximale: $\sigma_i = \varepsilon_i/3$

(f) Construisez la matrice de covariance de ℓ_1 , ℓ_2 et ℓ_3 en considérant les observations comme indépendantes.

(g) Calculez la matrice de covariance de y_1 , y_2 et y_3 .

(h) Calculez les écarts-types de y_1 , y_2 et y_3 .

(i) Commentez les rapports (quotients) entre les erreurs maximales et les écarts-types.

Covariances et corrélations

(j) Calculez les corrélations pour y_1 , y_2 et y_3 .

(k) Commentez les corrélations entre y_1 , y_2 et y_3, notamment leur signe.

(l) Introduisez une corrélation de $+0.25$ entre ℓ_2 et ℓ_3 et de -0.75 entre ℓ_1 et ℓ_3 , puis recalculez la matrice de covariance de y_1 , y_2 et y_3 .

(m) Calculez et commentez les nouveaux écarts-types de y_1 , y_2 et y_3 .

(n) Calculez et commentez les nouvelles corrélations entre y_1 , y_2 et y_3