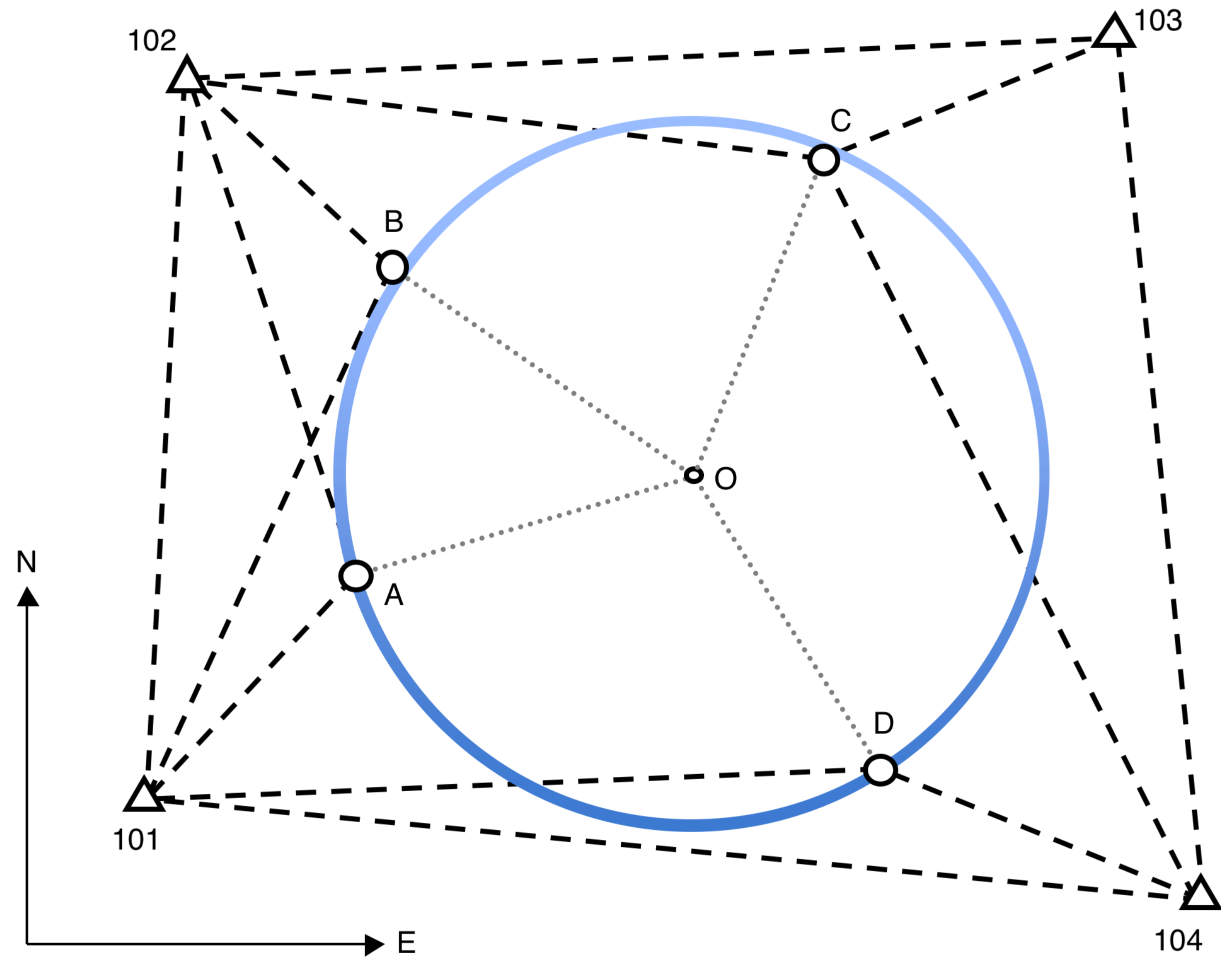
Compensation avec contraintes – Cercle ajusté par moindres carrés

Cet exemple illustre la théorie présentée lors du cours du 21.12.12.

Les coordonnées des points 101 à 104 sont connues (symbole: triangle). Sur ces points, vous réalisez des stations et des orientations, ainsi que des visées vers les points A à D inconnus (symbole: cercle), afin de déterminer leurs coordonnées.



Les mesures et leur modèle paramétrique peuvent être résumés comme suit.

$$\begin{cases} \ell_1 - v_1 = f_1\left(E_A, N_A, \ldots, E_D, N_D\right) \\ \ldots \\ \ell_n - v_n = f_n\left(E_A, N_A, \ldots, E_D, N_D\right) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\ell} - \mathbf{v} = \mathbf{f}\left(E_A, N_A, \ldots, E_D, N_D\right)$$

avec $n > u = 8$.

Les points A à D doivent former un cercle dont le rayon n'est pas spécifié. Or un cercle est défini par 3 points. Si un 4^{e} point doit également s'y trouver, il faut imposer une contrainte à leurs coordonnées. En l'occurrence, il est laborieux d'exprimer une telle contrainte directement, sous la forme: $g\left(\check{E}_A, \check{N}_A, \ldots, \check{E}_D, \check{N}_D\right) = 0$ ou $g\left(\mathring{E}_A, \mathring{N}_A, \ldots, \mathring{E}_D, \mathring{N}_D\right) = t$.

Mieux vaut recourir à des paramètres auxiliaires. Même si l'on ne souhaite pas déterminer le centre O du cercle et son rayon R, il est plus facile d'exprimer 4 contraintes faisant intervenir E_O , N_O et R.

$$\begin{cases} \left(\check{E}_A-\check{E}_O\right)^2+\left(\check{N}_A-\check{N}_O\right)^2-\check{R}^2=0 \\ \ldots \\ \left(\check{E}_D-\check{E}_O\right)^2+\left(\check{N}_D-\check{N}_O\right)^2-\check{R}^2=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathbf{g}\left(\check{E}_A\,,\ \check{N}_A\,,\ \ldots,\ \check{E}_D\,,\ \check{N}_D\,,\ \check{E}_O\,,\ \check{N}_O\,,\ \check{R}\right)=0$$

Si l'on élimine les 3 paramètres auxiliaires de ces 4 équations, on obtient une contrainte sans paramètre auxiliaire: celle qui a été évoquée plus haut (bon courage!).

Le polycopié présente diverses variantes pour combiner le modèle paramétrique **f** et les contraintes **g** .

En l'occurrence, une alternative mérite une attention particulière: les observations fictives ou pseudo-observations. Pour forcer un point sur un cercle, on prétend que l'on mesure un écart nul entre le point et le cercle, avec un écart-type nettement plus faible que celui des observations réelles.

$$\begin{cases} 0-v_A=f_A\left(E_A\,,\ N_A\,,\ E_O\,,\ N_O\,,\ R\right)=\sqrt{\left(E_A-E_O\right)^2+\left(N_A-N_O\right)^2}-R \\ \ldots \\ 0-v_D=f_D\left(E_D\,,\ N_D\,,\ E_O\,,\ N_O\,,\ R\right)=\sqrt{\left(E_D-E_O\right)^2+\left(N_D-N_O\right)^2}-R \end{cases}$$

L'intérêt de cette approche est de pouvoir ajouter ces équations à celles des observations réelles et résoudre le problème en restant dans le cadre de la compensation paramétrique.