Compensation avec contraintes - Cercle ajusté par moindres carrés

Méthodes d'estimation

2023-12-21

Cet exemple illustre la théorie présentée lors du cours du 21.12.23.

Les coordonnées des points A à D sont connues (symbole : triangle). Sur ces points, vous réalisez des stations et des orientations, ainsi que des visées vers les points P_1 à P_4 inconnus (symbole : cercle), afin de déterminer leurs coordonnées.

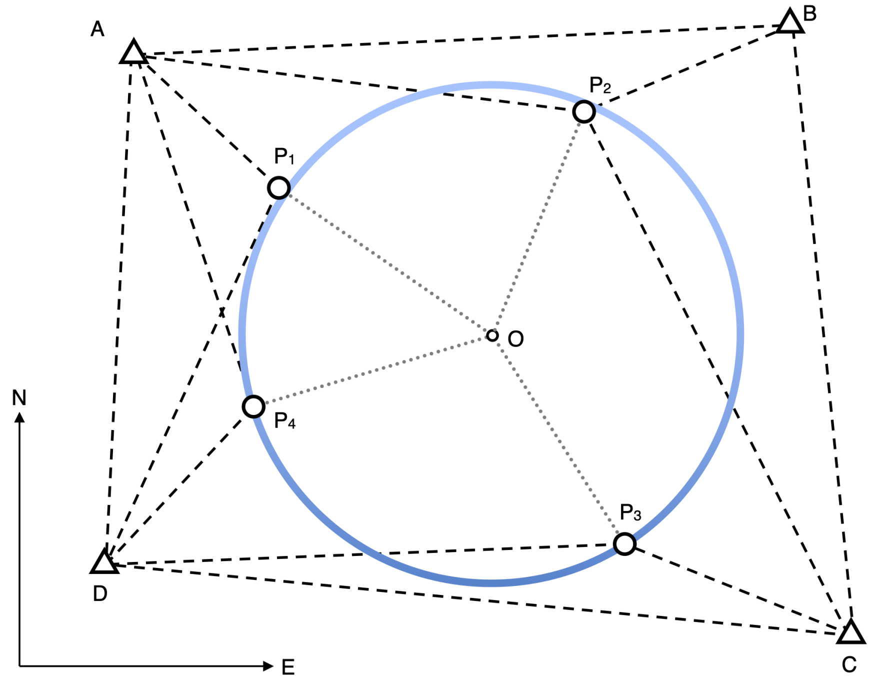

Figure 1: n observations depuis des points A à D vers les 4 points sur un cercle.

Les mesures et leur modèle paramétrique peuvent être résumés comme suit.

$$\begin{cases} \ell_1 - v_1 & = f_1(E_1, N_1, \cdots, E_4, N_4) \\ \quad\vdots & \qquad\qquad\vdots \\ \ell_n - v_n & = f_n(E_1, N_1, \cdots, E_4, N_4) \end{cases} \quad \texttt{ou} \quad \ell - \mathbf{v} = \mathbf{f}(E_1, N_1, \cdots E_4, N_4)$$

avec $n > u = 8$.

Les points P_1 à P_4 doivent former un cercle dont le rayon n'est pas spécifié. Or un cercle est défini par 3 points. Si un 4$^{\text{em}}$ point doit également s'y trouver, il faut imposer une contrainte à leurs coordonnées. En l'occurrence, il est laborieux d'exprimer une telle contrainte directement, sous la forme:

$g(\check{E}_1, \check{N}_1, \cdots, \check{E}_4, \check{N}_4) = 0 \quad$ ou $\quad g(\mathring{E}_1, \mathring{N}_1, \cdots, \mathring{E}_4, \mathring{N}_4) = t$

Mieux vaut recourir à des paramètres auxiliaires. Même si l'on ne souhaite pas déterminer le centre O du cercle et son rayon R, il est plus facile d'exprimer 4 contraintes faisant intervenir $\mathrm{E_O}$, $\mathrm{N_O}$ et R.

$$\begin{cases} (\check{E}_1 - \check{E}_O)^2 + (\check{N}_1 - \check{N}_O)^2 - \check{R}^2 = 0 \\ \vdots \\ (\check{E}_4 - \check{E}_O)^2 + (\check{N}_4 - \check{N}_O)^2 - \check{R}^2 = 0 \end{cases} \quad \texttt{ou} \quad \mathbf{g}(\check{E}_1, \check{N}_1, \cdots, \check{E}_4, \check{N}_4, \check{E}_O, \check{N}_O, \check{R})$$

Si l'on élimine les 3 paramètres auxiliaires de ces 4 équations, on obtient une contrainte sans paramètre auxiliaire: celle qui a été évoquée plus haut (bon courage!).

Le polycopié présente diverses variantes pour combiner le modèle paramétrique $\mathbf{f}$ et les contraintes $\mathbf{g}$.

En l'occurrence, une alternative mérite une attention particulière: les observations fictives ou pseudo-observations. Pour forcer un point sur un cercle, on prétend que l'on mesure un écart nul entre le point et le cercle, avec un écart-type nettement plus faible que celui des observations réelles.

$$\begin{cases} 0 - v_{P_1} = f_1(E_1, N_1, E_O, N_O, R) = \sqrt{(E_1 - E_O)^2 + (N_1 - N_O)^2} - R \\ \vdots \\ 0 - v_{P_4} = f_1(E_4, N_4, E_O, N_O, R) = \sqrt{(E_4 - E_O)^2 + (N_4 - N_O)^2} - R \end{cases}$$

L'intérêt de cette approche est de pouvoir ajouter ces équations à celles des observations réelles et résoudre le problème en restant dans le cadre de la compensation paramétrique.