Exemple de compensation paramètrique avec contraintes

Méthodes d'estimation

Cercle ajusté par moindres carrés

Cet exemple illustre la théorie présentée lors la dernière session du cours.

Les coordonnées est et nord (E_i, N_i) des points A à D sont connues (symbole : triangle sur l'image dessous). Sur ces points, vous réalisez des mesures des distances ainsi que des visées (orientations) vers les points P_1 à P_4 inconnus (symbole : cercle), afin de déterminer leurs coordonnées.

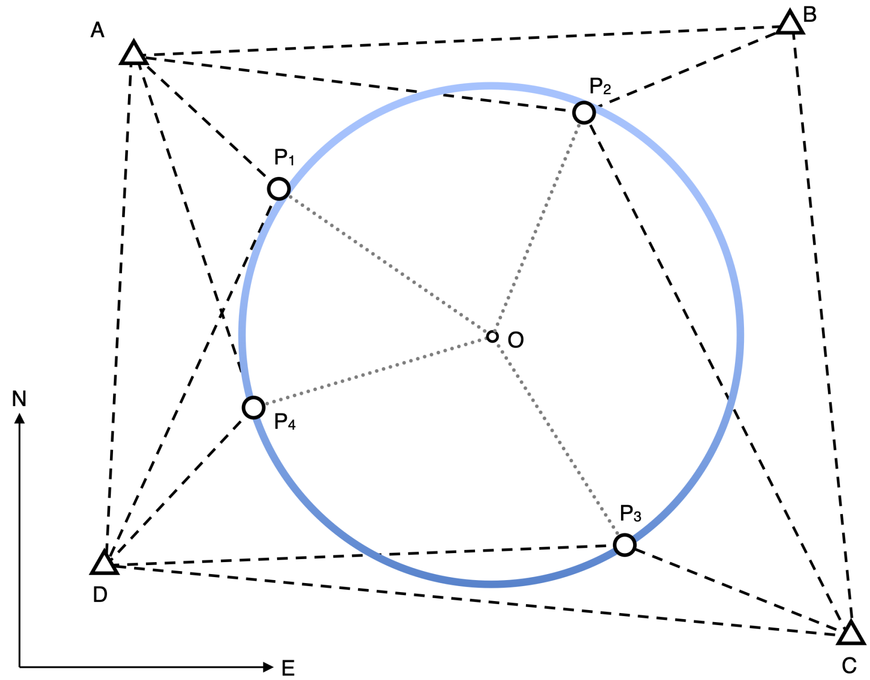

Figure 1: n observations depuis des points A à D vers les 4 points sur un cercle.

Les mesures et leur modèle paramétrique peuvent être résumés comme suit.

$$\begin{cases} \ell_1 - v_1 & = f_1(E_1, N_1, \cdots, E_4, N_4) \\ \quad\vdots & \qquad\qquad\vdots \\ \ell_n - v_n & = f_n(E_1, N_1, \cdots, E_4, N_4) \end{cases} \quad \texttt{ou} \quad \ell - \mathbf{v} = \mathbf{f}(E_1, N_1, \cdots E_4, N_4)$$

avec $n > u = 8$.

Les points P_1 à P_4 doivent former un cercle dont le rayon n'est pas spécifié. Or un cercle est défini par 3 points. Si un 4$^{\text{em}}$ point doit également s'y trouver, il faut imposer une contrainte à leurs coordonnées. En l'occurrence, il est laborieux d'exprimer une telle contrainte directement, sous la forme:

$g(\check{E}_1, \check{N}_1, \cdots, \check{E}_4, \check{N}_4) = 0 \quad$ ou $\quad g(\mathring{E}_1, \mathring{N}_1, \cdots, \mathring{E}_4, \mathring{N}_4) = t$

Mieux vaut recourir à des paramètres auxiliaires. Même si l'on ne souhaite pas déterminer le centre O du cercle et son rayon R, il est plus facile d'exprimer 4 contraintes faisant intervenir les coordonnés de centre $\mathrm{E_O}$, $\mathrm{N_O}$ et le rayon R.

$$\begin{cases} (\check{E}_1 - \check{E}_O)^2 + (\check{N}_1 - \check{N}_O)^2 - \check{R}^2 = 0 \\ \vdots \\ (\check{E}_4 - \check{E}_O)^2 + (\check{N}_4 - \check{N}_O)^2 - \check{R}^2 = 0 \end{cases} \quad \texttt{ou} \quad \mathbf{g}(\check{E}_1, \check{N}_1, \cdots, \check{E}_4, \check{N}_4, \check{E}_O, \check{N}_O, \check{R})$$

Si l'on élimine les 3 paramètres auxiliaires de ces 4 équations, on obtient une contrainte sans paramètre auxiliaire: celle qui a été évoquée plus haut (bon courage!).

Le polycopié présente diverses variantes pour combiner le modèle paramétrique **f** et les contraintes **g**.

En l'occurrence, une alternative mérite une attention particulière: les observations fictives ou pseudo-observations. Pour forcer un point sur un cercle, on prétend que l'on mesure un écart nul entre le point et le cercle, avec un écart-type nettement plus faible que celui des observations réelles.

$$\begin{cases} 0 - v_{P_1} = f_1(E_1, N_1, E_O, N_O, R) = \sqrt{(E_1 - E_O)^2 + (N_1 - N_O)^2} - R \\ \vdots \\ 0 - v_{P_4} = f_1(E_4, N_4, E_O, N_O, R) = \sqrt{(E_4 - E_O)^2 + (N_4 - N_O)^2} - R \end{cases}$$

L'intérêt de cette approche est de pouvoir ajouter ces équations à celles des observations réelles et résoudre le problème en restant dans le cadre de la compensation paramétrique.