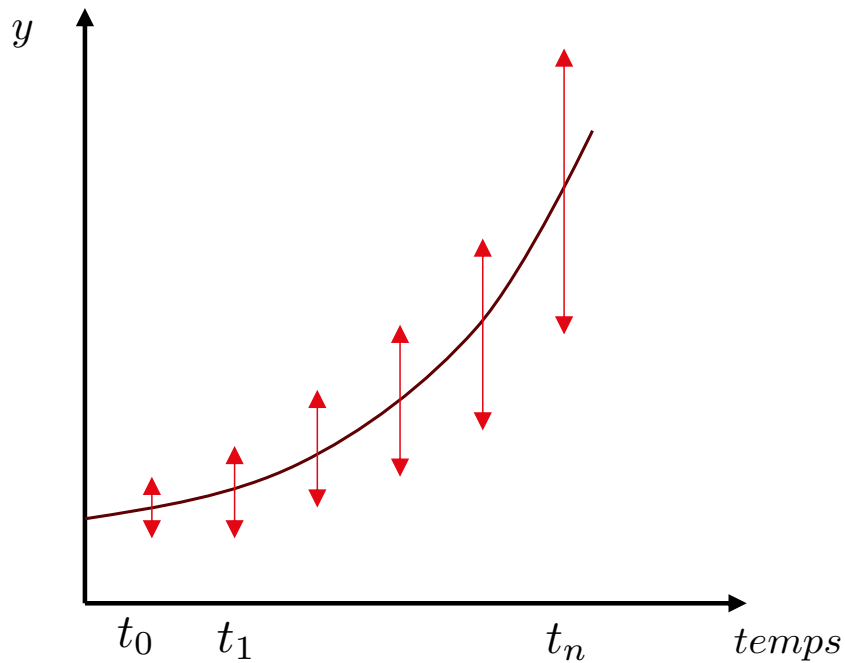
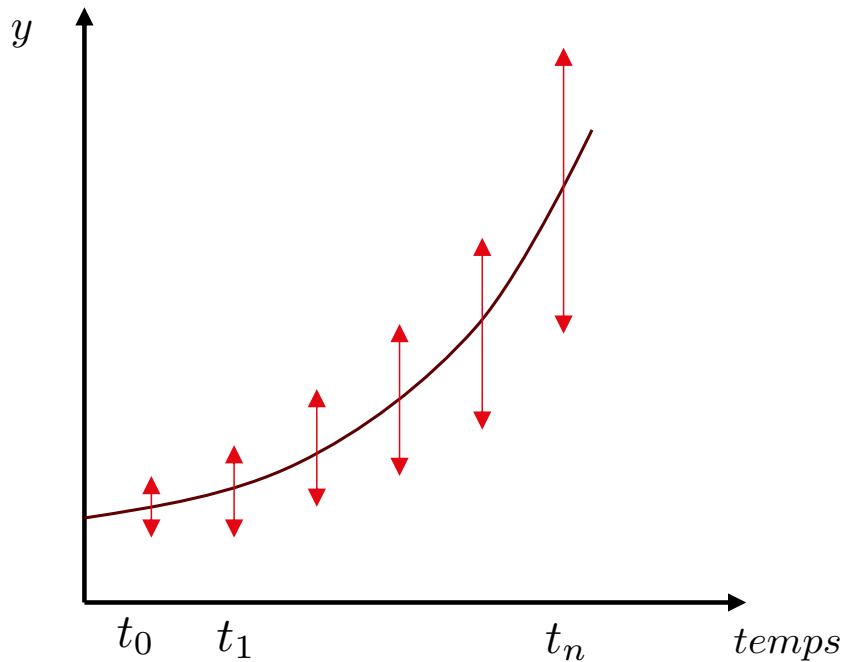




- En comptant les bactéries:
 - L'erreur augment avec le no. de bactéries
 - Ce sont ne pas les cas de triangles ou les mesures ont la même précision!
 - On suppose que le mesures de temps sont parfaits (pas d'erreur selon l'axe horizontal)



- Modèle fonctionnel:

$$\begin{cases} \ell_1 - v_1 = y_1 = y_0 \cdot e^{b(t_1 - t_0)} \\ \vdots \\ \ell_n - v_n = y_n = y_0 \cdot e^{b(t_n - t_0)} \end{cases}$$

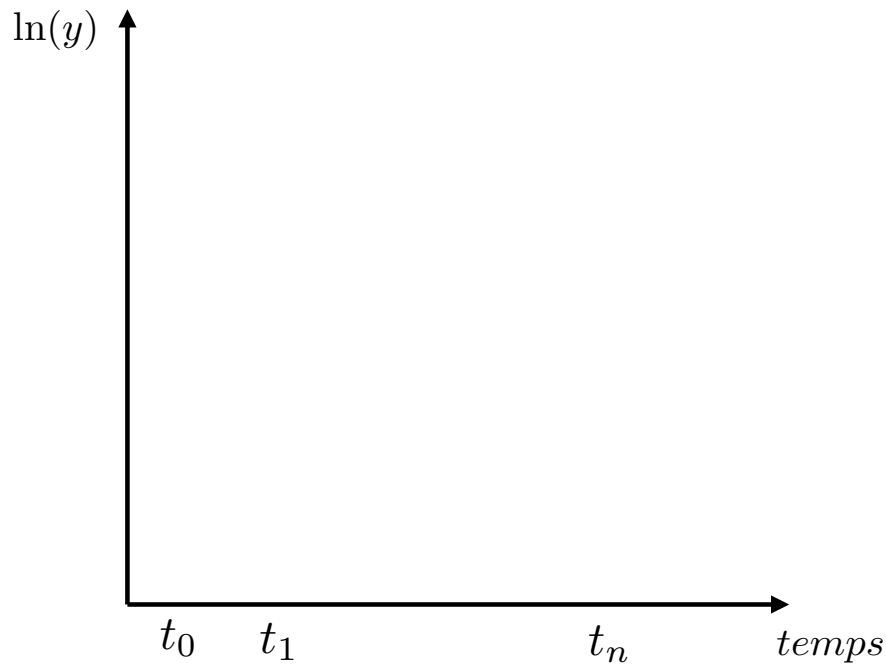
- Modèle stochastique:

$$\sigma \ell_i \propto \ell_i \quad \sigma_{\ell_i} = \underbrace{c \cdot \ell_i}_{\text{une certaine proportion}} \quad K_{\ell\ell} = c^2 \cdot \begin{bmatrix} \ell_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ell_n^2 \end{bmatrix}$$

- Paramètres:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_0 \\ b \end{bmatrix} \quad \text{puis } \hat{\mathbf{x}} + \delta \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{b} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \begin{bmatrix} q_{\hat{y}_0}^2 & q_{\hat{y}_0 \hat{b}} \\ q_{\hat{y}_0 \hat{b}} & q_{\hat{b}}^2 \end{bmatrix}$$

Croissance bactérienne – changer les observations



- C'est cas particulière invite à les simplifications:

$$\begin{cases} \ell_1^* - v_1^* = \ln(y_1) = \overbrace{\ln(y_0)}^a + b(t_1 - t_0) \\ \vdots \\ \ell_n^* - v_n^* = \ln(y_n) = \ln(y_0) + b(t_n - t_0) \end{cases}$$

- Modèle stochastique:

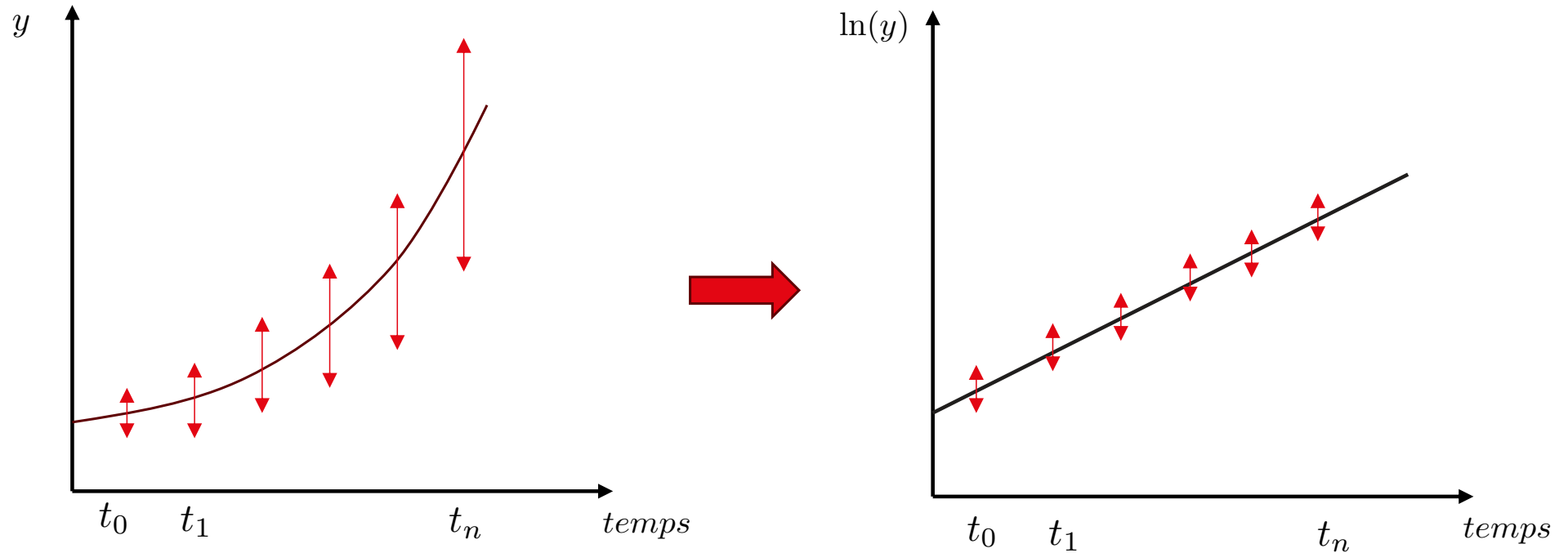
$$\ell_i^* = f(\ell_i) \longrightarrow \frac{\delta \ell_i^*}{\delta \ell_i} = \frac{\partial \ln(\ell_i)}{\partial \ell_i} = \frac{1}{\ell_i}$$

$$\ell_i^* = \begin{bmatrix} \delta \ell_1^* \\ \vdots \\ \delta \ell_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\ell_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \ell_1 \\ \vdots \\ \delta \ell_n \end{bmatrix}$$

- Propagation de variances:

$$\mathbf{K}_{\ell^* \ell^*} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{K}_{\ell \ell} \cdot \mathbf{F}^T = c^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell_1} \ell_1^2 \frac{1}{\ell_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\ell_n} \ell_n^2 \frac{1}{\ell_n} \end{bmatrix} = c^2 \cdot \underbrace{\mathbf{I}_n}_{\mathbf{Q}_{\ell^* \ell^*}}$$

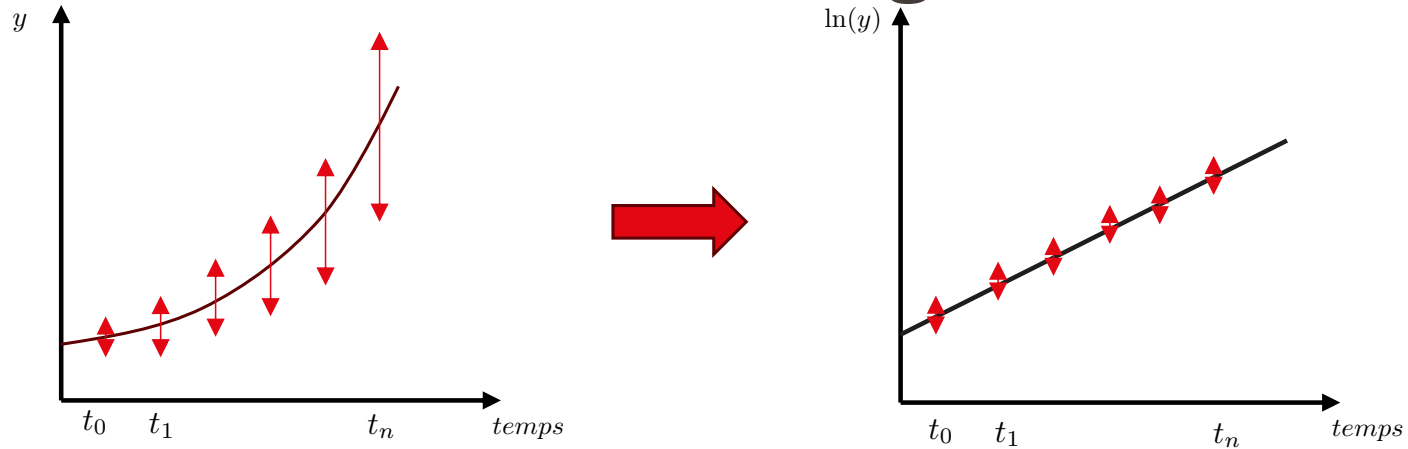
Croissance bactérienne - changer les observations



- On obtienne :
 - Comme dans l'exemple de régression linéaire, mais ...

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \begin{bmatrix} q_{\hat{a}}^2 & q_{\hat{a}\hat{b}} \\ q_{\hat{a}\hat{b}} & q_{\hat{b}}^2 \end{bmatrix} \quad \hat{a} = \ln(y_0) \implies y_0 = e^{\hat{a}} \\ \sigma_{y_0} = ? \quad \text{!}$$

Croissance bactérienne - changer les observations



- On considère 4 cas :

1. y_0 inconnu



2. y_0 observé

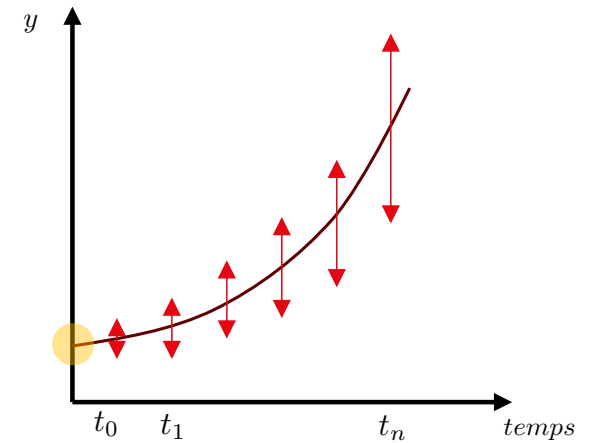
3. $\sigma_{y_0} = 0$

4. différenciation

Croissance bactérienne

■ cas 2. y_0 observé

- Nouvelle mesure $\ell_{y_0} - v_{y_0} = y_0$
- attention $\sigma_{\ell_0} \neq \underbrace{c \cdot \ell_0}_{\text{souvent plus précis}}$
- → modèle stochastique moins simple!



1. y_0 inconnu



3. $\sigma_{y_0} = 0$

4. différenciation

Croissance bactérienne

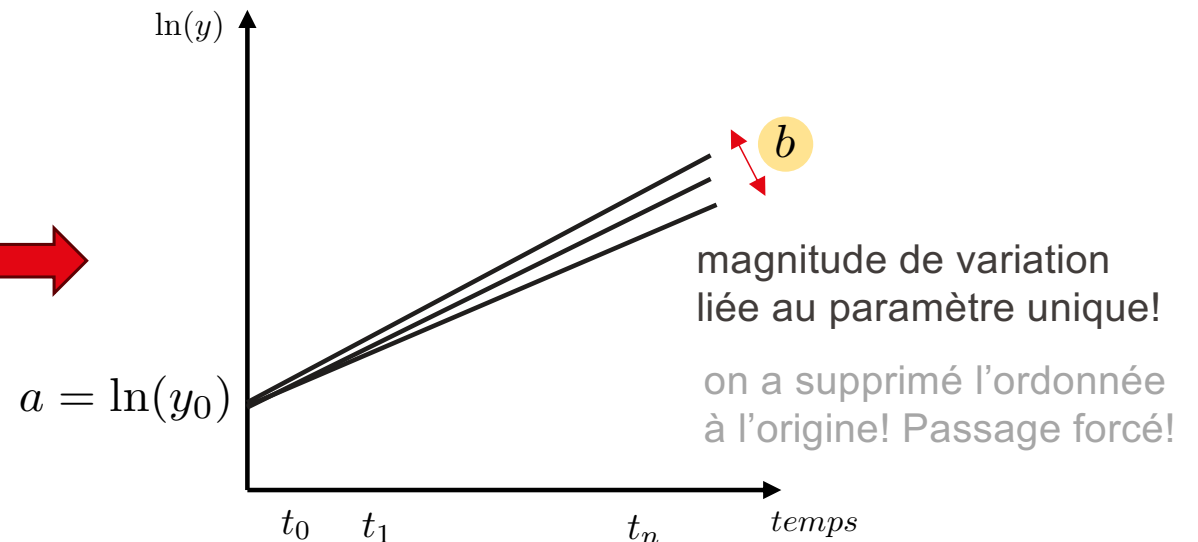
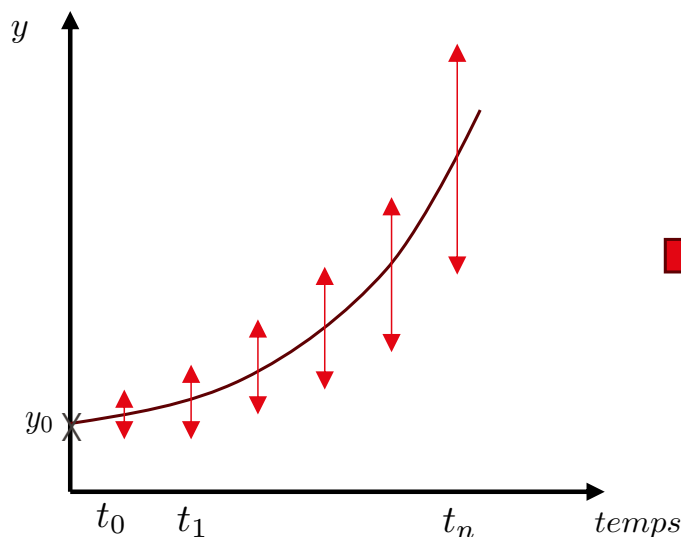
■ cas 3. $\sigma_{y_0} = 0$

1. Fix y_0 dans le modèle $\rightarrow$ 1 paramètre
2. Ajouter observation » pseudo »
 - Avec poids 10x $\rightarrow$ 100x plus élevé

$$y_0^* = \ln(y_0) = a$$

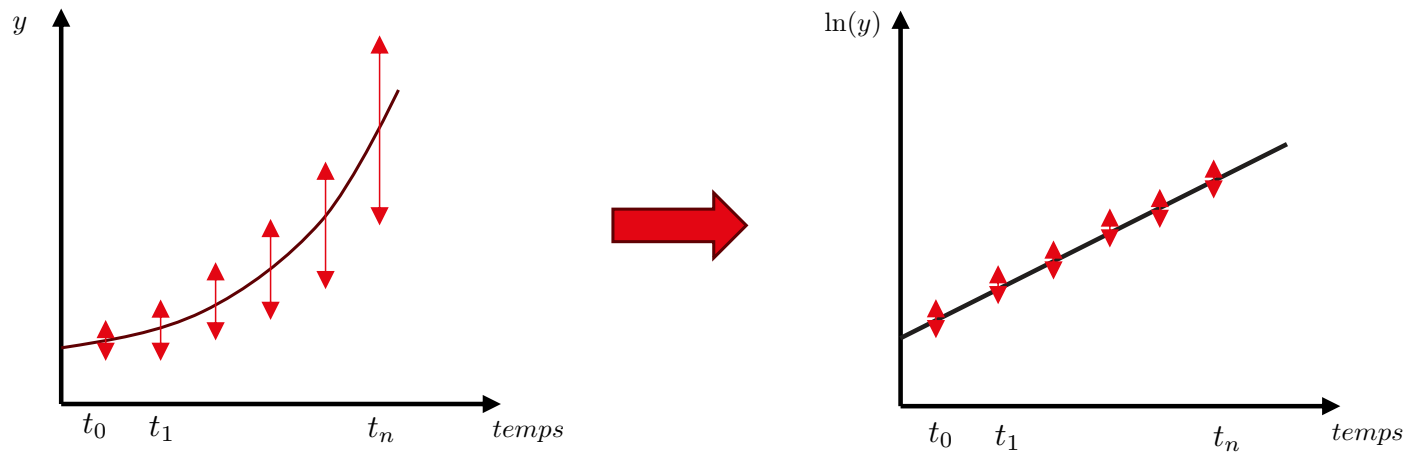
$$y_i^* = y_0^* + b(t - t_0)$$

$$(y_i^* - y_0^*) = b(t - t_0)$$



Régression inadéquate! Mieux – changé origine!

Croissance bactérienne - changer les observations



- On considère 4 cas :

1. y_0 inconnu



2. y_0 observé



3. $\sigma_{y_0} = 0$



4. différenciation

Croissance bactérienne - changer les observations

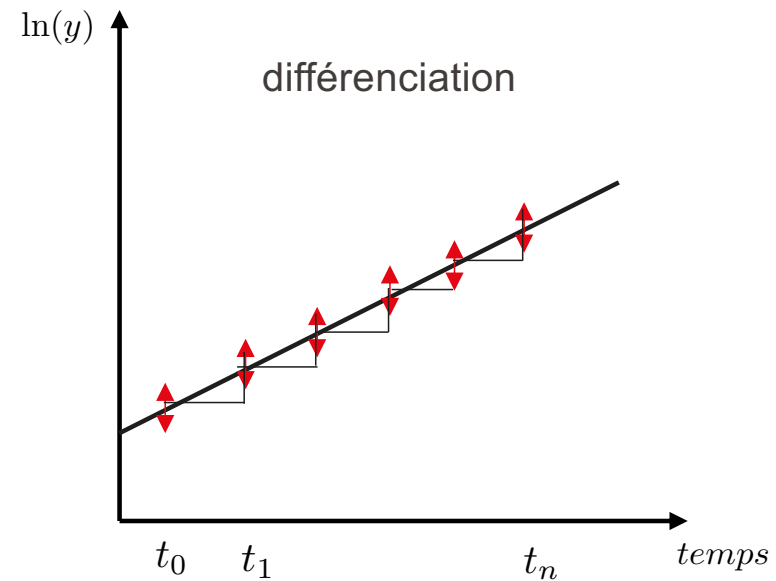
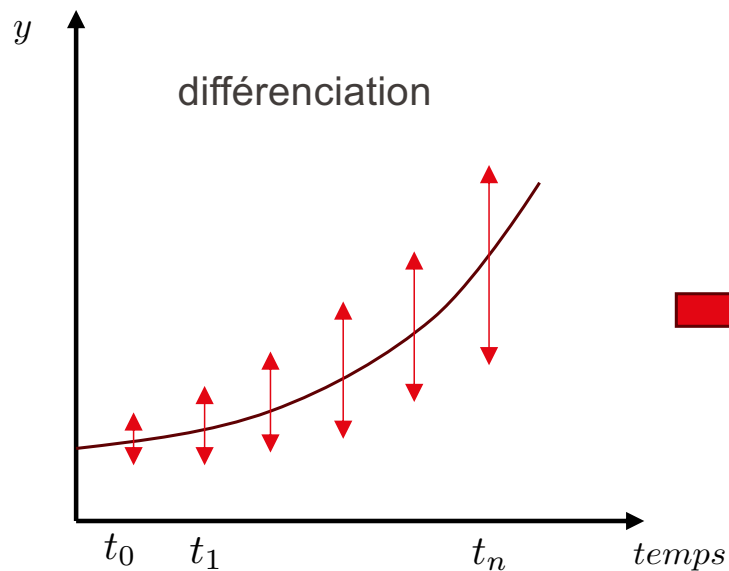
cas

4. différenciation

1. on différencie entre les observations dans le temps

- n-1 observations
- 1 param. (b)

$$\begin{cases} \ell_1^+ = \ell_2^* - \ell_1^* = (a + bt_2) - (a + bt_1) = b(t_2 - t_1) \\ \vdots \\ \ell_{n-1}^+ = \ell_n^* - \ell_{n-1}^* = b(t_n - t_{n-1}) \end{cases}$$



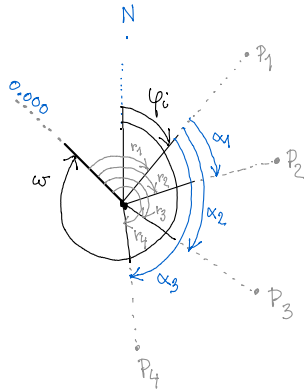
■ cas

4. différenciation

- On diffèrece entre les observations dans le temps :
 - (n-1) observations
 - 1 param. (b), (a) a été éliminé

$$\begin{cases} \ell_1^+ = \ell_2^* - \ell_1^* = (a + bt_2) - (a + bt_1) = b(t_2 - t_1) \\ \vdots \\ \ell_{n-1}^+ = \ell_n^* - \ell_{n-1}^* = b(t_n - t_{n-1}) \end{cases}$$

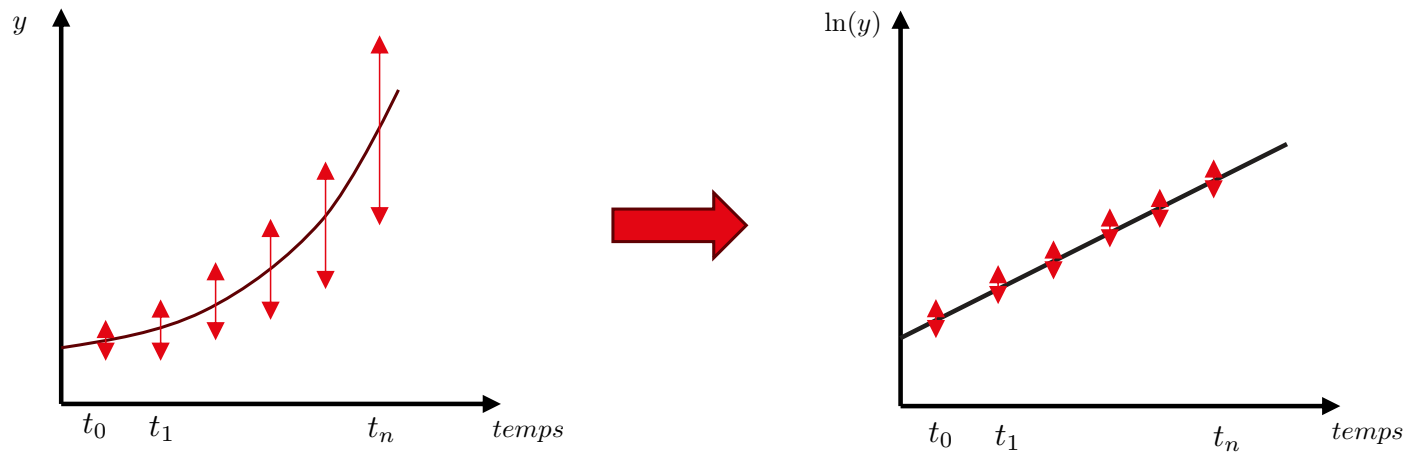
- D'autre implication
 - les différences sont corrélées négativement !
 - (corrélacion induite)



$$\begin{bmatrix} \ell_1^+ \\ \vdots \\ \ell_{n-1}^+ \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} \ell_1^* \\ \vdots \\ \ell_n^* \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\ell^+ \ell^+} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{K}_{\ell^* \ell^*} \cdot \mathbf{D}^T$$

Changement de observations



■ 4 cas :

1. y_0 inconnu



2. y_0 observé



3. $\sigma_{y_0} = 0$



4. différenciation

