

Analyse spectrale numérique (Chapitre 8)

Prof. Pascal Frossard
Laboratoire de traitement de signal (LTS4)
EPFL



Traitement des signaux, automne 2024
Prof. Pascal Frossard

EPFL

196

Plan

- Analyse spectrale pour caractériser les signaux aléatoires
 - Estimation de la fonction de corrélation: analyse du comportement temporel
 - Estimation de la DSP: analyse des composantes fréquentielles
 - Mais: distorsion due à la durée finie des observations
- Méthodes non-paramétriques
 - Lissage et moyennage pour une meilleure description fréquentielle
- Méthodes paramétriques
 - Utilisation de connaissances *à priori* ou d'un modèle de signal



Traitement des signaux, automne 2024
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Analyse spectrale

- On cherche à caractériser ou **analyser des signaux aléatoires**
- Les signaux aléatoires sont rarement à énergie finie
 - Les transformations classiques (p.ex. Fourier) ne sont pas applicables
- On utilise alors plutôt des outils d'analyse et d'estimation
 - Détermination des propriétés statistiques des signaux aléatoires
 - Estimation des fonctions de corrélation
 - Représentation fréquentielle de signaux aléatoires, après fenêtrage
- Applications possibles
 - Calcul des propriétés statistiques d'un signal inconnu
 - Découverte de composantes spectrales dans un signal bruité
 - Domaines d'applications: géophysique, biomédical, systèmes de communication, etc.



Que cherche-t-on?

- Généralement on calcule les statistiques de 1er et 2ème ordre seulement, c'est-à-dire la moyenne et la variance
 - On calcule essentiellement des énergies ou des puissances physiques
 - Les bruits physiques sont souvent Gaussiens (donc caractérisés par stat. d'ordre 2)
 - Les calculs d'optimisation donnent des formes linéaires: joli!
 - L'estimation de paramètres linéaires par minimisation de moindres carrés est optimale pour les processus Gaussiens.
- L'analyse des signaux aléatoires utilise généralement soit
 - l'estimation de l'autocorrélation ou de l'intercorrélation
 - l'estimation de la densité spectrale de puissance



Représentation spectrale d'un signal

- Pour un signal déterministe (à énergie finie) on a (Wiener-Khintchine)

$$r_{xx}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)x(n+k) \quad S_{xx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}(k)e^{-j2\pi fk} \quad \text{méthode 1}$$

- On peut donc calculer la DSE par la méthode indirecte (par le calcul de la fonction d'autocorrélation), ou directement

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2 = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi fn} \right|^2 \quad \text{méthode 2}$$

- En pratique, on ne calcule qu'avec un nombre fini d'échantillons
 - La limitation de la durée est équivalente à un fenêtrage, et à un lissage du spectre

$$\tilde{x}(n) = x(n) \quad w(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tilde{X}(f) = X(f) * W(f) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\alpha)W(f-\alpha)d\alpha$$



Distorsion de la DSE

- Le limitation de la durée d'observation introduit des erreurs d'approximation dans le calcul du spectre

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) = |\tilde{X}(f)|^2 = \left| \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j2\pi fn} \right|^2$$

- Si le spectre est calculé par la TFD, on obtient une version approximative du spectre discret $S_{xx}\left(\frac{k}{N}\right)$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j2\pi kn/N} \quad \left| \tilde{X}(k) \right|^2 = S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f)|_{f=k/N} = S_{\tilde{x}\tilde{x}}\left(\frac{k}{N}\right)$$

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}\left(\frac{k}{N}\right) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j2\pi kn/N} \right|^2$$



Illustration: Effet de la fenêtre

- Détermination du spectre d'un signal multiplié par une fenêtre

- Spectre original:

$$X(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq 0.1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

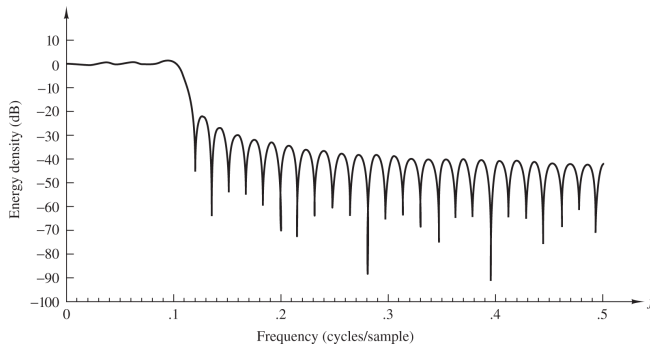


Figure 14.1.1 Spectrum obtained by convolving an $M = 61$ rectangular window with the ideal lowpass spectrum in Example 14.1.1.

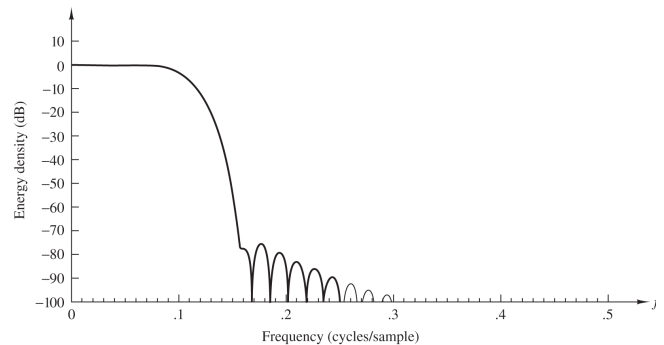


Figure 14.1.2 Spectrum obtained by convolving an $M = 61$ Blackman window with the ideal lowpass spectrum in Example 14.1.1.

Figures de [1].



Traitement des signaux, automne 2024
Prof. Pascal Frossard



202

Elargissement du spectre

- Elargissement du spectre dépendant de la taille de la fenêtre
 - Problème pour distinguer des composantes fréquentielles proches
- La largeur de la fenêtre (fréquentielle) doit être plus petite que la résolution recherchée Δf
- Le choix de la fenêtre est un *compromis* entre **lissage** et **fuites d'énergie**

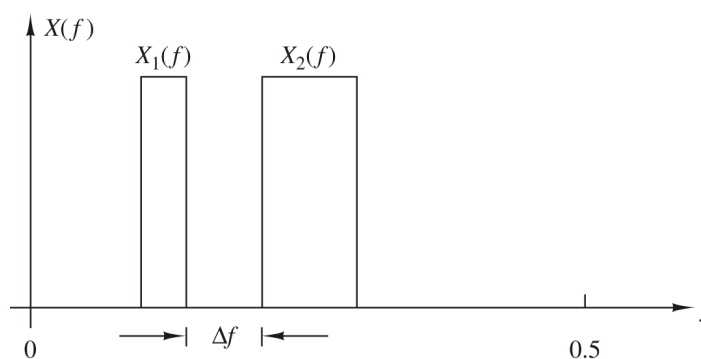


Figure 14.1.3 Two narrowband signal spectra.

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2024
Prof. Pascal Frossard



Et pour les signaux aléatoires?

- Les signaux aléatoires obéissent à des lois statistiques
 - Ils n'ont pas de description temporelle analytique
- On cherche essentiellement une description fréquentielle de ces signaux
 - Importance des différentes composantes fréquentielles: **Spectre de puissance**
- Sous des conditions d'*ergodicité* et de *stationnarité*, une réalisation est considérée comme typique ou représentative
 - On calcule les propriétés statistiques du signal à partir d'une seule réalisation
- Autocorrélation et DSP (processus) sont liées par Wiener-Khintchine

$$\gamma_{xx}(\tau) = E[x^*(t)x(t+\tau)] \quad \Gamma_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(t)e^{-j\omega t} dt$$



Description fréquentielle

- On peut obtenir la fonction d'autocorrélation temporelle
 - calculée sur une réalisation, de durée finie

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x^*(t)x(t+\tau) dt$$

- Si le processus est ergodique pour la moyenne et la corrélation, on obtient une estimation de la fonction d'autocorrélation (statistique)

$$\gamma_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x^*(t)x(t+\tau) dt$$

- Finalement, la DSP est donnée par $\Gamma_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(t)e^{-j\omega t} dt$ *méthode 1*
- On peut aussi avoir une estimation *directe* de la DSP:

$$\Gamma_{xx}(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} E[P_{xx}(\omega)] \quad \text{méthode 2}$$

$$P_{xx}(\omega) = \int_{-T_0}^{T_0} R_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \left[\int_{-T_0}^{T_0} x^*(t)x(t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2T_0} \left| \int_{-T_0}^{T_0} x(t)e^{-j\omega t} dt \right|^2$$



Corrélation de signaux discrets

- On considère que le signal aléatoire est correctement échantillonné, $F_s > 2B$
- On obtient un signal de durée finie en prenant N échantillons

$$x(n), \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

- On peut tout d'abord estimer une moyenne temporelle de la fonction d'autocorrélation

$$r'_{xx}(m) = \frac{1}{N - m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n)x(n+m), \quad m = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$r'_{xx}(m) = [r'_{xx}(-m)]^*$$



Propriétés du premier estimateur

- L'estimateur de l'autocorrélation est non biaisé

$$E[r'_{xx}(m)] = \frac{1}{N - m} \sum_{n=0}^{N-m-1} E[x^*(n)x(n+m)] = \gamma_{xx}(m)$$

- On peut aussi montrer que [JenkinsWatts:1968]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_{xx}(n)|^2 < \infty \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}[r'_{xx}(m)] = 0$$

- L'estimateur de la corrélation est **consistant**, puisqu'il est non biaisé et que sa variance tend vers 0 quand N est grand.
- Pour de grands lags (m), l'estimateur $r'_{xx}(m)$ a une grande variance
 - Quand m approche N , peu de points sont pris en compte dans l'estimation



Deuxième estimateur de corrélation

- On peut utiliser un autre estimateur de la corrélation

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n)x(n+m), \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

- Cet estimateur est par contre biaisé

$$E[r_{xx}(m)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} E[x^*(n)x(n+m)] = \frac{N-|m|}{N} \gamma_{xx}(m) = \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \gamma_{xx}(m)$$

- mais il a une variance plus petite que $r'_{xx}(m)$

$$\text{var}[r_{xx}(m)] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\gamma_{xx}(n)^2 + \gamma_{xx}^*(n-m)\gamma_{xx}(n+m)]$$

- L'estimateur est quand même consistant, puisque si $N \rightarrow \infty$, sa variance est nulle, et il devient non biaisé

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[r_{xx}(m)] = \gamma_{xx}(m)$$



Estimateurs de corrélation: résumé

- L'estimateur non biaisé a une grande variance pour m proche de N
 - variance trop élevée
- L'estimateur biaisé n'a pas ce problème
 - la variance n'augmente pas aussi rapidement avec m
 - par contre, le biais augmente avec m !!!
- Dans les deux cas, on peut améliorer les estimations en augmentant la durée d'observation, N
 - L'estimateur biaisé devient non biaisé
 - Le problème de la variance est déplacée vers les plus grandes valeurs de m
- L'erreur quadratique moyenne de l'estimateur biaisé est inférieure à celle de l'estimateur non biaisé [Jenkins et Watts]
 - on préfère souvent l'estimateur biaisé (paradoxalement)



Estimateur spectral: périodogramme

- La DSP peut être calculée à l'aide de l'estimation de l'autocorrélation

$$P_{xx}(f) = \sum_{m=-N+1}^{N-1} r_{xx}(m) e^{-j2\pi f m} = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi f n} \right|^2 = \frac{1}{N} |X(f)|^2$$

- Cette forme est appelée **périodogramme** (permet la détection de périodicité cachée)

- La DSP peut aussi être calculée de manière directe, par la transformée de Fourier de la séquence échantillonnée

- Calcul de $X(f)$ par TFD ou TFR, en N points

$$P_{xx}\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n k / N} \right|^2, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

- Pour une meilleure représentation, on peut faire du 'zero padding' ($L-N$ zéros)

$$P_{xx}\left(\frac{k}{L}\right) = \frac{1}{L} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j2\pi n k / L} \right|^2, \quad 0 \leq k \leq L-1$$

Résolution
donnée par $N!!!$



Traitement des signaux, automne 2024
Prof. Pascal Frossard

EPFL

210

Illustration: calcul de DSP par FFT

- Séquence de $N=16$ points, obtenus par échantillonnage

$$x(n) = \sin 2\pi(0.135)n + \cos 2\pi(0.135 + \Delta f)n, \quad n = 0, 1, \dots, 15$$

- On évalue la DSP à $f_k = k/L$ et on varie L en ajoutant des zéros au signal $x(n)$.

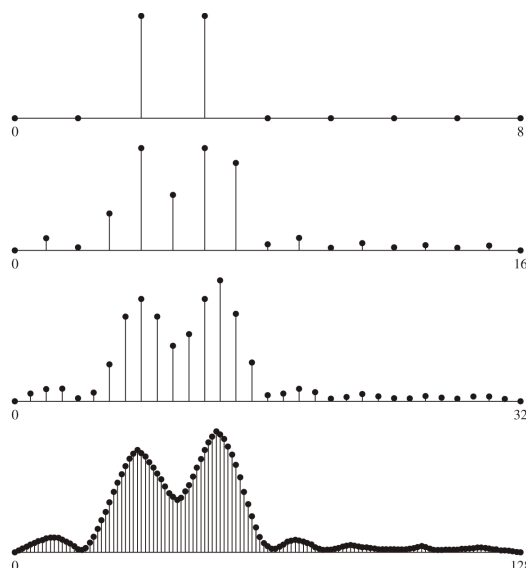


Figure 14.1.4 Spectra of two sinusoids with frequency separation $\Delta f = 0.06$.

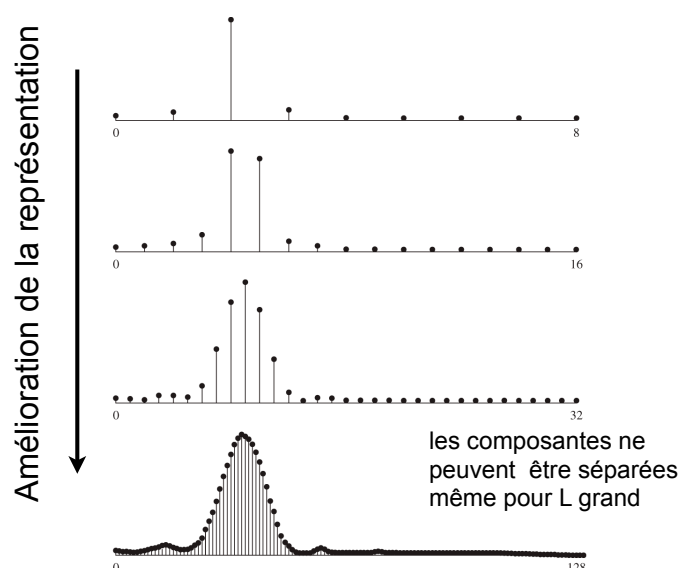


Figure 14.1.5 Spectra of two sinusoids with frequency separation $\Delta f = 0.01$.
Figures de [1].



Traitement des signaux, automne 2024
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Estimation par périodogramme

- La valeur moyenne du périodogramme est donnée par

$$\begin{aligned} E[P_{xx}(f)] &= E \left[\sum_{m=-N+1}^{N-1} r_{xx}(m) e^{-j2\pi f m} \right] = \sum_{m=-N+1}^{N-1} E[r_{xx}(m)] e^{-j2\pi f m} \\ &= \sum_{m=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|m|}{N} \right) \gamma_{xx}(m) e^{-j2\pi f m} \end{aligned}$$

$\tilde{\gamma}_{xx}(m)$

- c'est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation fenêtrée (Bartlett)

$$E[P_{xx}(f)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}_{xx}(m) e^{-j2\pi f m} = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) W_B(f - \alpha) d\alpha$$

- La moyenne du périodogramme est une version lissée du spectre, avec des fuites d'énergie (effets de la fenêtre de Bartlett)



Propriétés du périodogramme

- Le spectre estimé est asymptotiquement non biaisé

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\sum_{m=-N+1}^{N-1} r_{xx}(m) e^{-j2\pi f m} \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(m) e^{-j2\pi f m} = \Gamma_{xx}(f)$$

- Par contre, la variance de $P_{xx}(f)$ ne converge pas vers 0
 - p.ex., pour un processus Gaussien $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}[P_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f)$
- Le périodogramme n'est **pas** un estimateur consistant pour la DSP
 - La variance ne dépend pas de la durée d'observation!
 - On doit trouver des astuces pour améliorer le comportement de l'estimateur simple (en profitant de l'**avantage du calcul par FFT**)



DSP: méthodes non-paramétriques

- But: augmenter la **consistance** de l'estimateur simple de la DSP
 - sans faire d'hypothèse sur la nature du signal
- Outils: moyennage et lissage du périodogramme
 - le périodogramme bénéficie de méthodes de calcul rapide (FFT)
 - modifications pour réduire la variance de l'estimateur simple
 - pénalité: perte de résolution fréquentielle
- Méthodes non-paramétriques principales
 - Méthode de Bartlett: moyenne des périodogrammes
 - Méthode de Welch: moyenne de périodogrammes modifiés
 - Méthode de Blackman et Tukey: lissage du périodogramme



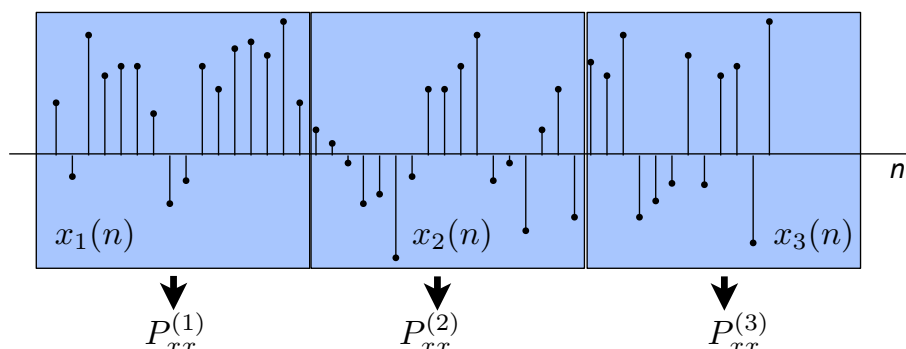
Méthode de Bartlett

- Diminution de la variance de l'estimateur par moyennage
- La séquence est divisée en K segments disjoints de longueur M

$$x_i(n) = x(n + iM), \quad 0 \leq i \leq K - 1, \quad 0 \leq n \leq M - 1$$

- Le périodogramme est calculé pour chaque segment

$$P_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_i(n) e^{-j2\pi f n} \right|^2, \quad 0 \leq i \leq K - 1 \quad P_{xx}^B(f) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} P_{xx}^{(i)}(f)$$



Bartlett: propriétés

- Propriétés: réduction de la résolution fréquentielle, et de la variance

$$E[P_{xx}^B(f)] = E[P_{xx}^{(i)}(f)] = \sum_{m=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \gamma_{xx}(m) e^{-j2\pi f m} = \frac{1}{M} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \left(\frac{\sin \pi(f - \alpha)M}{\sin \pi(f - \alpha)} \right)^2 d\alpha$$

$W_B(f)$

$$\text{var}[P_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K^2} \sum_{i=0}^{K-1} \text{var}[P_{xx}^{(i)}(f)] = \frac{1}{K} \text{var}[P_{xx}^{(i)}(f)] = \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f M}{M \sin 2\pi f} \right)^2 \right]$$

- La variance est réduite par un facteur K !
- Mais la résolution fréquentielle est aussi réduite, puisque chaque FFT est calculée avec $M = N/K$ points seulement (la largeur spectrale augmente d'un facteur K)

$$\text{Fenêtre de Bartlett: } w_B(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|m|}{M}, & |m| \leq M-1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$



Méthode de Welch

- Modifications de la méthode de Bartlett

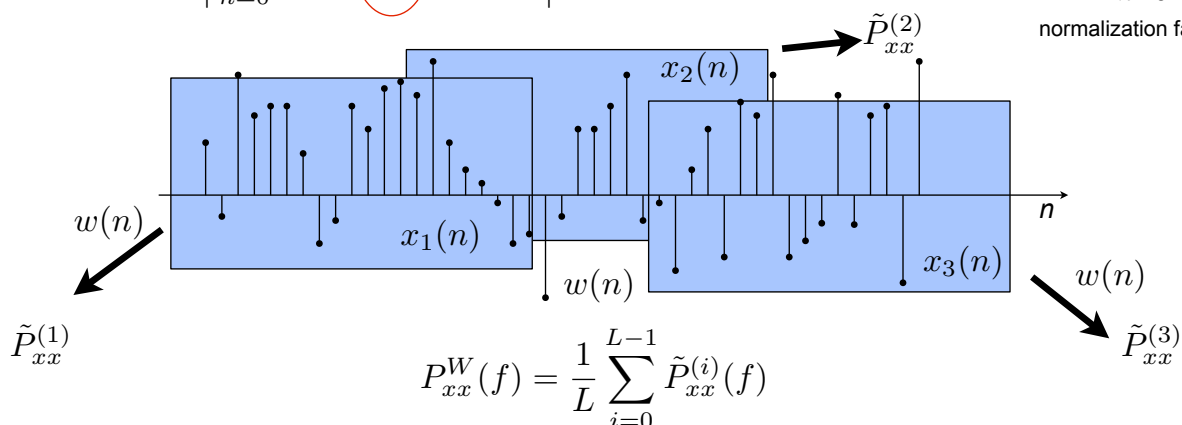
- les L segments peuvent se superposer

$$x_i(n) = x(n + iD), \quad 0 \leq n \leq M-1, \quad 0 \leq i \leq L-1$$

- fenêtrage des segments

$$\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_i(n) w(n) e^{-j2\pi f n} \right|^2, \quad 0 \leq i \leq L-1 \quad \text{avec} \quad U = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w^2(n)$$

normalization factor



Welch: propriétés

- Propriétés: variance plus petite, mais lissage fréquentiel

$$E[P_{xx}^W(f)] = E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) W(f - \alpha) d\alpha$$

avec $W(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} w(n) e^{-j2\pi f n} \right|^2$

- si $w(n)$ est une fenêtre triangulaire:

sans overlap: $\text{var}[P_{xx}^W(f)] \approx \frac{1}{L} \Gamma_{xx}^2(f)$ 50% overlap: $\text{var}[P_{xx}^W(f)] \approx \frac{9}{8L} \Gamma_{xx}^2(f)$

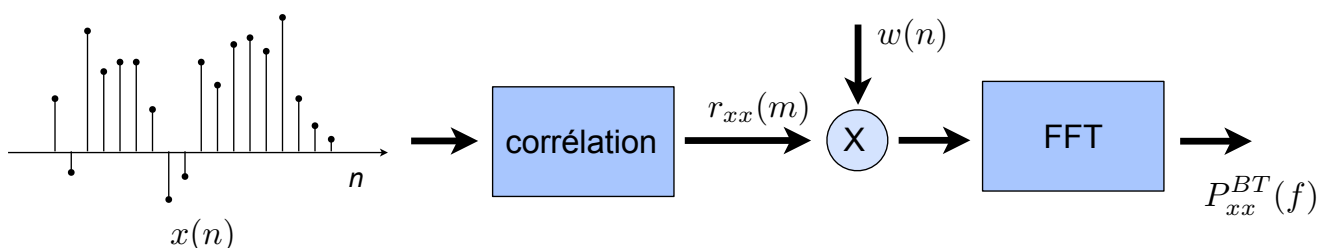
- si $D = M$, et fenêtre rectangulaire, méthode équivalente à Bartlett



Méthode de Blackman-Tukey

- Fenêtrage de l'autocorrélation, puis transformation de Fourier
 - valeurs de l'autocorrélation peu fiables pour m grand (peu de points de calcul)
 - on peut donner un poids $w(m)$ plus petit à ces valeurs

$$P_{xx}^{BT}(f) = \sum_{m=-M+1}^{M-1} r_{xx}(m) w(m) e^{-j2\pi f m} = \int_{-1/2}^{1/2} P_{xx}(\alpha) W(f - \alpha) d\alpha$$



Blackman-Tukey: Propriétés

- Propriétés de la méthode de Blackman-Tukey

$$E[P_{xx}^{BT}(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} E[P_{xx}(\alpha)] W(f - \alpha) d\alpha = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(\alpha - \theta) W(f - \alpha) d\alpha d\theta$$

$$E[P_{xx}^{BT}(f)] = \sum_{m=-M+1}^{M-1} E[r_{xx}(m)] w(m) e^{-j2\pi f m} = \sum_{m=-M+1}^{M-1} \gamma_{xx}(m) w_B(m) w(m) e^{-j2\pi f m}$$

$$\text{avec } w_B(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|m|}{N}, & |m| \leq N \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

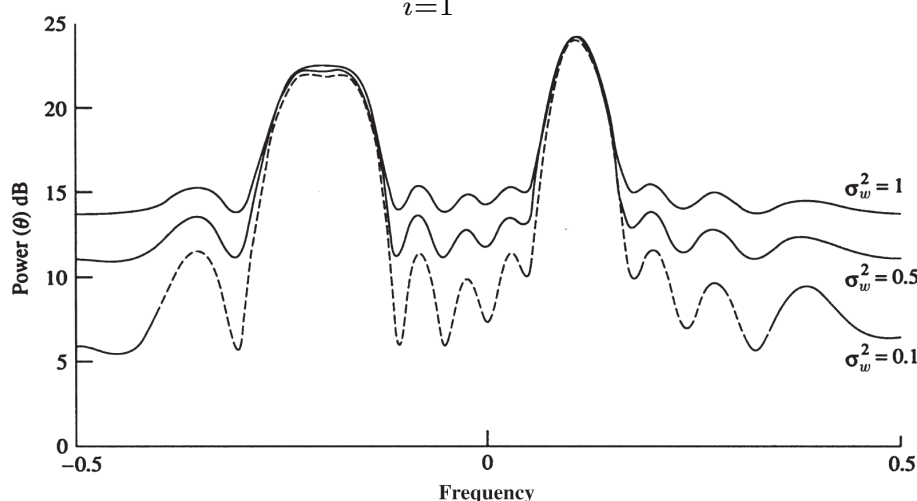
- lissage du périodogramme, si $w(n)$ est plus étroit que $w_B(n)$
- réduction de la variance: $\text{var}[P_{xx}^{BT}(f)] \approx \Gamma_{xx}^2(f) \left[\frac{1}{N} \sum_{m=-M+1}^{M-1} w^2(m) \right]$ (si processus Gaussien)



Illustration: Blackman-Tukey (M=12)

- Signal aléatoire composé de quatre sinusoïdes noyées dans un bruit $b(n)$

$$x(n) = \sum_{i=1}^4 \exp(j(2\pi f_i n) + \phi_i) + b(n)$$



$$f_1 = -0.22$$

$$f_2 = -0.166$$

$$f_3 = 0.1$$

$$f_4 = 0.122$$



Limitations des méthodes non-paramétriques

- Les méthodes non-paramétriques ont l'avantage d'être simples
 - calcul rapide par FFT
 - méthodes génériques: pas besoin de modèle du signal
- Par contre, elles souffrent de plusieurs limitations
 - besoin de longs signaux pour une bonne résolution fréquentielle
 - fuites d'énergie dues au fenêtrage (elles masquent les signaux faibles)
- Des hypothèses 'irréalistes' expliquent ces limitations
 - la fonction d'autocorrélation est nulle pour $m \geq N$
 - le périodogramme est périodique (période N)



Méthodes paramétriques

- Idée: on utilise un **modèle** du signal
- L'utilisation d'un modèle permet d'extrapoler les valeurs de la fonction d'autocorrélation pour $m \geq N$
 - plus besoin de fenêtrage (plus de fuites d'énergie)
 - meilleure résolution fréquentielle que les méthodes basées sur la FFT
 - des signaux de courte durée deviennent suffisants pour l'analyse (intéressant pour des phénomènes transitoires ou variables dans le temps)
- A partir du signal observé
 - on estime les paramètres du modèle du signal
 - on calcule la DSP à partir du modèle



Modèle donné par système linéaire

- Les signaux (stationnaires) observés sont souvent modélisés comme la sortie d'un système linéaire, excité par un signal aléatoire stationnaire $w(n)$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}$$

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^q b_k w(n-k)$$

$$\Gamma_{xx}(f) = |H(f)|^2 \Gamma_{ww}(f)$$

- si $w(n)$ est un bruit blanc, le DSP devient

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 |H(f)|^2 = \sigma_w^2 \frac{|B(f)|^2}{|A(f)|^2}$$

La DSP est donnée si les paramètres du modèle sont connus!



Modèles courants

- Modèle ARMA d'ordre (p, q)

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^q b_k w(n-k)$$

- Modèle AR d'ordre p si $b_0 = 1$ et $q = 0$

$$H(z) = 1/A(z)$$

- AR(p) est le modèle **le plus courant** (équations linéaires très simples)
- AR(p) permet de représenter un spectre avec des pics étroits (résonance)

- Modèle MA d'ordre q si $A(z) = 1$. On a alors $H(z) = B(z)$
 - rarement utilisé, ils nécessitent bp de paramètres pour une bonne estimation



Paramètres et autocorrélation

• Modèle ARMA

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}(m-k) & m > q \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}(m-k) + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{k+m} h(k) & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{xx}^*(-m) & m < 0 \end{cases}$$

- on voit que les paramètres $\{a_k\}$ permettent de calculer la corrélation pour $m > q$

• Modèle AR

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}(m-k) & m > 0 \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}(m-k) + \sigma_w^2 & m = 0 \\ \gamma_{xx}^*(-m) & m < 0 \end{cases} \quad \text{équations de Yule-Walker}$$

- le système peut se mettre sous la forme d'une matrice Toeplitz, et peut se résoudre par Levinson-Durbin
- la connaissance de $\{a_k\}$ permet d'étendre la séquence d'autocorrélation



AR: Méthode de Yule-Walker

1. Estimation de la fonction d'autocorrélation à partir du signal

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n)x(n+m), \quad m \geq 0$$

2. Solution des équations normales (γ_{xx} remplacé par r_{xx})

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \dots & r_{xx}(-p+1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(p-1) & r_{xx}(p-2) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{xx}(1) \\ r_{xx}(2) \\ \vdots \\ r_{xx}(p) \end{bmatrix}$$

Solution du système par Levinson-Durbin

3. L'estimation de la DSP devient

$$P_{xx}^{YW}(f) = \frac{\hat{\sigma}_{wp}^2}{|1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p(k) e^{-j2\pi f k}|^2} \quad \text{avec} \quad \hat{\sigma}_{wp}^2 = r_{xx}(0) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p(k) r_{xx}(-k)$$



AR: autres méthodes

- D'autres méthodes ont été proposées pour l'estimation des paramètres AR
- Méthode de Burg
 - minimisation de l'erreur de prédiction fwd et bwd (treillis), *sous la* contrainte que les paramètres AR satisfont la récursion Levinson-Durbin
 - haute résolution fréquentielle, modèle AR stable, calcul efficace
- Méthode des moindres carrés non-contrainte
 - minimisation de l'erreur de prédiction fwd et bwd (treillis), *sans la* contrainte que les paramètres AR satisfont la récursion Levinson-Durbin
 - calcul efficace, performance meilleure que Burg, mais stabilité AR non garantie



Ordre du modèle AR ?

- Ordre du modèle AR
 - compromis entre lissage, et apparition de pics 'erronés' dans le spectre
- Sélection par observation de l'erreur
 - l'erreur résiduelle décroît quand l'ordre du modèle augmente
 - l'ordre peut être choisi où la décroissance de l'erreur devient lente
- Sélection de l'ordre p de façon à minimiser des critères tels que
 - Final prediction error, FPE
 - Akaike information criteria, AIC
 - Minimum description length, MDL

$$FPE(p) = \hat{\sigma}_{wp}^2 \left(\frac{N + p + 1}{N - p - 1} \right)$$

$$AIC(p) = \log \hat{\sigma}_{wp}^2 + 2p/N$$

$$MDL(p) = N \log \hat{\sigma}_{wp}^2 + p \log N$$



Illustration: méthodes paramétriques

- Signal composé de 2 sinusoïdes séparées par Δf , d'amplitude A avec du bruit Gaussien de variance σ^2

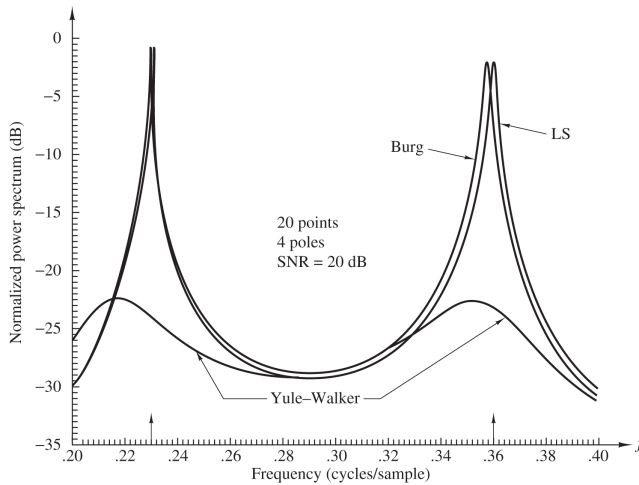


Figure 14.3.1 Comparison of AR spectrum estimation methods.

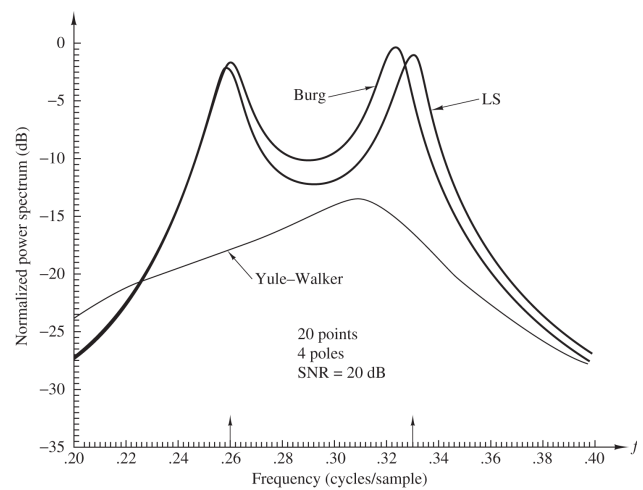


Figure 14.3.2 Comparison of AR spectrum estimation methods.

$$\text{SNR donné par } 10 \log_{10} A^2 / 2\sigma^2$$

Figures de [1].



Traitement des signaux, automne 2024
Prof. Pascal Frossard



230

Illustration: DSP avec ARMA modèle

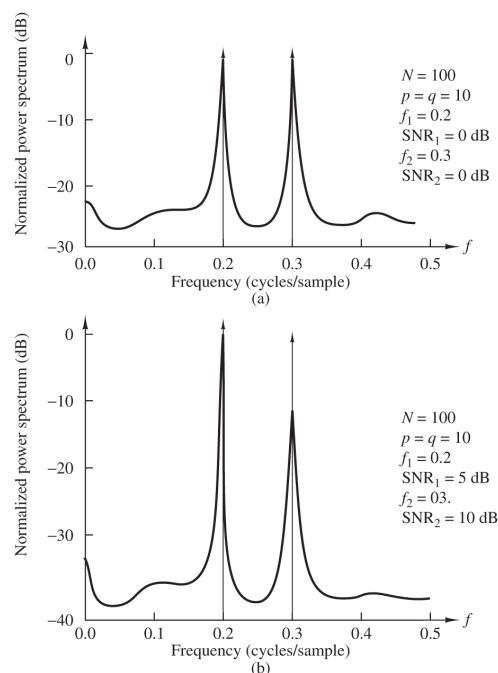


Figure 14.3.13 ARMA (10, 10) power spectrum estimates from paper by Kay (1980). Reprinted with permission from the IEEE.

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2024
Prof. Pascal Frossard



Résumé

- On caractérise les signaux aléatoires par leurs statistiques d'ordre 2
 - Le théorème de Wiener-Khintchine lie la densité spectrale de puissance et la fonction d'autocorrélation
- Estimation de la fonction d'autocorrélation ou de la DSP pour des durées d'observation finies
 - Erreurs d'approximations (distorsion du spectre)
 - Estimations parfois non consistantes
- Méthodes non-paramétriques
 - Meilleure consistance de l'estimateur, par lissage et moyennage
- Méthodes paramétriques
 - Meilleure estimation en cas de connaissance *a priori* / modèle



Références

1. ***Digital Signal Processing* (Proakis): chapitre 14**
2. *Traitement numérique des signaux* (Kunt): chapitre 6
3. *Digital Signal Processing* (Mittra): chapitre 15

