2.4 Analogies électro-mécano-acoustiques
Résonateurs à 1 degré de liberté

H. Lissek

EPFL - LTS2

29 octobre 2020

Introduction

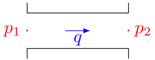
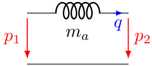
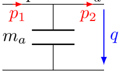
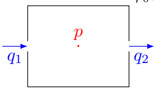
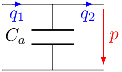
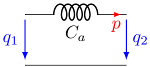
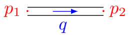
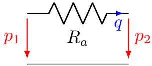
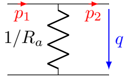
Objectifs

Ce cours de synthèse a pour objectifs :

- De présenter de manière synthétique l'ensemble des analogies électro-mécano-acoustiques étudiées dans ce module ;
- D'illustrer l'intérêt de ces analogies à partir de l'étude d'exemples concrets.

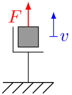
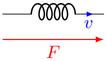
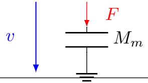
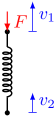
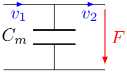
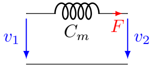
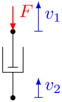
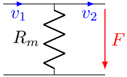
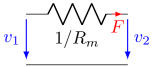
Analogies acousto-électriques

Le tableau ci-dessous présente une synthèse des analogies directes et indirectes entre les domaines acoustique et électrique.

Domaine acoustique	**Analogie directe**	**Analogie indirecte**
Pression p	Tension p	Courant p
Débit q	Courant q	Tension q
Impédance $Z_a = \dfrac{p}{q}$	Impédance électrique Z_a	Admittance électrique Z_a
Masse $m_a = \frac{\rho_0 L}{S}$ 	Inductance m_a 	Capacité m_a 
Compliance $C_a = \frac{V}{\rho_0 c^2}$ 	Capacité C_a 	Inductance C_a 
Résistance $R_a = \frac{8\pi\eta L}{S^2}$ 	Résistance R_a 	Conductance $1/R_a$ 

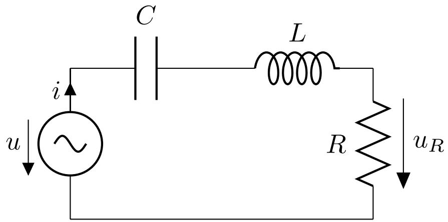
Analogies mécano-électriques

Le tableau ci-dessous présente une synthèse des analogies directes et indirectes entre les domaines mécanique et électrique.

Domaine mécanique	**Analogie directe**	**Analogie indirecte**
Force F	Tension F	Courant F
Vitesse v	Courant v	Tension v
Impédance $Z_m = \dfrac{F}{v}$	Impédance électrique Z_m	Admittance électrique Z_m
Masse M_m 	Inductance M_m 	Capacité M_m 
Compliance C_m 	Capacité C_m 	Inductance C_m 
Amortisseur R_m 	Résistance R_m 	Conductance $1/R_m$ 

Circuit RLC série

Considérons le circuit RLC série suivant :



L'impédance électrique présentée par les dipôles passifs en série est donnée par :

$$Z_e = \frac{u}{i} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Fréquence de résonance

La résonance est atteinte lorsque l'impédance Z_e est minimale ($Z_e = R$), c'est-à-dire lorsque la partie imaginaire de l'impédance s'annule :

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

Cette condition est satisfaite pour la pulsation de résonance $\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, ou encore pour la fréquence de résonance $f_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$.
Pour cette fréquence, l'intensité i traversant le circuit est maximale ($i = u/R$) et le déphasage entre tension et courant est nul.

Fonction de transfert

A l'aide du pont diviseur de tension, il est possible d'obtenir la fonction de transfert $\frac{u_R}{u}$:

$$\frac{u_R}{u} = \frac{R}{Z_e} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{R}\left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right)}$$

A la résonance du circuit, c'est-à-dire lorsque la partie imaginaire de Z_e est nulle, le module de la fonction de transfert $\left|\frac{u_R}{u}\right|$ est maximal et vaut 1. La tension d'entrée est alors intégralement transmise à la charge R avec un déphasage nul.

Bande passante

Le module de la fonction de transfert $\left|\frac{u_R}{u}\right|$ est maximal à la fréquence f_r et diminue de part et d'autre de cette fréquence. Cherchons les fréquences pour lesquelles $\left|\frac{u_R}{u}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, correspondant à une atténuation de 3 dB par rapport à la valeur maximale :

$$\left|\frac{u_R}{u}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{R^2}\left(L-\frac{1}{\omega^2 C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Cette condition est satisfaite pour une pulsation de coupure ω telle que $\frac{\omega}{R}\left(L-\frac{1}{\omega^2 C}\right) = \pm 1$ soit encore $LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0$. Cette équation du second degré possède les deux solutions positives suivantes :

$$\omega_{b,h} = \frac{\pm R + \sqrt{R^2 C + 4L/C}}{2L}$$

De ces deux pulsations, on tire les expressions des fréquences de coupure basse f_b et haute f_h :

$$f_b = \frac{1}{2\pi}\frac{-R+\sqrt{R^2C+4L/C}}{2L} \text{ et } f_h = \frac{1}{2\pi}\frac{R+\sqrt{R^2C+4L/C}}{2L}$$

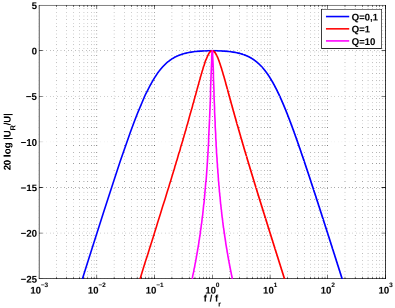
La gamme de fréquence comprise entre f_b et f_h s'appelle la bande passante à -3 dB. Sa largeur vaut $f_h - f_b = R/2\pi L$.

Facteur de qualité

On définit le facteur de qualité Q comme étant le rapport de la fréquence de résonance sur la largeur de la bande passante :

$$Q = \frac{f_r}{f_h - f_b} = \frac{\omega_r}{\omega_h - \omega_b} = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$$

On remarque que plus le facteur de qualité est faible (plus l'amortissement est élevé) plus la bande passante est large. Ce résultat est illustré sur la figure ci-dessous.



Système masse ressort amorti

Un système "masse ressort" amorti est un oscillateur mécanique à un degré de liberté. Il est constitué d'une masse M_m reliée à un ressort de raideur K_m (ou de souplesse $C_m = 1/Km$). L'amortissement est dû aux frottements que subit la masse en mouvement lors de son déplacement dans l'air ainsi qu'aux frottements internes au matériau constituant le ressort. L'effet de l'amortissement est traduit dans la suite par un terme de résistance mécanique R_m. Cet oscillateur est l'équivalent mécanique du système électrique RLC.

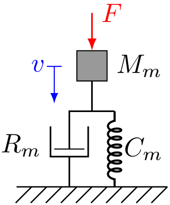
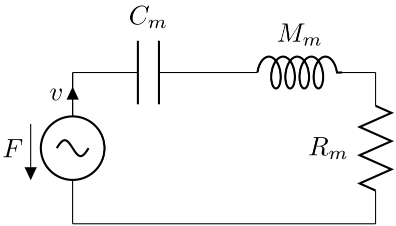


Schéma électrique équivalent

Ainsi, le comportement d'un système masse ressort amorti excité par une force F s'appliquant sur la masse M_m, peut être représenté par le schéma électrique suivant :



Par analogie avec le circuit RLC, la fréquence de résonance de cet oscillateur mécanique est donnée par :

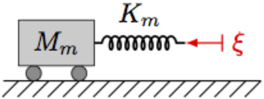
$$f_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{M_m C_m}}$$

Exercice

Exemple : Considérons le système masse-ressort amorti visible sur l'exemple vidéo ci-dessous. Il est constitué d'un ressort de raideur K_m (ou une compliance $C_m = 1/K_m$) et d'un charriot de masse M_m guidé sur rails. L'amortissement de ce système masse-ressort est principalement dû aux frottements des roues sur les rails. Le système est excité par une bielle reliée à un moteur, imposant un déplacement d'amplitude constante et de fréquence variable.

Exercice

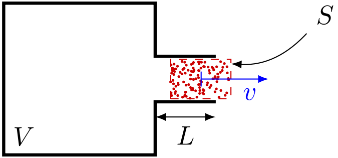
Ce système peut être schématisé de la manière suivante :



Observons la vidéo. Comment évoluent les déplacements relatifs du charriot et du système excitateur entre le cas où la fréquence d'excitation est inférieure à la fréquence de résonance du système (début de la vidéo) et le cas où la fréquence d'excitation est supérieure à la fréquence de résonance (fin de la vidéo) ?
A la fréquence de résonance, l'afficheur à aiguille du moteur indique 420 tours/minute. Sachant que la masse du charriot est $M_m = 300$ grammes, quelle est la raideur du ressort ?

Le résonateur de Helmholtz

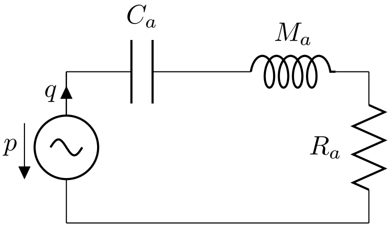
Le résonateur de Helmholtz est un résonateur acoustique de type masse-ressort amorti. Il est constitué d'une enceinte de volume V communiquant avec l'air extérieur par un tube de longueur L et de section S.



Dans l'approximation basse fréquence, le tube, ouvert à ses deux extrémités, a pour équivalent une masse acoustique m_a tandis que le volume a pour équivalent une souplesse acoustique C_a. On considérera que les pertes de ce système sont proportionnelles au débit acoustique et auront donc pour équivalent une résistance acoustique R_a.

Schéma électrique équivalent

Ainsi, le comportement d'un résonateur de Helmholtz, excité par une pression p, peut être représenté par le circuit électrique équivalent suivant :



ou $m_a = \dfrac{\rho L}{S}$ et $C_a = \dfrac{V}{\rho_0 c^2}$.
Ce circuit série permet de respecter la conservation des pression et débit acoustiques de part et d'autre de la jonction entre le tube et le volume.

Fréquence de résonance

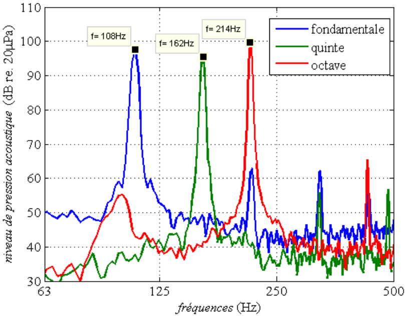
Par analogie avec le circuit RLC, la fréquence de résonance du résonateur de Helmholtz est alors donnée par :

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{m_a C_a}} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{LV}}$$

Cette fréquence dépend de la célérité du son dans l'air et de trois caractéristiques géométriques du résonateur, à savoir son volume V et les longueur L et section S du tube.

Exercice

Calculer la fréquence de résonance d'une bouteille de vin Vaudois (tube de diamètre 1,72 cm et de longueur $L = 7,72$ cm et volume V de 75 cl).
Comparer la valeur théorique avec la valeur obtenue en soufflant sur le goulot (voir spectre sur la figure ci-dessous).



Conclusion

Différents dispositifs mécaniques et acoustiques rencontrés en audio sont des résonateurs à 1 degré de liberté :

- l'équipage mobile d'un haut-parleur électrodynamique, par exemple, se comporte en basses fréquences comme un système masse-ressort amorti.
- de même, une charge bass-reflex, composée d'un volume et d'un évent, constitue un résonateur de Helmholtz.

D'autres systèmes, a priori difficilement assimilables à un système à éléments localisés, peuvent être modélisés en basses fréquences par un simple oscillateur à un degré de liberté. C'est le cas, par exemple, d'une membrane de microphone, constituée d'un film tendu telle la peau d'un tambour sur un support annulaire. Cette membrane peut être modélisée en basses fréquences par un système mécanique masse-ressort.

Enfin, dans le cas de systèmes plus complexes présentant plusieurs fréquences de résonance, il est dans certains cas possible de les représenter sous la forme d'une association d'oscillateurs simples.

Le bass-trap et l'absorbeur électroacoustique, qui seront présentés dans quelques semaines, sont égalememt des dispositifs qui mettent en oeuvre simultanément des résonateurs mécaniques, acoustiques, et électriques pour l'absorbeur électroacoustique, représentent une synthèse de ce que nous avons vu jusqu'à présent.

Question1

Le facteur de qualité d'un oscillateur mécanique amorti

- ☐ est inversement proportionnel à la résistance mécanique
- ☐ augmente avec la raideur de l'oscillateur
- ☐ est proportionnel à la masse de l'oscillateur
- ☐ est proportionnel à la largeur de la bande passante

Question2

On considère un circuit RLC série, de facteur de qualité Q. Parmi les propositions suivantes cocher celles qui sont correctes.

☐ La largeur de la bande passante diminue quand la valeur de la capacité augmente
☐ La largeur de la bande passante diminue quand la valeur de l'inductance augmente
☐ La largeur de la bande passante augmente quand la valeur de la résistance augmente
☐ La largeur de la bande passante diminue quand le facteur de qualité augmente

Question 3

On considère un oscillateur mécanique de masse 1 kg et de compliance 2.10^{-3} $m.N^{-1}$, et on désigne par f_r sa fréquence de résonance. Calculer la valeur de la résistance mécanique permettant d'obtenir une bande passante égale à $2f_r$.

- ☐ $\simeq 3,6$ $N.s.m^{-1}$
- ☐ $\simeq 22,4$ $N.s.m^{-1}$
- ☐ $\simeq 44,7$ $N.s.m^{-1}$
- ☐ $\simeq 7,1$ $N.s.m^{-1}$