

2.3 Systèmes acoustiques

Partie 2: circuits équivalents

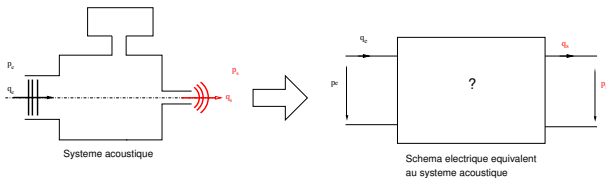
H. Lissek

15 octobre 2020

Objectifs, pré-requis

Objectif

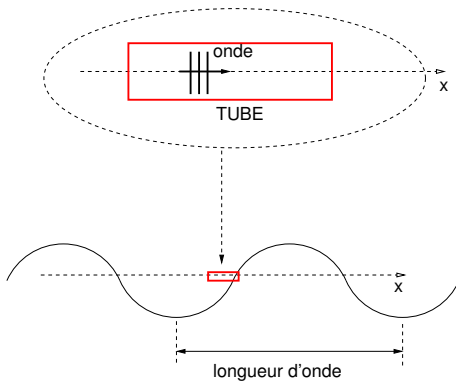
L'objectif de ce cours est de donner les lois de comportement des systèmes acoustiques élémentaires ou plus complexes et de savoir réaliser les schémas électriques équivalents à ces systèmes.



Objectifs / hypothèses

L'objectif est ici de donner les schémas équivalents à une portion de tube.
Nous faisons ici l'hypothèse

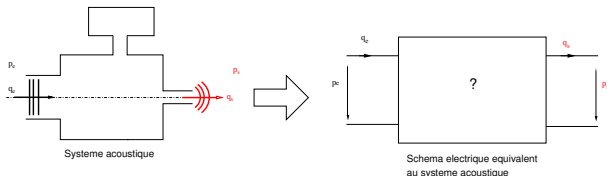
- que la longueur du tube est grande devant le rayon du tube.
- que la longueur d'onde est grande devant la longueur du tube.



Conventions d'orientation

Dans tout ce module, la convention choisie pour les quadripôles électriques équivalents aux systèmes acoustiques est la convention anti-symétrique (convention récepteur en entrée, convention générateur en sortie). Ceci signifie que

- le débit acoustique q_e (à l'entrée) est considéré positif lorsque le fluide entre dans le système acoustique
- le débit acoustique q_s (à la sortie) est considéré positif lorsque le fluide sort du système acoustique



Constantes localisées

Définition

Les hypothèses utilisées s'appellent les hypothèses de constantes localisées. Ces hypothèses sont vérifiées lorsque la longueur d'onde est très grande devant la plus grande des dimensions d'un objet. Dans le cas d'un tube de longueur L , elles se traduisent mathématiquement par $kL \ll 1$, où k est le nombre d'onde, soit $\lambda \gg 2\pi L$, où λ est la longueur d'onde.

Exemple

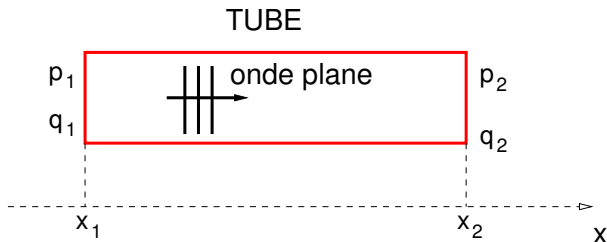
- Exemple 1 : pour un tube de longueur 10 cm, on considère que les basses fréquences sont dans la gamme 0 - 3000 Hz.
- Exemple 2 : pour un tube de longueur 1 m, on considère que les basses fréquences sont dans la gamme 0 - 300 Hz.

Conséquences

- Le problème étudié est ici un problème à une dimension, l'onde est plane.
- Les grandeurs physiques connaissent des variations linéaires entre l'entrée et la sortie du tube. Les dérivées partielles peuvent s'écrire comme des différences finies.
- Ceci permet de ne considérer que les grandeurs physiques en entrée et en sortie de tube.

Portion de tube : description

Le problème étudié est représenté ci dessous. Il s'agit d'un tube de longueur $L = x_2 - x_1$ et de section S .



Les variables physiques considérées sont :

- les pressions p_1 et p_2 à l'entrée du tube et à la sortie respectivement,
- les débits q_1 et q_2 à l'entrée du tube et à la sortie respectivement.

Remarque : on peut considérer que l'hypothèse des constantes localisées est valide pour $L = x_2 - x_1 < \frac{\lambda}{8}$.

Equations de comportement

Partant des équations de comportement d'un portion de tube $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\chi_s \frac{\partial p}{\partial t} \end{array} \right. .$

Equations de comportement

Partant des équations de comportement d'un portion de tube $\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\chi_s \frac{\partial p}{\partial t} \end{cases} .$

En considérant les hypothèses de constantes localisées, il vient

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} \simeq \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \simeq \frac{v_2 - v_1}{(x_2 - x_1)} \end{cases} ,$$

où la pression p et la vitesse v sont observées au milieu de l'élément.

Equations de comportement

Partant des équations de comportement d'un portion de tube $\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\chi_s \frac{\partial p}{\partial t} \end{cases}$.

En considérant les hypothèses de constantes localisées, il vient

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} \simeq \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \simeq \frac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1} \end{cases},$$

où la pression p et la vitesse v sont observées au milieu de l'élément.

Les équations approchées de comportement du tube s'écrivent ainsi sous la forme (en remplaçant v par q/S) :

$$\begin{cases} \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1} \simeq -\frac{\rho_0}{S} \frac{\partial q}{\partial t} \\ \frac{q_2 - q_1}{S(x_2 - x_1)} = -\chi_s \frac{\partial p}{\partial t} \end{cases} \quad (\text{Rappel : } \chi_s = \frac{1}{\Gamma p_s} = \frac{1}{\rho_0 c_0^2})$$

Pour une onde plane harmonique à pulsation ω , les équations s'écrivent

$$p_1 - p_2 \simeq \frac{\rho_0 L}{S} j\omega q, \quad (1)$$

$$q_1 - q_2 = \frac{V}{\rho_0 c_0^2} j\omega p, \quad (2)$$

où V est le volume du tube ($V = S(x_2 - x_1)$).

Schéma équivalent électrique

$$p_1 - p_2 \simeq \frac{\rho_0 L}{S} j\omega q, \quad (1)$$

$$q_1 - q_2 = \frac{V}{\rho_0 c_0^2} j\omega p, \quad (2)$$

La propagation d'une onde dans une portion de tube se traduit par des effets

- (Eq. 1) d'inertie du fluide (chute de pression entre l'entrée et la sortie)
- (Eq. 2) de compressibilité du fluide (chute de débit entre l'entrée et la sortie)

Schéma équivalent électrique

$$p_1 - p_2 \simeq \frac{\rho_0 L}{S} j\omega q, \quad (1)$$

$$q_1 - q_2 = \frac{V}{\rho_0 c_0^2} j\omega p, \quad (2)$$

- l'équation 1 traduit les effets d'inertie grâce à une masse acoustique $m_a = \frac{\rho_0 L}{S}$,
- l'équation 2 traduit les effets de compressibilité du fluide grâce à une souplesse acoustique $C_a = \frac{V}{\rho_0 c_0^2}$.

Quel serait le schéma électrique équivalent à une portion de tube (voir cours précédent) ?

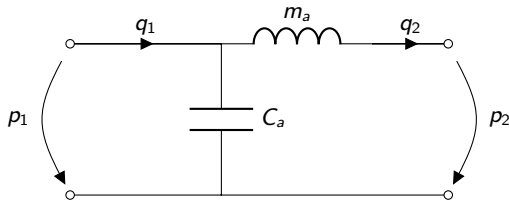
Schéma équivalent électrique

$$p_1 - p_2 \simeq \frac{\rho_0 L}{S} j\omega q, \quad (1)$$

$$q_1 - q_2 = \frac{V}{\rho_0 c_0^2} j\omega p, \quad (2)$$

- l'équation 1 traduit les effets d'inertie grâce à une masse acoustique $m_a = \frac{\rho_0 L}{S}$,
- l'équation 2 traduit les effets de compressibilité du fluide grâce à une souplesse acoustique $C_a = \frac{V}{\rho_0 c_0^2}$.

Quel serait le schéma électrique équivalent à une portion de tube (voir cours précédent) ?



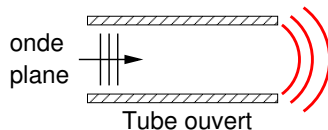
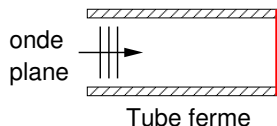
Impédance terminale

L'objectif de cette partie est de montrer comment la terminaison (de droite) d'une portion de tube affecte son comportement et quel est le schéma équivalent à cette portion de tube.

Nous considérons deux cas extrêmes :

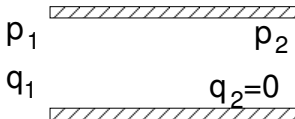
- le tube fermé,
- le tube ouvert.

Dans chacun des cas, la longueur du tube L vérifie $L \ll \lambda$, où λ est la longueur d'onde.



Tube fermé à son extrémité

Nous considérons un tube fermé à son extrémité.



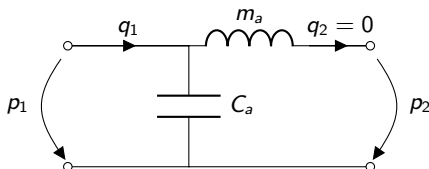
Les conditions aux limites imposent que $q_2 = 0$ (débit nul en sortie). Physiquement cela correspond aux basses fréquences à un effet de compression de l'air dans l'ensemble du tube. Ainsi la pression est homogène dans le tube à l'image de ce qui se passe dans une seringue remplie d'air.

Schémas équivalents au tube fermé

On peut trouver une équivalence mécanique au tube fermé : celui d'un **ressort** (du fait de la compressibilité de l'air).

Si on reprend le schéma de la partie précédente, avec la condition $q_2 = 0$:

cela revient à dire que la partie terminale est branchée sur une impédance (acoustique) infinie :

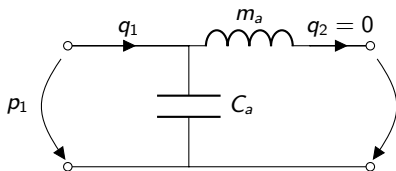


Schémas équivalents au tube fermé

On peut trouver une équivalence mécanique au tube fermé : celui d'un **ressort** (du fait de la compressibilité de l'air).

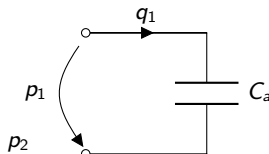
Si on reprend le schéma de la partie précédente, avec la condition $q_2 = 0$:

cela revient à dire que la partie terminale est branchée sur une impédance (acoustique) infinie :



Donc le tube fermé peut être représenté par le schéma analogue comprenant une "capacité"

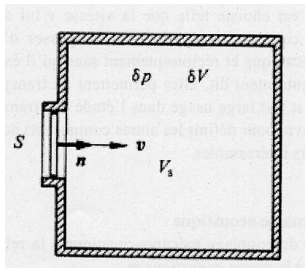
$C_a = \frac{V}{\rho_0 c_0^2}$ connectée en parallèle.



Cette capacité est en fait une "compliance acoustique" (similaire à la compliance mécanique du volume d'air dans le tube fermé).

Schémas équivalents au tube fermé

De la même manière, un volume fermé peut être représenté par une compliance acoustique



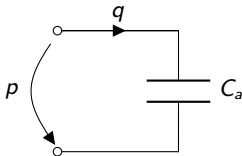
$$\delta p = p = -\frac{1}{\chi_s} \frac{\delta V}{V_s}$$

$$\text{Or } \delta V = -\int S v dt = -\int q dt,$$

il vient

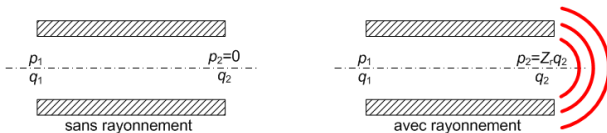
$$p = \frac{1}{V_s \chi_s} \int q dt = \frac{1}{C_a} \int q dt,$$

$$\text{où } C_a = V_s \chi_s = \frac{V_s}{\rho_0 c_0^2}$$



Tube ouvert à son extrémité

Nous considérons un tube ouvert à son extrémité.



Les conditions aux limites imposent en première approximation que $p_2 = 0$ (pression nulle en sortie).

Nous verrons plus loin dans le cours que la condition devient $p_2 = Z_r q_2$ (où Z_r est une "impédance de rayonnement") lorsque le tube rayonne dans un milieu fluide.

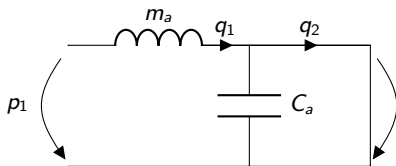
Physiquement cela correspond aux basses fréquences à un effet de déplacement en bloc de l'air dans l'ensemble du tube. Ainsi le débit est homogène dans le tube et il existe un saut de pression entre l'entrée et la sortie traduisant les effets d'inertie.

Remarque : L'impédance traduit la réaction du milieu environnant à la source de débit en sortie de tube, créant ainsi une pression en sortie

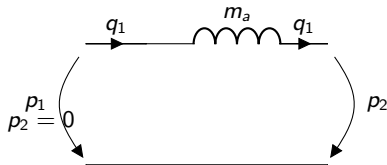
Schémas équivalents au tube ouvert

Mécaniquement le tube est équivalent à une masse du fait de l'inertie de l'air.

Si les effets de rayonnement acoustique sont ignorés, tout se passe comme si l'impédance de charge (terminale) est nulle ($p_2 = 0$).



De fait le schéma électrique équivalent au tube ouvert est une inductance $m_a = \frac{\rho_0 L}{S}$ connectée en série.



Remarque : Dans le cas où le tube rayonne, nous verrons dans quelques temps que la masse acoustique est modifiée en $m'_a = \frac{\rho_0 L}{S} + m_{ar}$, où m_{ar} est la "masse de rayonnement" comme nous le montrerons plus loin.

Synthèse de cette partie

Nous avons vu qu'un tube fermé était en première approximation une compliance acoustique $C_a = \frac{V}{\rho_0 c_0^2}$ (les effets de compressibilité prédominent), reliant la pression p_1 à l'entrée et la **pression au repos $p_2 = 0$** , à travers le débit acoustique q_1 entrant

→ un tube fermé (et plus généralement un volume fermé) est représenté par une compliance acoustique en parallèle (c'est à dire connectée à la référence de pression $p = 0$)

En outre un tube ouvert est en première approximation une masse acoustique $m_a = \rho_0 \frac{L}{S}$ (les effets d'inertie prédominent), reliant la chute de pression $p_1 - p_2$ et le débit volumique q_1 entrant

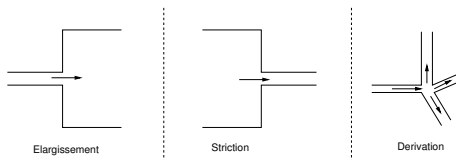
→ un tube ouvert est représenté par une masse acoustique en série

Remarque : il convient de tenir compte du dispositif acoustique sur lequel est branché le tube ouvert (rayonnement sur un écran, connection à un volume fermé, etc.) pour court-circuiter ou non les terminaisons de droite).

Jonctions

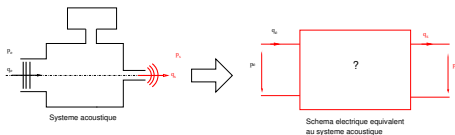
L'objectif de cette partie est de donner

- les règles permettant de réaliser les schémas électriques équivalents à des jonctions de guides d'onde (élargissement, striction, dérivation)



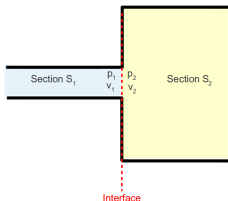
- les règles permettant de réaliser les schémas électriques équivalents à un ensemble de guides d'onde assemblés selon différentes configurations.

Exemple : Cette partie permettra de réaliser le schéma équivalent à l'assemblage ci-dessous.



Changement de section dans un guide d'onde (1)

Considérons un guide d'onde acoustique dont la section passe de S_1 à S_2 comme montré à la figure ci-dessous :

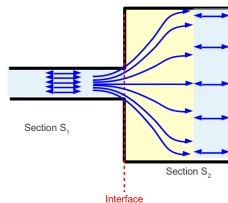
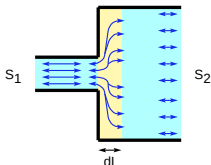


Les phénomènes de continuité à l'interface entre les deux éléments (petit tube, grand tube) se traduisent par

- une continuité de la pression et de la vitesse de part et d'autre de l'interface sur la section S_1 (zone bleue),
- une vitesse nulle sur le reste de S_2 (zone jaune sans prendre en compte la zone bleue) dont la paroi est rigide.

Changement de section dans un guide d'onde (2)

Le changement de section entre les deux tubes se traduit par une zone de transition.



Transition en fluide très déformable

Transition en fluide peu déformable

Dans la zone de transition, les phénomènes suivants existent :

- La vitesse varie brutalement dans la section du grand guide au niveau de la zone de transition,
- Entre S_1 et S_2 , il y a expansion du champ du fait de la conservation du débit entre l'entrée et la sortie de la jonction ($S_1 v_1 = S_2 v_2$)
- Le fluide étant très déformable (air) ; la transition est très rapide, c'est à dire que la zone de transition est très courte ($dL \rightarrow 0$). Dans le cas d'un fluide peu déformable (par exemple de l'huile), la zone de transition serait beaucoup plus longue.
- En dehors de cette zone, on retrouve $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$

Note : Le choix des variables globales de pression et débit évite d'avoir à représenter le changement de section

Schéma équivalent au changement de section

Du fait de la continuité des pressions et débits de part et d'autre de la zone de transition,

$$p_1 = p_2$$

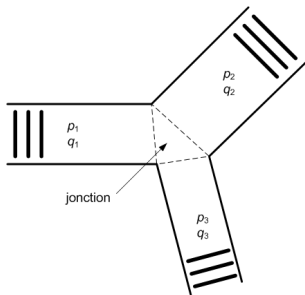
$$q_1 = q_2$$

le schéma équivalent au changement de section est en première approximation le suivant :



Jonction de guides d'ondes

On considère ici un tube qui débouche vers deux tubes branchés en dérivation.

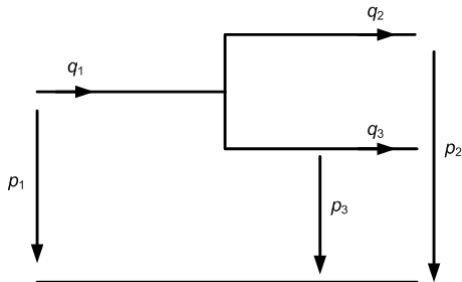


Considérant une **convention anti-symétrique**, La loi des noeuds impose qu'au niveau de l'embranchement, il y ait

- égalité des pressions : $p_1 = p_2 = p_3$,
- conservation des débits $q_1 = q_2 + q_3$
(ou $q_1 + (-q_2) + (-q_3) = 0$).

Schéma équivalent à la dérivation

Du fait de la continuité des pressions et débits de part et d'autre de la zone d'embranchement, le schéma équivalent à la dérivation est en première approximation le suivant :



Détermination du comportement prédominant

Introduction

Objectifs,
pré-requis

Schémas analogues

Portion de
tube

Impédance
terminale

Jonction

Pertes
acoustiques

Assemblage
d'éléments

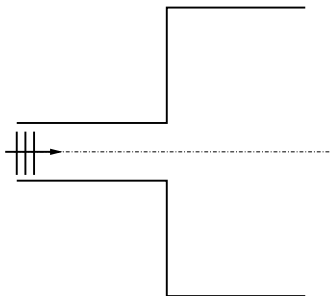
Tube long

Conclusion

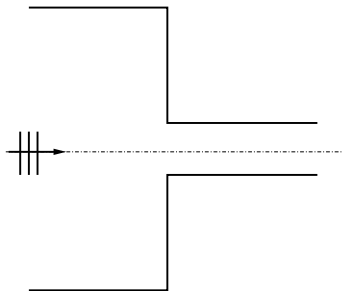
Bibliographie

L'objectif ici est de connaître le comportement prédominant d'un élément suivi par un autre élément. Deux cas sont étudiés

- tube peu large débouchant sur un tube large
- tube large débouchant sur un tube peu large



Tube peu large – tube large

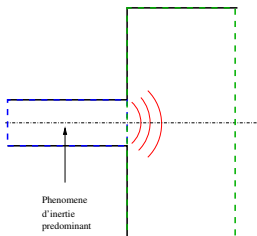


Tube large – tube peu large

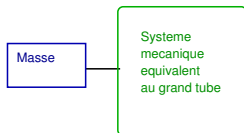
tube peu large débouchant sur un tube large

Nous considérons ici le cas d'un tube peu large débouchant sur un tube large.

Système acoustique



Système mécanique équivalent



L'examen du premier élément montre qu'il débouche sur une section plus grande. Dans ce cas, aux basses fréquences, l'air qui se trouve dans cet élément peut osciller sans compression.

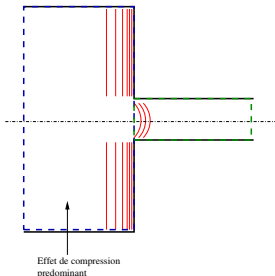
Les effets d'inertie l'emportent sur les effets de compressibilité : c'est donc une masse acoustique.

Note : ce système (petit tube) est équivalent à un tube qui débouche dans l'espace infini.

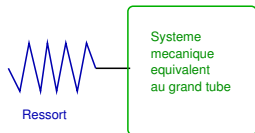
tube large débouchant sur un tube peu large

Nous considérons ici le cas d'un tube large débouchant sur un tube peu large.

Système acoustique



Système mécanique équivalent



L'examen du premier élément montre qu'il débouche sur une section plus petite. Dans ce cas, aux basses fréquences, l'air qui se trouve dans cet élément subit essentiellement un effet de compression.

Les effets de compressibilité l'emportent sur les effets d'inertie : c'est donc une souplesse acoustique.

Note : ce système (grand tube) est équivalent à un tube qui débouche sur un mur.

Synthèse de cette partie

Nous avons montré qu'au niveau des jonctions, les débits volumiques sont conservés (identiques à la loi des noeuds), et les pressions sont égales de toutes parts.

Une jonction sera donc représentée par un noeud (en représentation directe), associé à une pression p_j

Lorsque la jonction sépare deux tube de sections différentes, deux types de comportement se produisent :

- si un petit tube débouche sur un tube plus grand, le système se comporte comme une masse acoustique (petit tube) connectée au tube suivant (dont le modèle sera déterminé selon les conditions terminales)
- si un grand tube débouche sur un petit tube, le caractère compressible l'emporte et il convient de représenter le tube par une compliance acoustique. Dans ce cas, il convient de connecter la compliance en "parrallèle" (reliée à la référence de pression p_s).

Jusqu'à présent, nous n'avons traité de systèmes sans pertes. La partie suivante montre comment prendre en compte les phénomènes de dissipation acoustique.

Principe des mécanismes de pertes

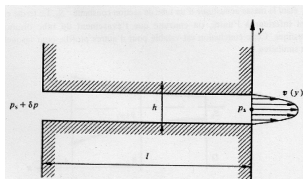
Les mécanismes responsables de la dissipation d'une onde acoustique au cours de sa propagation sont principalement les effets de viscosité et les effets de conduction thermique.



Principe des mécanismes de pertes

Les mécanismes responsables de la dissipation d'une onde acoustique au cours de sa propagation sont principalement les effets de viscosité et les effets de conduction thermique.

Le principe général des pertes est présenté ci-dessous :

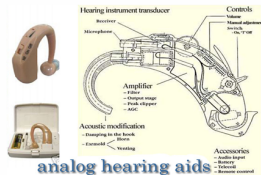


- **Pertes par effets visqueux.** Dans un guide d'onde les particules oscillent (déplacement particulaire) selon une direction parallèle à l'axe du guide d'onde. La vitesse des parois étant nulle, il existe une zone de transition entre la paroi et le fluide oscillant appelée couche limite dans laquelle la vitesse particulaire augmente rapidement. Dans cette couche limite, la viscosité du fluide s'oppose à un mouvement tangentiel du fluide le long de la paroi. L'énergie perdue par effet visqueux est transformée en chaleur.
- **Pertes par effets thermiques.** Dans un guide d'onde, les particules de fluide se compriment et se dépriment créant ainsi une variation de la température du fluide autour de la température moyenne. La température des parois étant constante dans le temps (du fait de l'inertie thermique), il existe une différence (gradient) de température entre le fluide et la paroi créant une zone de transition entre la paroi et le fluide appelée couche limite thermique.

Prise en compte des pertes en électroacoustiques

Dans les problèmes d'électroacoustique, il est nécessaire de prendre en compte les pertes dans les cas suivants :

- enceintes acoustiques réelles possédant des fuites même pour des réalisations soignées
- guides d'ondes acoustiques dans lesquels les pertes viscothermiques sont à prendre en compte aux parois
- petites cavités (microphones par exemple) pour lesquelles les pertes viscothermiques conditionnent les facteurs d'amortissement du système.



Nous nous intéressons ici aux pertes existant des les enceintes acoustiques. Nous faisons ici l'hypothèse que ces pertes sont dues à l'existence de petits canaux acoustiques dans lesquels existent uniquement les effets visqueux.

Valeurs de résistances acoustiques pour des capillaires

Introduction

Objectifs,
pré-requis

Schémas analogues

Portion de
tube

Impédance
terminale

Jonction

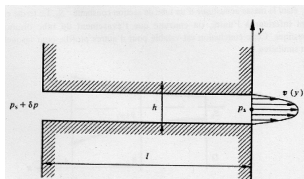
Pertes
acoustiques

Assemblage
d'éléments

Tube long

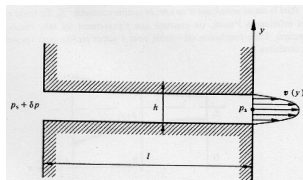
Conclusion

Bibliographie

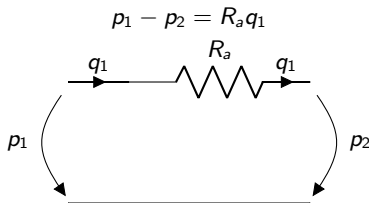


- Effet d'une fuite / tube capillaire : Une résistance acoustique se trouve localisée dans un tuyau capillaire ou une fente étroite de longueur principale l petite devant la longueur d'onde λ du signal acoustique ($l < \lambda$). Cette résistance est principalement due aux frottements du fluide sur les parois du guide. Elle est appelée résistance visqueuse.
- La résistance acoustique R_a est exprimée en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-4} \cdot \text{s}^{-1}$. Elle dépend du coefficient de viscosité dynamique du fluide η ($\eta = 18.6 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$). Cette unité $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ s'appelle aussi le Poiseuille.
 - Dans le cas d'un tube capillaire de rayon R et de longueur l , la résistance acoustique est $R_a = \frac{8\eta l}{\pi R^4}$.
 - Dans le cas d'une fente parallélépipédique de largeur b , de hauteur h et de longueur l , la résistance acoustique est $R_a = \frac{12\eta l}{bh^3}$.

Représentation des résistances



A l'instar des tubes, auxquels on associe une masse acoustique m_a , la résistance acoustique exprime le passage d'un débit volumique q_1 à travers un tube capillaire soumis à une différence de pression $p_1 - p_2$. Les pertes acoustiques seront donc représentées par un symbole résistance, en série entre les deux potentiels p_1 et p_2 , traversée par un débit q_1 .



Assemblage d'éléments : méthode

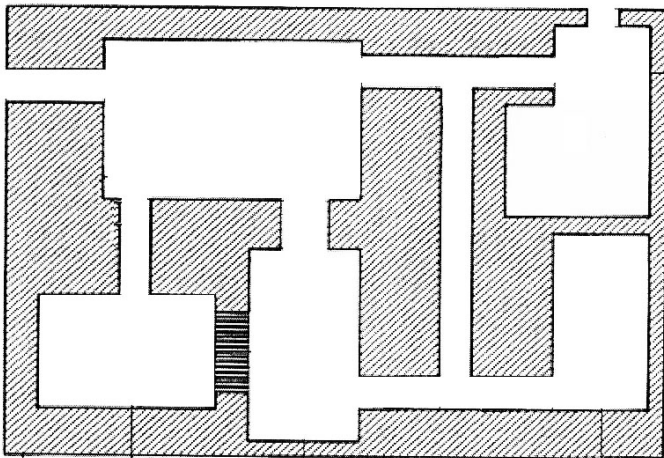
Il est possible maintenant de réaliser les schémas équivalents (en convention "directe" ou "impédance", c'est à dire avec la pression p correspondant à une tension électrique et le débit volumique q correspondant à un courant électrique) à un assemblage de différents éléments.

La méthode proposée pour cela est la suivante

- ① identifier la source (pression ou débit, que l'on supposera "idéale" pour le moment)
- ② identifier tous les volumes, leur attribuer un "noeud" avec une valeur de pression acoustique p_i
- ③ identifier toutes les jonctions - y attribuer également un noeud une pression acoustique p_i
- ④ ajouter un noeud à l'extérieur du système, représentant la référence de pression acoustique $p_0 = 0$ (la masse du circuit analogue acoustique)
- ⑤ joindre tous les noeuds (y compris p_0) entre eux en passant par les éléments correspondants :
 - un tube (ouvert) est une masse acoustique $m_{ai} = \rho \frac{L_i}{S_i}$, représentée par un symbole "inductance"
 - on associe en général un terme de pertes $R_{ai} = \frac{8\eta\pi L_i}{S_i^2}$ (pour un tube circulaire fin), représenté par un symbole "résistance"
 - un tube fermé (ou plus généralement un volume V) est une compliance acoustique $C_{ai} = \frac{V_i}{\rho_0 c_0^2}$, représentée par un symbole capacitance **connectant la pression p_i à la masse p_0**

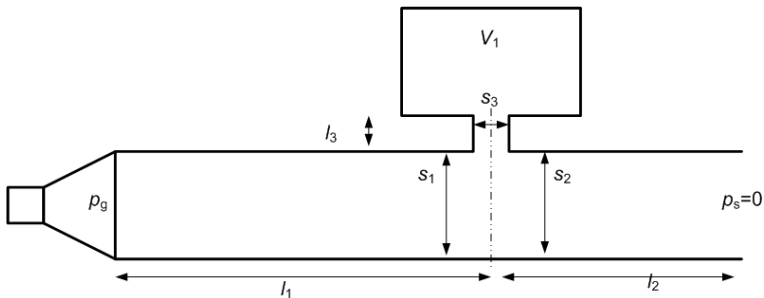
Note : une compliance acoustique est toujours reliée à la masse p_0

Assemblage d'éléments : exemple



Assemblage d'éléments : exemple du résonateur de Helmholtz

On considère le résonateur de Helmholtz ci dessous, soumis à une source de pression acoustique p_g :

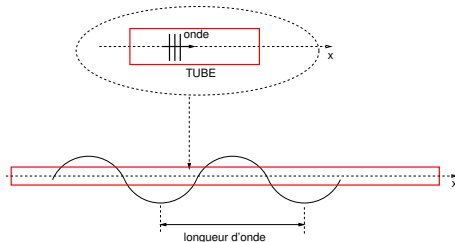


Tube long - description

L'objectif est ici de donner les équations de comportement et les schémas équivalents décrivant une portion de tube long à **section constante**.

Nous faisons ici l'hypothèse

- que la longueur d'onde est grande devant le diamètre du tube ce qui suppose une propagation en ondes planes (pression et vitesse acoustiques homogène sur la section transverse du tube),
- que la longueur du tube est grande devant le rayon du tube,
- que la longueur d'onde est petite devant la longueur du tube



Equation locale

Pour rappel, les équations locales de comportement d'un fluide s'écrivent

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{S} \frac{\partial q}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\chi_s S \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4)$$

La première équation traduit les effets d'inertie de la portion de fluide et la deuxième les effets de compressibilité faisant l'hypothèse que le fluide a un comportement adiabatique. Ce système d'équation est similaire à l'équation des télégraphistes traduisant la propagation d'une onde électrique dans un conducteur.

Dans la suite, nous considérons que les variables pression et débit volumique s'écrivent sous leur forme complexe associée :

$$p(x, t) = P(x)e^{j\omega t}$$

$$q(x, t) = Q(x)e^{j\omega t}$$

ce qui permet de déduire l'équation de Helmholtz à partir de l'équation de propagation :

$$\frac{d^2 P(x)}{dx^2} + k^2 P(x) = 0$$

Solution générale

Les solutions de l'équation de propagation s'écrivent, pour la pression :

$$p(x, t) = (p_{0+} e^{-jkx} + p_{0-} e^{jkx}) e^{j\omega t},$$

où k est le nombre d'onde défini par $k = \frac{\omega}{c}$, avec c la célérité du son.
Le débit volumique est déduit de la pression en considérant l'équation traduisant les phénomènes d'inertie

$$\frac{\partial q}{\partial t} = j\omega q = -\frac{S}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Solution générale

Les solutions de l'équation de propagation s'écrivent, pour la pression :

$$p(x, t) = (p_{0+} e^{-jkx} + p_{0-} e^{jkx}) e^{j\omega t},$$

où k est le nombre d'onde défini par $k = \frac{\omega}{c}$, avec c la célérité du son.
Le débit volumique est déduit de la pression en considérant l'équation traduisant les phénomènes d'inertie

$$\frac{\partial q}{\partial t} = j\omega q = -\frac{S}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

soit :

$$q(x, t) = \frac{S}{\rho_0 c} (p_{0+} e^{-jkx} - p_{0-} e^{jkx}) e^{j\omega t},$$

On appelle le terme $Z_c = \rho_0 c$ l'impédance caractéristique du guide d'onde, et dans l'expression du débit volumique, l'impédance **acoustique** caractéristique s'écrit $Z_{ac} = \frac{\rho_0 c}{S}$.

Matrice de transfert

Si l'on considère uniquement l'amplitude complexe de la pression et du débit acoustiques et que l'on observe ces deux grandeurs en x_1 et $x_2 > x_1$, il vient

$$P(x_1) = P(x_2) \cos k(x_2 - x_1) + jZ_{ac} \sin k(x_2 - x_1)Q(x_2)$$

$$Q(x_1) = \frac{j}{Z_{ac}} \sin k(x_2 - x_1)P(x_2) + Q(x_2) \cos k(x_2 - x_1)$$

Cette relation peut s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k(x_2 - x_1) & jZ_{ac} \sin k(x_2 - x_1) \\ \frac{j}{Z_{ac}} \sin k(x_2 - x_1) & \cos k(x_2 - x_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

où $P_i = P(x_i)$ et $Q_i = Q(x_i)$.

Notion d'impédance ramenée

L'impédance acoustique (définie comme $\frac{P}{Q}$) au point d'abscisse x_1 s'écrit

$$Z_1 = \frac{P_1}{Q_1} = Z_{ac} \frac{j \tan k(x_2 - x_1) + \frac{Z_2}{Z_{ac}}}{1 + j \tan k(x_2 - x_1) \cdot \frac{Z_2}{Z_{ac}}}$$

où Z_2 est l'impédance au point d'abscisse x_2 , définie par $Z_2 = \frac{P_2}{Q_2}$.

L'impédance réduite en x_1 , définie par $z_1 = \frac{Z_1}{Z_{ac}}$ s'écrit

$$z_1 = \frac{j \tan k(x_2 - x_1) + z_2}{1 + j \tan k(x_2 - x_1) \cdot z_2},$$

où $z_2 = \frac{Z_2}{Z_{ac}}$ est l'impédance réduite en $x = x_2$.

Effet de la terminaison et de la source

On considère ici un guide d'ondes excité par une source à l'entrée et se terminant sur une impédance terminale connue Z_{t2} .

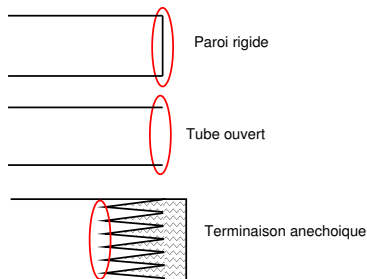


La terminaison et la source peuvent être décrites par leurs impédances acoustiques respectives Z_{t2} et Z_{t1} , traduisant la relation entre la pression et le débit respectivement en $x = L$ et $x = 0$.

Impédances usuelles

Les impédances usuelles sont :

- Paroi rigide : impédance infinie
 $Z_{t2} \rightarrow \infty$ (débit nul)
- Tube ouvert : impédance nulle
 $Z_{t2} = 0$ (pression nulle) en première approximation (nous verrons le rayonnement acoustique dans le prochain chapitre)
- Terminaison anéchoïque (sans écho) : impédance caractéristique $Z_{t2} = Z_{ac}$



Notion de modes propres

La nature des terminaisons à l'entrée et à la sortie du guide d'onde conditionne particulièrement les modes propres du système acoustique.

Un mode propre caractérise un système oscillant par une fréquence propre et une déformée modale.

- La fréquence propre est une des fréquences de résonance du système, pour laquelle un infime quantité d'énergie appliquée au système à cette fréquence va le mettre en vibration
- La déformée modale est la répartition spatiale des grandeurs physiques (pression, débit) à cette fréquence.

Effet des impédances terminales sur les fréquences propres

Les modes propres du système peuvent être déduits de l'analyse de l'impédance à l'entrée du système

- L'impédance d'entrée du système peut être calculée à l'aide de l'équation ramenée : connaissant l'impédance terminale Z_2 , l'impédance Z_1 est déduite
- la continuité de la pression et du débit à l'entrée conduit à écrire $Z_1 = Z_{t1}$.

Exemple : tube ouvert à sa terminaison ($x = x_2$). Dans ce cas l'impédance acoustique à l'entrée du tube s'écrit $Z_1 = jZ_{ac} \tan kL$ où L est la longueur du tube.

- Tube ouvert en $x = x_1$.

Dans ce cas l'impédance de l'entrée du tube est $Z_{t1} = 0$.

La condition $Z_1 = Z_{t1}$ impose $\tan kL = 0$, soit $kL = m\pi$.

Sachant que $k = \frac{2\pi f}{c}$, les fréquences propres sont données par $f_m = \frac{mc}{2L}$.

La relation entre longueur d'onde et longueur du tube est $L = \frac{m\lambda_m}{2}$

Effet des impédances terminales sur les fréquences propres

Les modes propres du système peuvent être déduits de l'analyse de l'impédance à l'entrée du système

- L'impédance d'entrée du système peut être calculée à l'aide de l'équation ramenée : connaissant l'impédance terminale Z_2 , l'impédance Z_1 est déduite
- la continuité de la pression et du débit à l'entrée conduit à écrire $Z_1 = Z_{t1}$.

Exemple : tube ouvert à sa terminaison ($x = x_2$). Dans ce cas l'impédance acoustique à l'entrée du tube s'écrit $Z_1 = jZ_{ac} \tan kL$ où L est la longueur du tube.

- Tube fermé en $x = x_1$.

Dans ce cas l'impédance de l'entrée du tube est $Z_{t1} \rightarrow \infty$.

La condition $Z_1 = Z_{t1}$ impose $\tan kL \rightarrow \infty$, soit $kL = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$.

Sachant que $k = \frac{2\pi f}{c}$, les fréquences propres sont données par $f_n = \frac{(2n+1)c}{4L}$.

La relation entre longueur d'onde et longueur du tube est $L = \frac{(2n+1)\lambda_n}{4}$.

Effet des impédances terminales sur les fréquences propres (2)

Illustration par les “boomwhackers”

L'effet des terminaisons sur les fréquences propres d'un tube est parfaitement illustré à l'aide d'instruments de musique destinés aux enfants, les boomwhackers. Ces instruments sont des tubes en plastique qui peuvent être ouverts à chaque extrémité (cas 1) ou ouvert à une extrémité et fermé à l'autre à l'aide d'un bouchon (cas 2).

Dans le cas 1, la première fréquence de résonance est approximativement $f_1 = \frac{c}{2L}$. Dans le cas 2, la première fréquence de résonance est approximativement $f_2 = \frac{c}{4L}$. Une illustration de ce phénomène peut être vue sur [cette vidéo](#).

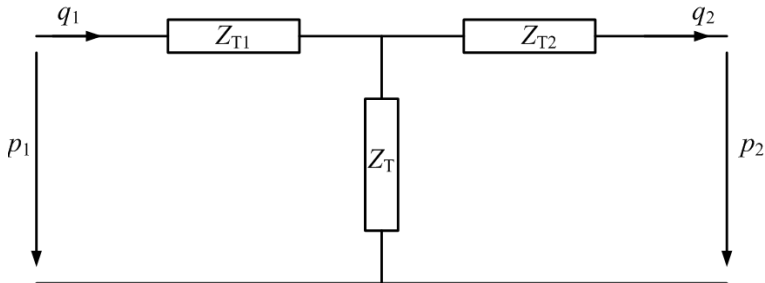
Animation interactive

Dans le cas d'un tube fermé à son entrée et ouvert à sa sortie, l'effet de la longueur du tube et de la température peut être observé en utilisant

[cette animation](#).

Schéma électrique équivalent en T

Le schéma dit "en T" permettant de représenter la transmission de l'onde entre l'entrée (abscisse x_1) et la sortie (abscisse x_2) du tube est présenté ci-dessous.



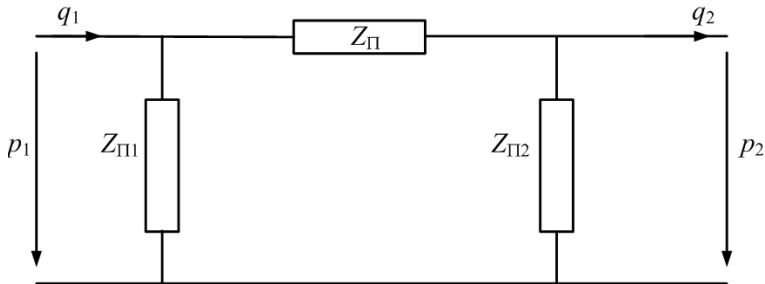
Les valeurs des impédances associées au schéma sont les suivantes

$$Z_{T1} = Z_{T2} = jZ_{ac} \tan \frac{k(x_2 - x_1)}{2} \quad (5)$$

$$Z_T = \frac{Z_{ac}}{j \sin k(x_2 - x_1)} \quad (6)$$

Schéma électrique équivalent en Π

L'objectif de cette partie est de présenter les schémas électriques équivalents au formalisme de la matrice de transfert présenté ci dessus. Le schéma dit en Π permettant de représenter la transmission de l'onde entre l'entrée (abscisse x_1) et la sortie (abscisse x_2) du tube est présenté ci-dessous.



Les valeurs des impédances associées au schéma sont les suivantes

$$Z_{\Pi 1} = Z_{\Pi 2} = \frac{Z_{ac}}{j \tan \frac{k(x_2 - x_1)}{2}} \quad (7)$$

$$Z_{\Pi} = jZ_{ac} \sin k(x_2 - x_1) \quad (8)$$

Approximation BF des schémas en T

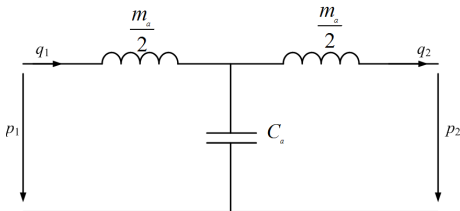
Dans le cas où la longueur d'onde est grande devant la longueur du tube, il est possible de remplacer les termes d'impédance du schéma en T

$Z_{T1} = Z_{T2} = jZ_{ac} \tan \frac{k(x_2 - x_1)}{2}$ et $Z_T = \frac{Z_{ac}}{j \sin k(x_2 - x_1)}$ par des termes obtenus après développement limité des fonctions tangente et sinus. Sachant que $k(x_2 - x_1) \ll 1$, il vient

$$Z_{T1} = Z_{T2} = jZ_{ac} \frac{k(x_2 - x_1)}{2} = j\omega \frac{\rho_0 L}{2S} = j\omega \frac{m_a}{2} \quad (9)$$

$$Z_T = \frac{Z_{ac}}{jk(x_2 - x_1)} = \frac{\rho_0 c^2}{j\omega V} = \frac{1}{j\omega C_a} \quad (10)$$

où $L = x_2 - x_1$ et $V = S(x_2 - x_1)$. m_a est la masse acoustique de la portion de longueur L ($m_a = \frac{\rho_0 L}{S}$) et C_a est la souplesse de la portion de longueur L ($C_a = \frac{V}{\rho_0 c^2}$). Le schéma équivalent à la portion de tube aux basses fréquences est donné à la figure ci dessous.



Approximation BF des schémas en Π

Dans le cas où la longueur d'onde est grande devant la longueur du tube, il est possible de remplacer les termes d'impédance du schéma en T

$Z_{\Pi 1} = Z_{\Pi 2} = \frac{Z_{ac}}{j \tan \frac{k(x_2 - x_1)}{2}}$ et $Z_{Pi} = jZ_{ac} \sin k(x_2 - x_1)$ par des termes obtenus après

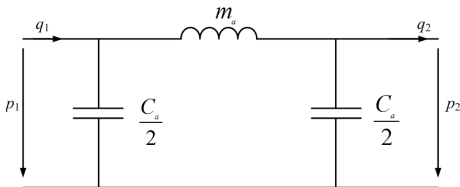
développement limité des fonctions tangente et sinus. Sachant que $k(x_2 - x_1) \ll 1$, il vient

$$Z_{\Pi 1} = Z_{\Pi 2} = \frac{Z_{ac}}{j \frac{k(x_2 - x_1)}{2}} = \frac{2\rho_0 c^2}{j\omega V} = \frac{2}{j\omega C_a} \quad (11)$$

$$Z_{\Pi} = jZ_{ac} \sin k(x_2 - x_1) = jZ_{ac} k(x_2 - x_1) = j\omega \frac{\rho_0 L}{S} = j\omega m_a \quad (12)$$

où $L = x_2 - x_1$ et $V = S(x_2 - x_1)$. M_a est la masse acoustique de la portion de longueur L ($m_a = \frac{\rho_0 L}{S}$) et C_a est la souplesse de la portion de longueur L

($C_a = \frac{V}{\rho_0 c^2}$). Le schéma équivalent à la portion de tube aux basses fréquences est donné à la figure ci dessous.



Synthèse (1)

- Dans beaucoup de problèmes d'électroacoustique, on considère que la longueur d'onde est beaucoup plus grande que la dimension des objets étudiés : c'est l'hypothèse des constantes localisées.
- Une portion de tube peut être vue comme un système masse ressort équivalent traduisant respectivement les phénomènes d'inertie et de compressibilité du fluide.
- La condition à la limite (extrémité du tube) conditionne le comportement du tube : un tube ouvert-ouvert se comporte comme une masse acoustique (l'air peut se déplacer sans se comprimer). Un tube ouvert-fermé se comporte comme un ressort acoustique (l'air peut comprimer sans se déplacer)
- le schéma électrique équivalent à un tube ouvert-ouvert est une inductance connectée en série. Le schéma équivalent à un tube ouvert-fermé est une capacitance connectée en parallèle.
- les schémas électriques équivalents aux guides d'ondes longs sont les schémas en T et les schémas en Π . Aux basses fréquences les valeurs des impédances dans ces schémas sont les valeurs obtenues en constantes localisées.

Synthèse (2)

- Au sein d'une discontinuité entre deux guides, il y a égalité de la pression et du débit de part et d'autre de la discontinuité.
- au sein d'une jonction de guides d'ondes, il y a égalité des pressions et conservations de débits.
- la réalisation du schéma électrique équivalent à un système de guides d'onde nécessite d'identifier la nature de l'impédance terminale ainsi que les comportements prédominants à chaque discontinuité (effet d'inertie ou de compressibilité).

Synthèse (3)

- Dans le cas des guides d'onde dont la longueur est supérieure à la longueur d'onde, il y a existence de phénomènes d'inertie et de compressibilité en tout point du guide. L'hypothèse de constantes localisées n'est plus valable.
- La relation entre les pressions et les débits acoustiques en deux points du guide est donnée par la matrice de transmission. Cette matrice permet de relier les impédances entre les deux points du guide (notion d'impédance ramenée).
- La nature des terminaisons à chaque extrémité du guide d'onde détermine les valeurs des fréquences propres du guide. Les cas usuels sont
 - Tube ouvert - ouvert : les fréquences propres satisfont la relation $f_n = n \frac{c}{2L}$ où L est la longueur du guide. On parle de résonance en $\frac{\lambda}{2}$.
 - Tube ouvert - fermé : les fréquences propres satisfont la relation $f_n = (2n + 1) \frac{c}{4L}$ où L est la longueur du guide. On parle de résonance en $\frac{\lambda}{4}$.

Bibliographie



Mario Rossi, Audio, PPUR, Chapitres 1.13, 6.3 et 6.4.



MIT Opencourseware, Acoustics of Speech & Hearing, Lecture 7: Lumped Elements, consulté en octobre 2014



Gary Scavone, Lumped Acoustic Elements, McGill University, consulté en octobre 2014



Robert Gabillard, Phénomènes de propagation d'ondes, consulté en octobre 2014



JJ Rousseau, Réflexion des ondes, Physique et simulations numériques, 2012, consulté en octobre 2014



JJ Rousseau, Tuyau sonore, Physique et simulations numériques, 2012, consulté en octobre 2014