

## 2.2 Systèmes mécaniques

Dr. Hervé Lissek

Signal Processing Laboratory 2 (LTS2)  
École polytechnique fédérale de Lausanne, Switzerland

24 septembre 2020

## Objectif

L'objectif de ce cours est d'identifier les principales notions mises en jeu dans les systèmes mécaniques oscillants, d'en réaliser des schémas symboliques puis de les convertir en équivalents électriques par analogies des phénomènes.

## Prérequis

- notions de mécanique du point
- notions de base d'électricité (cours 2.1)

## TEST d'ENTREE

### Question 1 : qu'est ce qu'un degré de liberté (en mécanique) ?

- C'est une possibilité de mouvement non contrainte (en translation ou en rotation) pour le système mécanique considéré.
- C'est la latitude dont dispose le mécanicien à choisir librement son référentiel de travail.
- Cela n'existe pas

## TEST d'ENTREE

### Question 2 : qu'est ce qu'un oscillateur (en mécanique) ?

- c'est un système compressible, de masse non nulle et finie.
- c'est un système présentant au moins une résonance.
- c'est un système susceptible d'évoluer autour d'une position d'équilibre stable

## TEST d'ENTREE

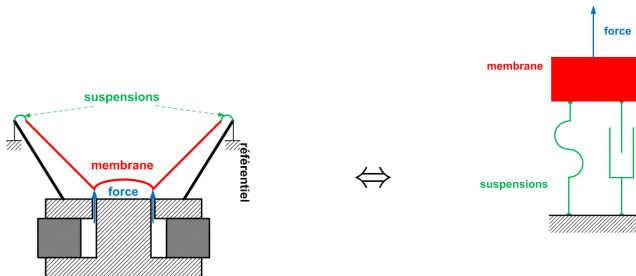
### Question 3 : que désigne la "résonance" d'un oscillateur mécanique à 1 degré de liberté ?

- c'est l'aptitude de ce système à accumuler de l'énergie à une fréquence particulière (dite de résonance)
- c'est l'aptitude de ce système à produire de l'énergie à une fréquence particulière (dite de résonance)
- c'est l'aptitude de ce système à dissiper de l'énergie à une fréquence particulière (dite de résonance)

## Objets représentables par analogie

Beaucoup de systèmes mécaniques réels peuvent être correctement approximatés par un nombre fini d'éléments mécaniques discrets.

En différenciant les principaux phénomènes mécaniques, il est ainsi possible de les représenter sous forme de masses indéformables, raideurs sans masse, etc.



Les exemples qui illustrent ce cours se limitent à des déplacements en translation, mais la même approche convient pour des translations et rotations multiples.

## Éléments mécaniques

Nous allons maintenant représenter sous forme d'éléments de base les principaux phénomènes mis en jeu dans les systèmes mécaniques :

- l'inertie d'une masse,
- la déformation d'un objet élastique,
- la dissipation par frottement,
- la transformation par un levier.

## Inertie d'une masse

### Masse "ponctuelle" rigide

La résultante  $F$  des forces extérieures appliquées à un corps rigide (sans déformation et sans amortissement) conduit à

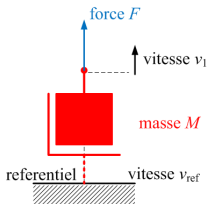


## Inertie d'une masse

## Masse "ponctuelle" rigide

La résultante  $F$  des forces extérieures appliquées à un corps rigide (sans déformation et sans amortissement) conduit à en accélérer le mouvement. L'inertie liée à sa masse  $M$  est proportionnelle à cette accélération, exprimée dans un repère galiléen.

## Relation Fondamentale de la Dynamique



$$F(t) = M \frac{d}{dt} (v_1(t) - v_{ref})$$
$$F = j\omega M (v_1 - v_{ref})$$

- Dans ce cours, le repère (référentiel mécanique) est fixe :  $v_{ref} = 0$ .
- L'inertie de la masse correspond à l'énergie cinétique du système.

## Déformation d'un objet

## Souplesse axiale linéaire sans masse

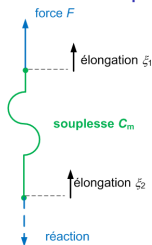
La résultante  $F$  des forces extérieures appliquées à un objet élastique (ici considéré sans masse et sans frottements) conduit à

## Déformation d'un objet

## Souplesse axiale linéaire sans masse

La résultante  $F$  des forces extérieures appliquées à un objet élastique (ici considéré sans masse et sans frottements) conduit à déformer cet objet.

## Loi de comportement



$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{C_m}(\xi_1(t) - \xi_2(t)) \\ &= \frac{1}{C_m} \int (v_1(t) - v_2(t)) dt \\ F &= \frac{1}{j\omega C_m}(v_1 - v_2) \end{aligned}$$

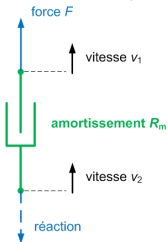
- En élasticité linéaire, la déformation ( $\xi_1 - \xi_2$ ) est proportionnelle à la force.
- Dans ce cours, l'élasticité est exprimée par la souplesse ("compliance")  $C_m$  plutôt que la raideur  $K_m = 1/C_m$ .
- La déformation élastique correspond à un "stockage" d'énergie potentielle.

## Amortissement

## Amortisseur ("dashpot") linéaire

La résultante  $F$  des forces extérieures appliquées à un objet sans raideur et de masse négligeable peut le déformer. La réaction de l'objet à cette déformation est alors dissipative.

## Loi de comportement



$$F(t) = R_m(v_1(t) - v_2(t))$$
$$F = R_m(v_1 - v_2)$$

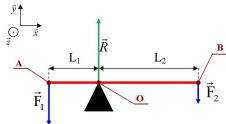
- La vitesse de déformation ( $v_1 - v_2$ ) est ici proportionnelle à  $F$ .
- Elle exprime une transformation irréversible liée à la viscosité linéaire.

## Levier mécanique

### Mécanisme idéal (sans pertes)

Un levier est un exemple de mécanisme idéal qui couple deux paires de grandeurs mécaniques  $(F_1, v_1)$  et  $(F_2, v_2)$ .

### Equations de couplage



$$\begin{aligned} F_1 \ell_1 &= F_2 \ell_2 \\ \frac{v_1}{\ell_1} &= \frac{v_2}{\ell_2} \end{aligned}$$

- Le levier joue le rôle d'un transformateur :  $\frac{F_1}{v_1} = \left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)^2 \frac{F_2}{v_2}$ .
- Cette transformation idéale conserve l'énergie.

## Analogies mécano-électriques

Nous allons maintenant représenter les phénomènes mis en jeu dans les systèmes mécaniques sous forme d'un schéma électrique équivalent. Ceci fait appel à l'analogie des phénomènes dans les deux formes d'énergie, qui peut s'exprimer de deux manières :

- analogie inverse (ou analogie admittance).
- analogie directe (ou analogie impédance),

## Analogie inverse

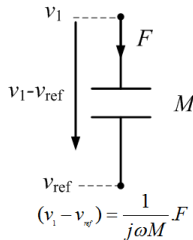
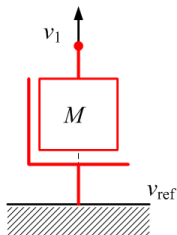
Conventionnellement, l'analogie "inverse" consiste à faire correspondre la **tension** électrique à la **vitesse** d'une masse mécanique.

D'un point de vue énergétique, cela conduit à représenter l'énergie **cinétique** d'un système mécanique sous la forme de l'énergie **potentielle** emmagasinée dans un **condensateur**. De même, l'énergie **potentielle** emmagasinée par la déformation d'un élément mécanique est représentée par l'énergie **cinétique** liée à la circulation d'un courant dans une **inductance**.

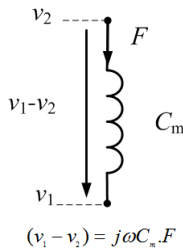
L'analogie "inverse" conduit ainsi à associer une **admittance électrique** à une **impédance mécanique** : elle est donc parfois appelée "analogie admittance".

## Analogie inverse des éléments mécaniques (1)

### Inertie



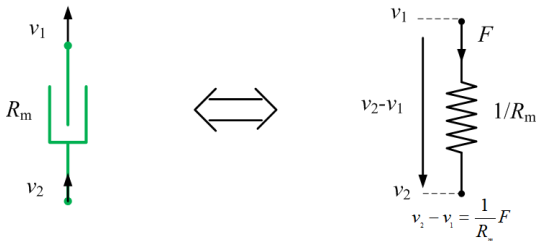
### Souplesse



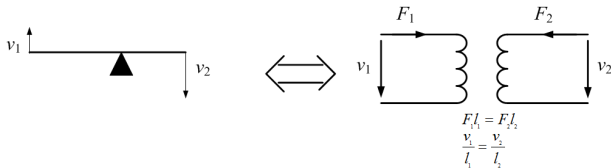


## Analogie inverse des éléments mécaniques (2)

### Amortissement



### Levier



## Analogie directe

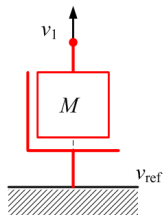
Conventionnellement, l'analogie "directe" consiste à faire correspondre le **courant** électrique à la **vitesse** d'une masse mécanique.

D'un point de vue énergétique, cela conduit à associer l'énergie cinétique d'un système mécanique à une forme d'énergie similaire dans sa représentation électrique. De même, l'énergie potentielle emmagasinée par la déformation d'un élément mécanique est représentée par l'énergie emmagasinée dans un condensateur sous l'influence d'une différence de potentiel.

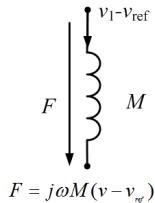
L'analogie "directe" conduit ainsi à associer une **impédance électrique** à une **impédance mécanique** : elle est donc parfois appelée "analogie impédance".

Les représentations de l'amortissement et d'un levier sont les mêmes dans les deux représentations, sauf que les rôles de la force et la vitesse sont inversés.

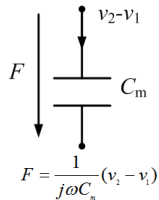
## Analogie directe des éléments mécaniques (1)



**Inertie**

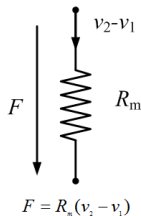
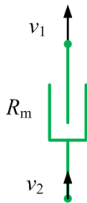


**Souplesse**

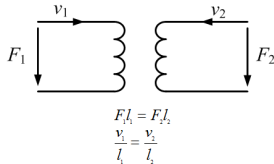
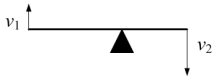


## Analogie directe des éléments mécaniques (2)

### Amortissement



### Levier

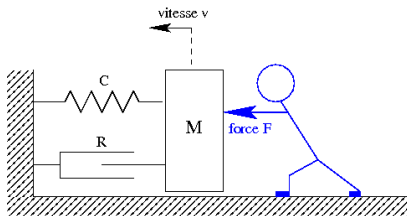


## Système mécanique simple

Nous allons maintenant illustrer les analogies mécano-électriques en établissant le schéma mécanique d'un système simple : le système "masse-ressort", puis en le représentant par son schéma électrique équivalent établi selon les deux analogies.

## Système "masse-ressort" soumis à une force externe (1/2)

Considérons le système mécanique présenté schématiquement sur la figure ci-dessous, qui consiste en un système masse-ressort soumis à une force par un opérateur extérieur.



Ce système est donc décrit par un seul DDL, la vitesse ( $v - v_{ref}$ ), et est soumis à la résultante des forces  $F$ , à laquelle il oppose sa réaction.

## Système "masse-ressort" soumis à une force externe (2/2)

Le bilan des forces mises en jeu permet d'établir l'équation du mouvement suivante

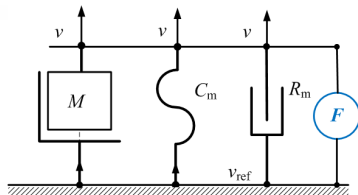
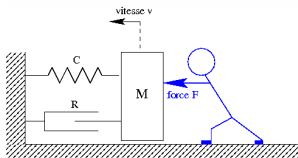
$$F(t) - \frac{1}{C_m}(\xi(t) - \xi_{ref}) - R_m(v(t) - v_{ref}) = M\partial_t(v(t) - v_{ref}),$$

soit encore, en régime harmonique :

$$F - \frac{1}{jC_m\omega}(v - v_{ref}) - R_m(v - v_{ref}) = j\omega M(v - v_{ref}).$$

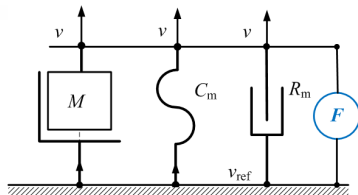
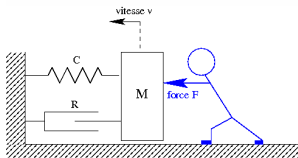
Considérant que l'action est la force exercée (cause du mouvement), et que l'effet de cette action est le mouvement de la masse (résultat), il est naturel en mécanique de considérer que **c'est la vitesse  $v$  qui "décrit" un DDL.**

## Système masse-ressort en analogie inverse (1)

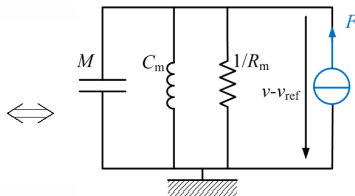
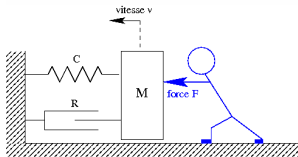




## Système masse-ressort en analogie inverse (1)

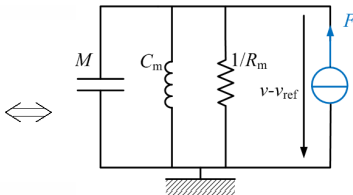
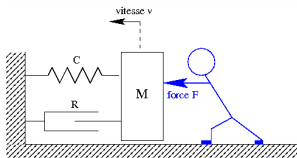


## Déduction du schéma en analogie inverse



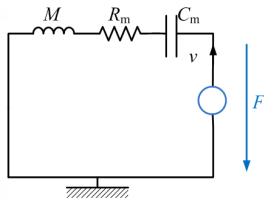
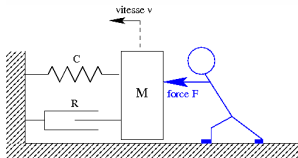
## Système masse-ressort en analogie inverse(2)

- L'action d'une force mécanique correspond à l'action d'un générateur de courant électrique.
- La vitesse résultante, commune aux trois éléments mécaniques, correspond à la tension aux bornes des trois éléments électriques.
- La structure graphique du schéma électrique similaire à celle du schéma mécanique.



## Système masse-ressort en analogie directe

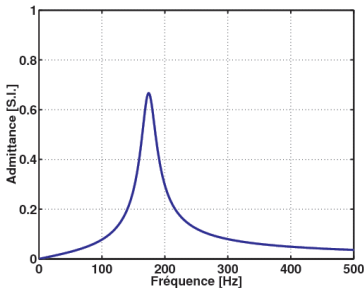
- L'action d'une force mécanique correspond à l'action d'un générateur de tension électrique.
- La vitesse résultante, commune aux trois éléments mécaniques, correspond au courant électrique qui traverse les trois éléments électriques.
- La structure graphique du schéma électrique n'est pas similaire à celle du schéma mécanique.



## Mobilité (admittance mécanique)

$$Y = \frac{v}{F} = \frac{j\omega C_m}{[1 - \omega^2(MC_m) + j\omega(R_m C_m)]} = \frac{j\omega C_m}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{\omega}{Q_m\omega_0}]}$$

avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{MC_m}}$  et  $Q = \frac{M\omega_0}{R_m}$

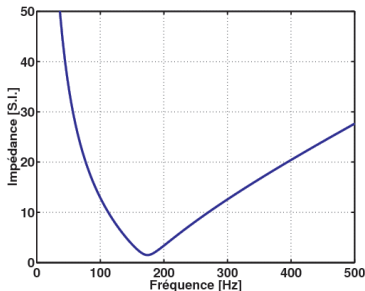


La mobilité (ou admittance mécanique)  $Y$  est maximale à la résonance, ce qui correspond à une manière plus intuitive de représenter la réponse du système.

## Impédance mécanique

$$Z = \frac{F}{v} = \left[ \frac{1}{j\omega C_m} + R_m + j\omega M \right] = \frac{[1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}]}{j\omega C_m}$$

avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{MC_m}}$  et  $Q = \frac{M\omega_0}{R_m}$



Alors que le système mécanique a une réaction maximale à la résonance (voisine de sa fréquence propre  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{MC}}$ ), celle-ci correspond à un minimum de l'impédance  $Z$  : cette grandeur ne représente donc pas la réponse du système de manière très intuitive.

## Choix d'une analogie

Les représentations usuelles sont liées aux moyens de mesure les plus accessibles : il est facile d'estimer un déplacement mécanique ou une tension électrique, et cela ne nécessite pas de modification des systèmes.

De ce fait, les présentations usuelles associent un degré de liberté à une grandeur spécifique à chaque forme d'énergie :

- La vitesse d'une masse pour un système mécanique,
- La tension d'un conducteur pour un système électrique.

La description mécanique la plus naturelle correspond donc à un schéma électrique en analogie inverse. Pourtant, il est plutôt d'usage de représenter les schémas électromécaniques équivalents en analogie directe, notamment pour éviter de mélanger les deux analogies lorsque l'on couple un système mécanique à une charge acoustique (elle même "naturellement" représentée en analogie directe)

## Applications, exemple d'un système à 2 DDL.

Nous allons maintenant voir une méthode simple et systématique pour transformer le schéma d'un système mécanique en un schéma électrique équivalent en analogie directe.

Cette méthode va être illustrée pour un cas d'étude réaliste, dans lequel il y a plusieurs degrés de liberté. Cette complexité accrue permet de réaliser l'intérêt de l'emploi d'une méthode systématique.

## Cas d'un système réel : le haut-parleur

vidéo "Aura-2p\_mb+susp\_1600Hz.avi"

Cette vidéo est issue d'une mesure effectuée avec un vibromètre laser. Elle représente la vibration (amplifiée pour être visible) d'un haut-parleur à une fréquence particulière correspondant à deux mouvements indépendants :  
d'une part le diaphragme, et d'autre part la suspension.

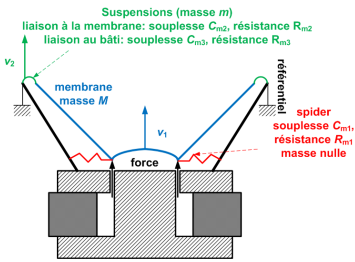
Le diaphragme est léger et très rigide : il se comporte comme un corps indéformable.

La suspension est très souple, et plutôt lourde : elle fléchit, et son inertie lui impose une déformation spécifique.

La partie mobile doit être décrite par deux masses indépendantes



Système mécanique



Système mécanique considéré

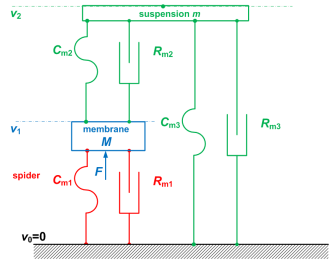


Schéma mécanique usuel.

## Méthode des mobilités : principe

- ★ La méthode des mobilités consiste à décrire dans un premier temps le système mécanique en analogie inverse, laquelle étant obtenue de façon "évidente", pour convertir ensuite le schéma électrique en analogie directe.
- ★ elle se décline en trois étapes :
  - Description du système par son schéma mécanique "**complet**".
  - Obtention du circuit électrique équivalent en analogie inverse (topologie du schéma mécanique "respectée" par l'analogie inverse)
  - Conversion en "circuit dual" pour obtenir le schéma électrique en analogie directe

Cette méthode est utilisable pour des systèmes complexes

## Méthode des mobilités : schéma mécanique

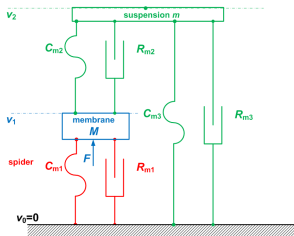
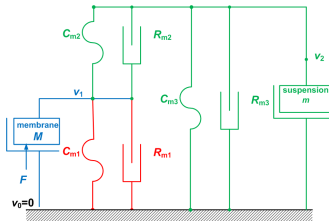


Schéma mécanique usuel



Nouveau schéma faisant apparaître  
les liaisons des masses au  
référentiel de vitesse nulle

### Le schéma mécanique doit être complet

- Chaque force externe est implicitement "reliée" au référentiel
- Ceci est en particulier vrai pour les "forces d'inertie" ( $M_i \frac{dv}{dt}$ )

## Méthode des mobilités : conversion en analogie inverse

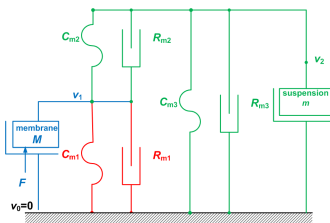


Schéma mécanique "complet"

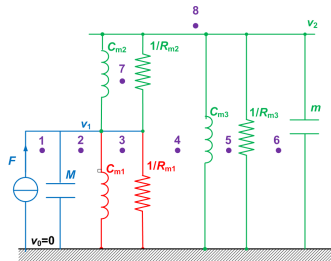


Schéma électrique équivalent en analogie inverse (admittance)

Masses du schéma mécanique (nœuds)  $\Leftrightarrow$  vitesses

- La structure du schéma est globalement conservée
- Les éléments sont donc convertis un par un

## Méthode des mobilités : conversion en schéma dual

Objectif

Tests

Contexte

Éléments  
mécaniques

Analogie  
inverse

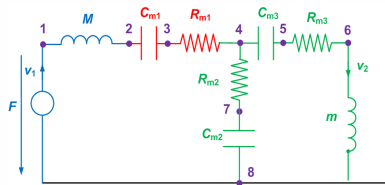
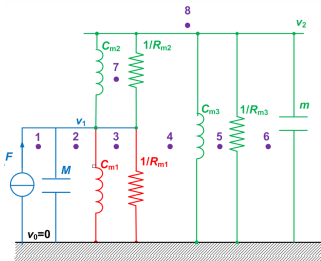
Analogie  
directe

Système  
mécanique  
simple

Comparaison  
des analogies

Exemple du  
HP

Méthode des  
mobilités



gauche : Schéma électrique en analogie inverse. droite : Schéma électrique en analogie directe.

### Tout circuit possède son "dual"

- Afin d'obtenir le circuit dual, on commence par placer un point dans chaque maille, y compris la maille extérieure (ici indiquée 8). Ces mailles deviennent alors des noeuds par passage au circuit dual.
- Les éléments partagés par 2 mailles indépendantes sont les éléments à connecter entre les 2 noeuds correspondant du circuit dual, et compte-tenu que le changement d'analogie implique également un changement de la nature de l'élément, i.e. un condensateur  $C_m$  devient une self  $C_m$ , une résistance  $1/R_m$  devient une résistance  $R_m$ , etc ...

## Résumé (1)

Les éléments mécaniques élémentaires peuvent être représentés par des équivalents "électriques", dans un schéma analogue électrique :

- en analogie "inverse" :
  - une **masse** est représentée par un symbole **capacité**
  - une **souplesse** est représentée par un symbole **inductance**
  - une **résistance mécanique** est représentée par un symbole **résistance**
  - un **levier** est représenté par un symbole **transformateur**
- en analogie "directe" :
  - une **masse** est représentée par un symbole **inductance**
  - une **souplesse** est représentée par un symbole **capacité**
  - une **résistance mécanique** est représentée par un symbole **résistance**
  - un **levier** est représenté par un symbole **transformateur**

La méthode permettant de construire un schéma direct est la suivante :

- construction du schéma symbolique
  - à partir d'un schéma de principe du dispositif mécanique, identifier toutes les vitesses notées  $v_i$

**Note : chaque masse doit correspondre à une vitesse**

- tracer des lignes de "potentiels" associée à chaque  $v_i$
- insérer les éléments symboliques mécaniques des éléments du dispositif mécanique aux lignes de potentiels correspondant

**Note : toujours relier les symboles masse à la référence des vitesses**

## Résumé (3)

- construction du schéma inverse
  - recopier le schéma symbolique, en remplaçant chaque élément symbolique par l'analogie électrique en convention "inverse"  
**Note : dans cette convention, les résistances sont des conductances de valeur  $1/R_m$**
  - la "masse" du circuit correspond au potentiel de vitesse nulle  $v_{ref} = 0$
  - au besoin, arranger le schéma (pour bien faire apparaître les mailles par exemple)



- construction du schéma direct
  - identifier chaque maille du circuit inverse et dessiner un point, qui correspond à un noeud dans la représentation directe (que l'on peut numéroté pour vérification in fine)
  - mettre un point à l'extérieur du circuit
  - relier **tous** les points entre eux, en remplaçant les éléments inverses en leur dual dans la représentation directe

**Note 1 : si deux points-maillles ne sont séparés que par un fil (court-circuit), le dual est un circuit ouvert que l'on n'a pas besoin de représenter**

**Note 2 : ne pas oublier de relier le point à l'extérieur du circuit inverse**

**Note 3 : les éléments en série dans la représentation inverse sont en parallèle dans la représentation directe**

**Note 4 : les éléments en parallèle dans la représentation inverse sont en série dans la représentation directe**
- dessiner le circuit direct en n'oubliant pas les éventuelles sources, et en reportant les valeurs des composants

**Note : ne pas oublier d'inverser les conductances  $1/R_m$  en résistances  $R_m$**

**Déterminer le schéma électrique équivalent au système qui suit (partie mécanique d'un accéléromètre)**

