

Boucles à verrouillage de phase ou "Phase-Locked Loop" (PLL)

A Ionescu

Boucles à verrouillage de phase "Phase-Locked Loops" - PLL

Introduction et notions de base

Etude générale

Modèle linéaire et fonction de transfert

Comportement dynamique

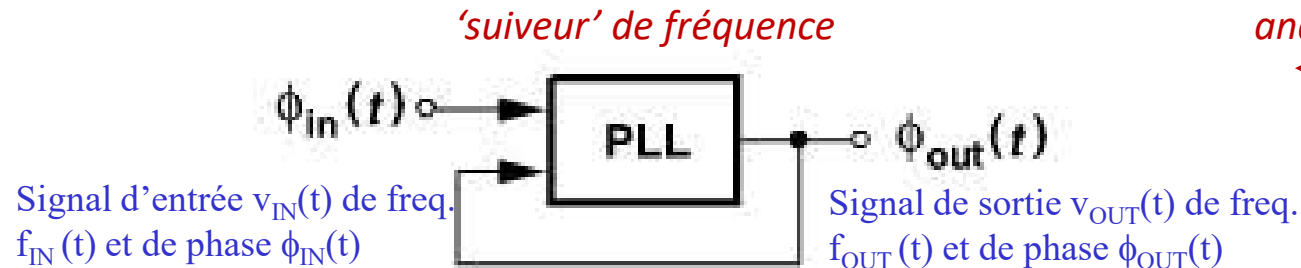
Etude des blocs fonctionnels

Applications

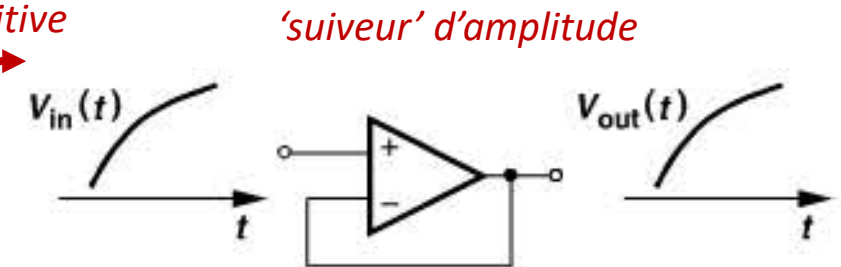
INTRODUCTION: C'est quoi une PLL

Une boucle à verrouillage de phase (PLL) est un circuit électronique avec **réaction négative** qui essaye de maintenir constamment **le signal à sa sortie en phase avec le signal à son entrée**.

Si le **déphasage** entre les 2 signaux est maintenu **constant**, leurs **fréquence sera identique**.



analogie intuitive



La PLL maintient, à travers la boucle de réaction négative, $\phi_{in}(t) - \phi_{out}(t)$ **constant (pas nécessairement zéro)** dans le temps (on dit que la phase de sortie est "verrouillée ou locked" à la phase d'entrée). Cela garantit que **$f_{out}(t) = f_{in}(t)$** !

Le circuit **suiveur de tension** garantit, selon le principe de la réaction négative, que **$v_{out}(t) = v_{in}(t)$** .

Une conséquence importante et unique du verrouillage de phase est que les fréquences (pulsation) d'entrée et de sortie de la PLL sont **exactement égales**. Cela peut être observé en tenant compte de:

relation phase-fréquence: $\phi = \int \omega(t) dt$ et en écrivant : $\Phi_{IN} - \Phi_{OUT} = \text{constant}$

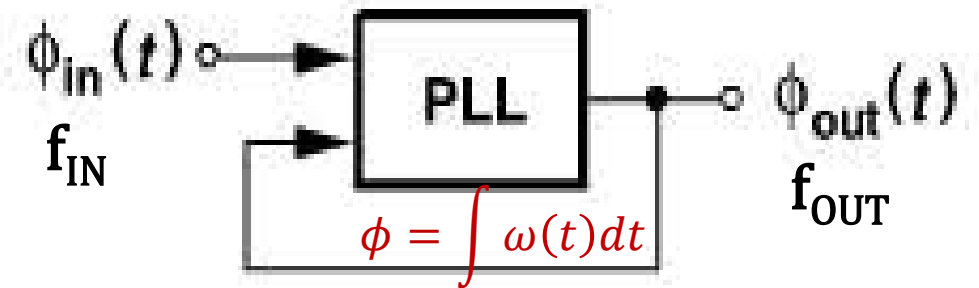
$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

$$\frac{d\Phi_{IN}}{dt} = \frac{d\Phi_{OUT}}{dt} \rightarrow \omega_{OUT} = \omega_{IN} \leftrightarrow f_{OUT} = f_{IN}$$

INTRODUCTION: notions préliminaires

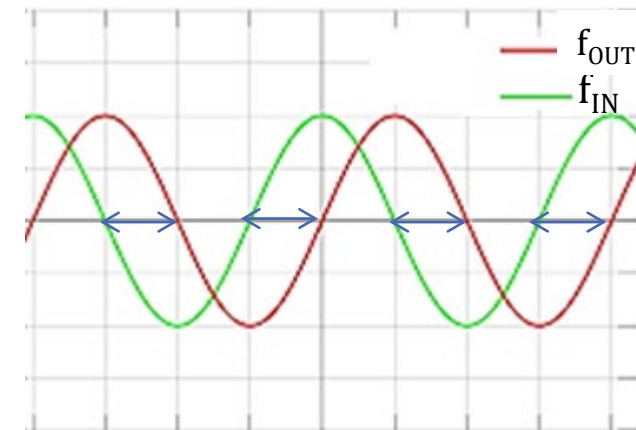
Pourquoi parler de boucle à **verrouillage de phase** si l'objectif est d'obtenir des **fréquences identiques**, $f_{OUT} = f_{IN}$?

Dans un système à réaction négative, une différence non nulle apparaît à l'équilibre entre l'entrée et la sortie. Le principe de base de la PLL est de ne pas comparer directement les fréquences des signaux d'entrée et de sortie, ce qui créerait une différence (erreur) de fréquence à l'équilibre. Au lieu de cela, la réaction négative se base sur les phases des signaux (intégrales des fréquences) avec un facteur de 2π . **À l'équilibre, une différence de phase constante subsiste entre l'entrée et la sortie, tout en maintenant des fréquences identiques.**



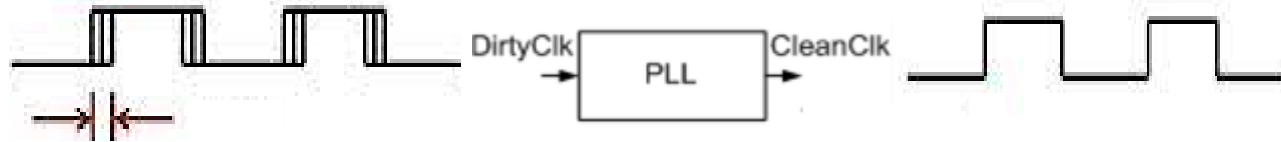
$$\Phi_{IN} - \Phi_{OUT} = constant$$

$$\frac{d\Phi_{IN}}{dt} = \frac{d\Phi_{OUT}}{dt} \rightarrow \omega_{OUT} = \omega_{IN} \leftrightarrow f_{OUT} = f_{IN}$$

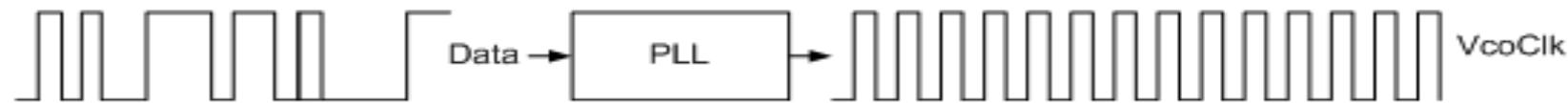


Quelques applications

Réduction du 'jitter': Les signaux subissent souvent des variations temporelles, appelées jitter, lors de leur transmission à travers un canal de communication ou lors de leur récupération depuis un support de stockage. Le jitter se manifeste sous la forme de variations de la période d'une forme d'onde. Une PLL peut être utilisée pour réduire le jitter permettant ainsi une récupération des données corrompues.



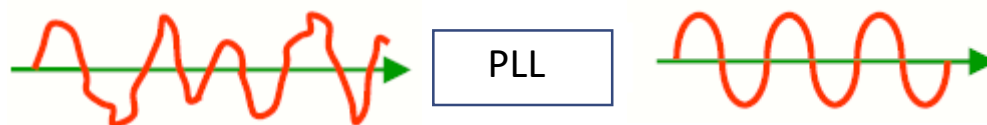
Récupération d'horloge: Dans de nombreux systèmes, les données sont transmises ou récupérées sans référence temporelle supplémentaire. Dans les communications optiques, par exemple, un flux de données circule sur une seule fibre sans horloge accompagnante, mais le récepteur doit traiter les données de manière synchrone. La plupart des circuits de récupération d'horloge utilisent le verrouillage de phase.



Synthèse de fréquence: La PLL permet de produire les signaux de fréquence très stable et variable par pas nécessaires dans les systèmes de télécommunications



Extraction d'un signal:



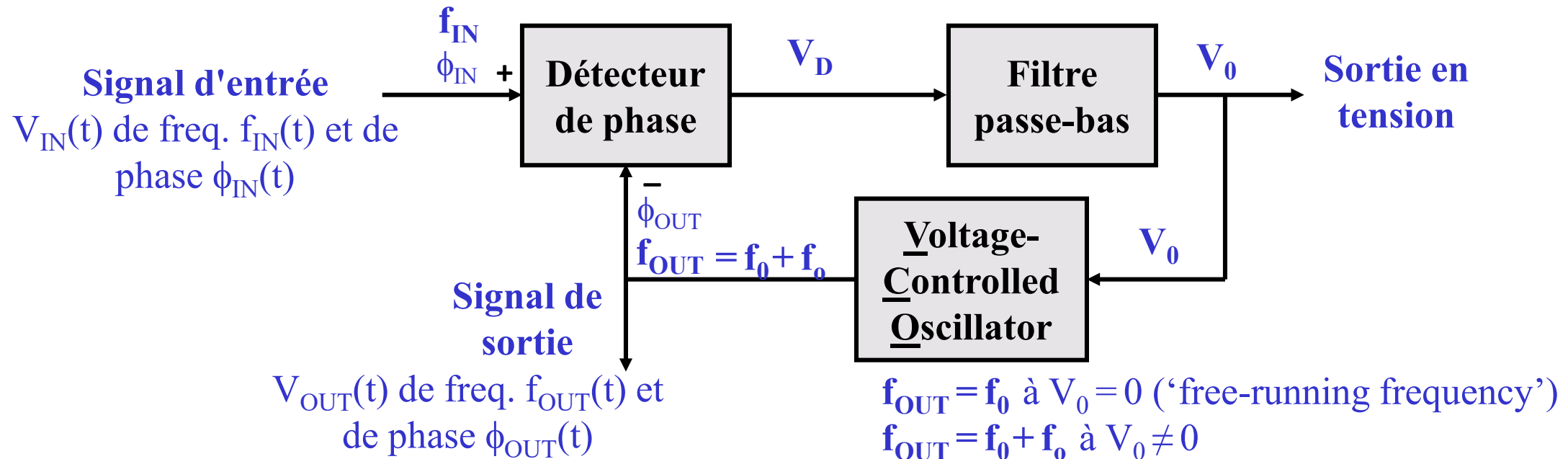
'Histoire' de la PLL

- 1932 : Invention de la "communication cohérente" utilisant une lampe à vide (Ing. deBellescize)
- 1943 : Synchronisation horizontale et verticale des balayages à la télévision (Wendt et Faraday)
- 1954 : Télévision couleur (Richman)
- 1965 : PLL sur circuit intégré
- 1972 : PLL entièrement numérique
- **PLL aujourd'hui** : dans chaque téléphone portable, télévision, radio, 'pager', ordinateur,..
 - Récupération d'horloge et de données
 - Synthèse de fréquence
 - Génération d'horloge
 - Minimisation du décalage d'horloge
 - etc

1. ETUDE GÉNÉRALE

1. ETUDE GÉNÉRALE DE LA PLL

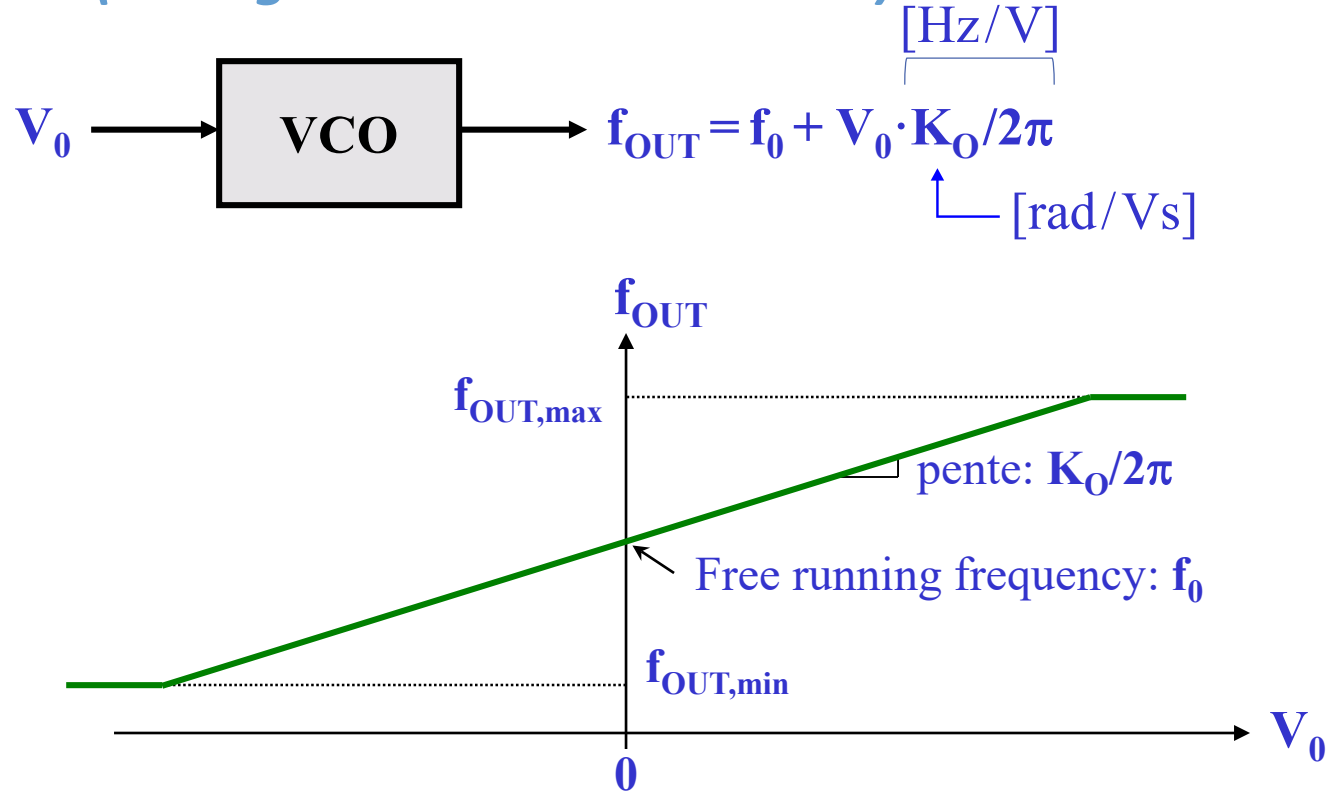
1.1. SCHEMA BLOC



- le **comparateur (détecteur) de phase**: compare la phase d'un signal d'entrée avec la phase du signal fourni par le VCO, produisant une tension V_D proportionnelle à la différence de phase, $\phi_{IN} - \phi_{OUT}$
- le **filtre passe-bas** lisse la tension V_D en gardant sa valeur moyenne et en supprimant les harmoniques; il maintient la tension V_0 de commande correcte à l'entrée du VCO, c'à d à l'image de la fréquence d'entrée f_{IN}
- le **VCO** fournit en sortie un signal sinusoïdal ou carré dont la fréquence instantanée f_{OUT} dépend de V_0
- **A l'équilibre**: $\phi_{IN} - \phi_{OUT} = \text{constant} \rightarrow f_{IN} = f_{OUT}$

1. ETUDE GÉNÉRALE DE LA PLL

1.3. LE VCO (Voltage Controlled Oscillator)



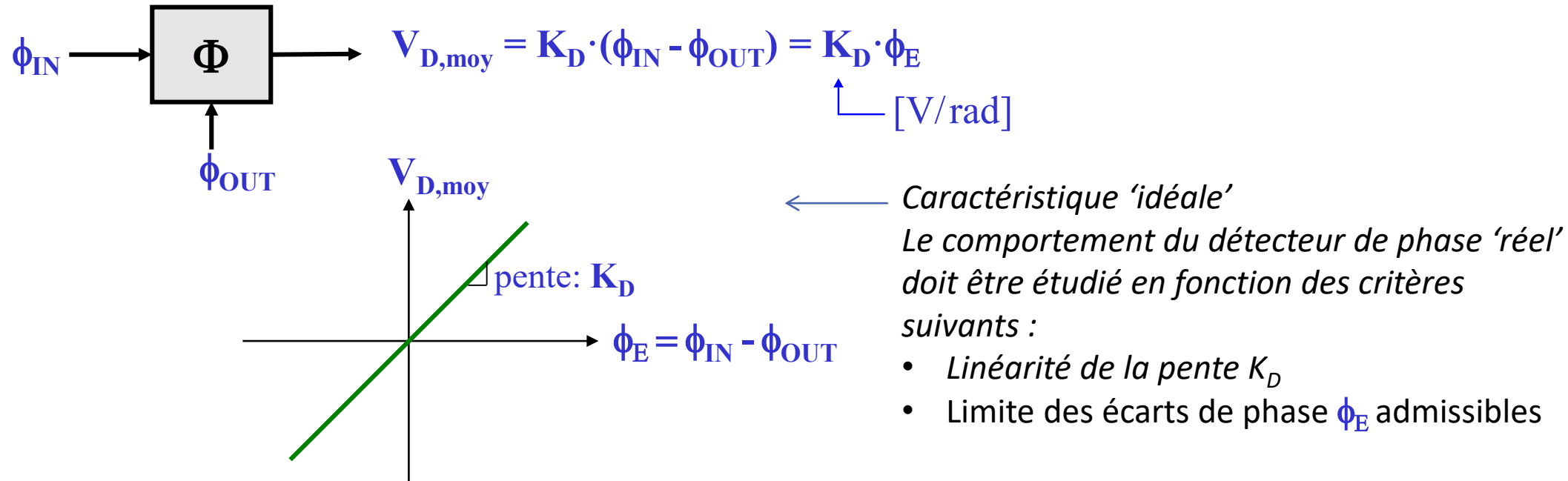
Un VCO peut être:

- Un oscillateur sinusoïdal contrôlé en tension
- Une bascule astable (multivibrateur) contrôlée en tension
- Un oscillateur en anneau contrôlé en tension

Note: Parfois la caractéristique de transfert n'est pas centrée sur V_0 , ce qui veut dire que la freq free running peut correspondre à une tension $V_0 \neq 0$, comme dans l'exercice en polycopie)

1. ETUDE GÉNÉRALE DE LA PLL

1.4. LE DETECTEUR (COMPARATEUR) DE PHASE IDEAL

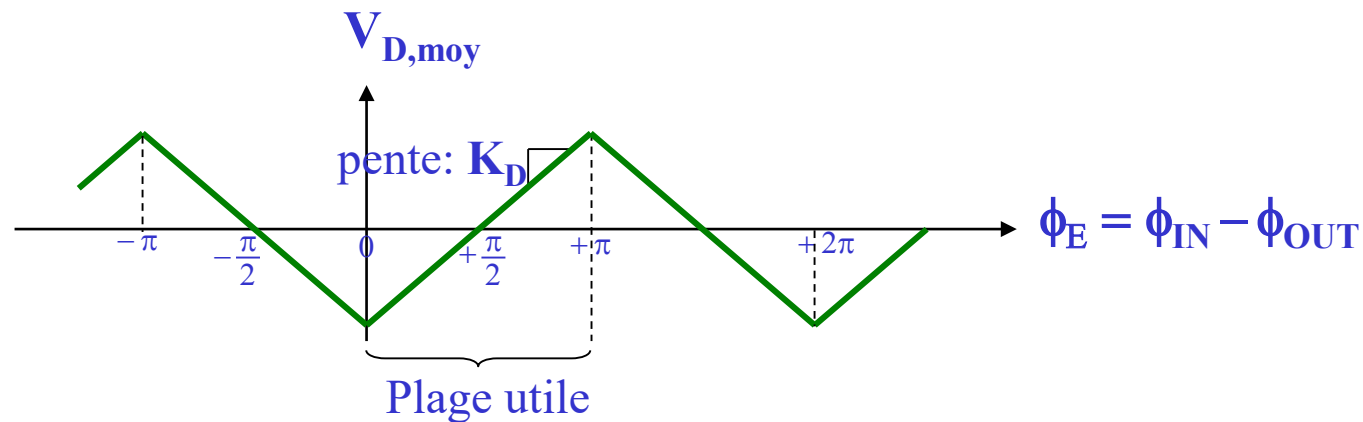


- La réalisation peut être soit **analogique** (multiplieur), soit **numérique** (XOR ou séquentielle)
- Dans les deux cas, $v_D(t)$ contient des signaux parasites alternatifs indésirables, sous forme d'arcs de sinus ou d'impulsion rectangulaires. Ces composantes indésirables seront atténuées par le filtre passe-bas de la boucle.

1. ETUDE GÉNÉRALE DE LA PLL

1.4. LE DÉTECTEUR DE PHASE BASÉ SUR LA MULTIPLICATION ANALOGIQUE OU LA FONCTION LOGIQUE XOR

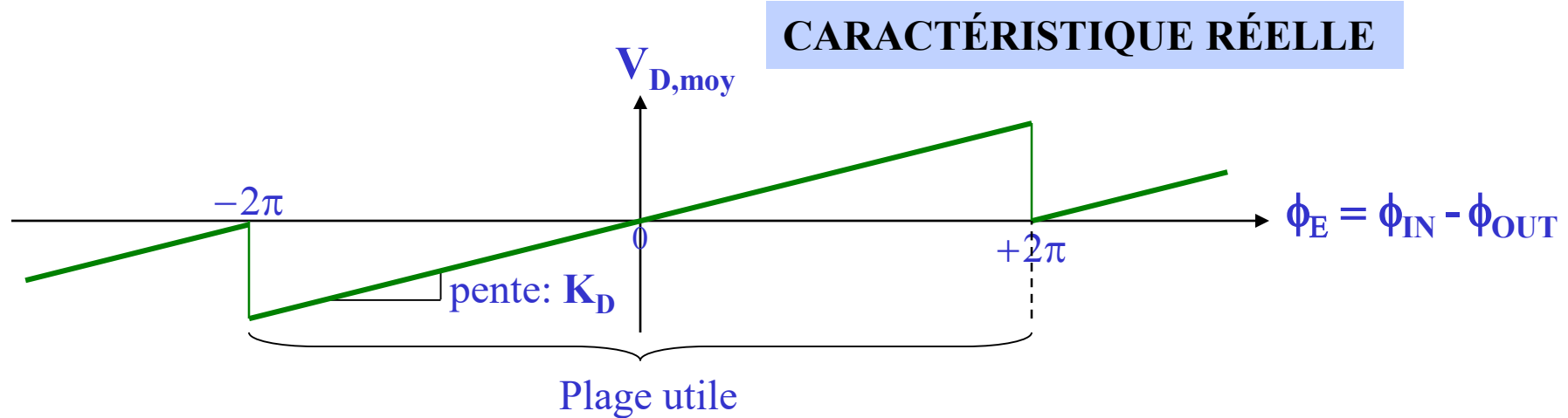
CARACTÉRISTIQUE RÉELLE



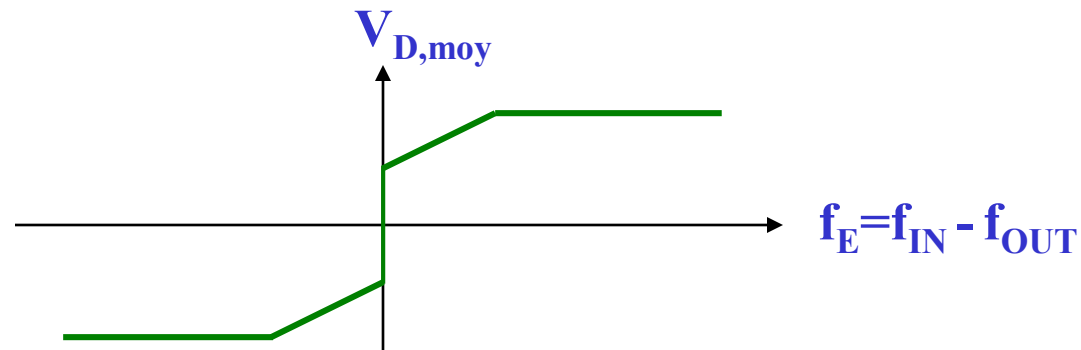
- Seule la partie avec une pente positive est utilisable dans la boucle qui doit être en réaction négative

1. ETUDE GÉNÉRALE DE LA PLL

1.4. LE DÉTECTEUR PHASE-FRÉQUENCE À LOGIQUE SÉQUENTIELLE

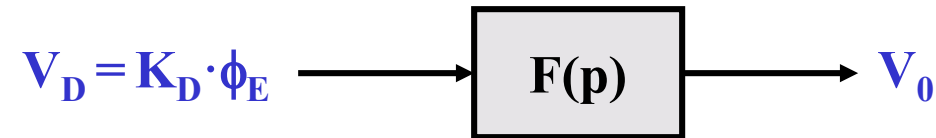


Une fonction "détection de fréquence" apparaît lorsqu'il y a perte du verrouillage (sera démontré dans le chapitre dédié aux circuits Détecteurs de phase)



1. ETUDE GÉNÉRALE DE LA PLL

1.5. LE FILTRE PASSE-BAS



Le filtre $F(p)$ joue un rôle majeur dans le comportement de la PLL:

- il fixe 'l'ordre' de la PLL (=l'ordre du filtre +1)
- il atténue les composantes indésirables à la sortie du détecteur de phase
- il fixe 'la bande passante' (vitesse de réaction) de la PLL
- il détermine le comportement dynamique ou transitoire de la PLL ainsi que sa stabilité
- il sert éventuellement à mémoriser V_0 (et donc f_{OUT}) si le signal d'entrée à f_{IN} disparaît momentanément

1. ETUDE GÉNÉRALE DE LA PLL

ETATS DE FONCTIONNEMENT:

- 1. Non-verrouillé***
- 2. Capture***
- 3. Verrouillée /Suivi***

1. ETUDE GÉNÉRALE DE LA PLL

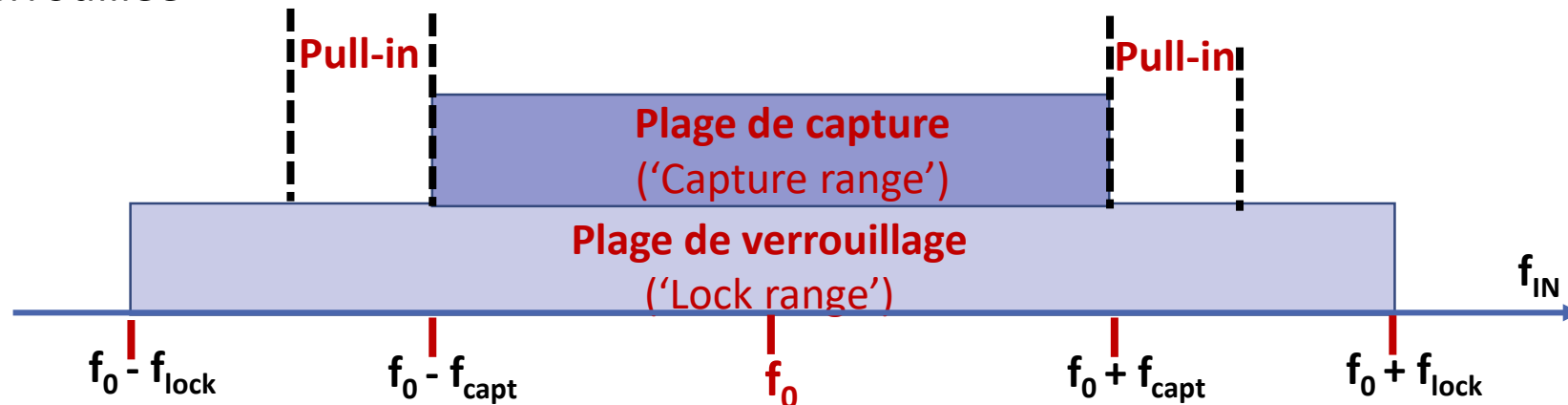
1.6 ETATS DE FONCTIONNEMENT

⇒ en l'absence de signal à l'entrée, ou si la fréquence du signal à l'entrée est en dehors de la plage de fonctionnement du VCO, la boucle est dite **non verrouillée** et $f_{OUT} = f_0$ (f_0 fréquence centrale du VCO)

⇒ si on a un signal à l'entrée de fréquence f_{IN} voisin de f_0 (f_{IN} approche la **plage de capture**) la PLL se **verrouille** et aboutit au bout d'un temps bref ('**pull-in**', 1 à 100 ms en général) à un état stable caractérisé par $f_{OUT} = f_{IN}$ (processus de '**capture**' et '**verrouillage**')

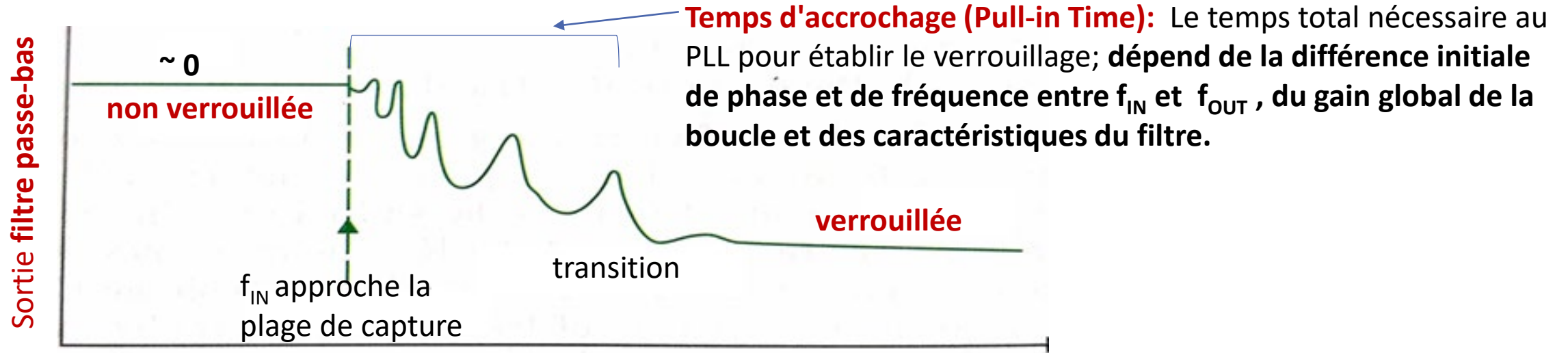
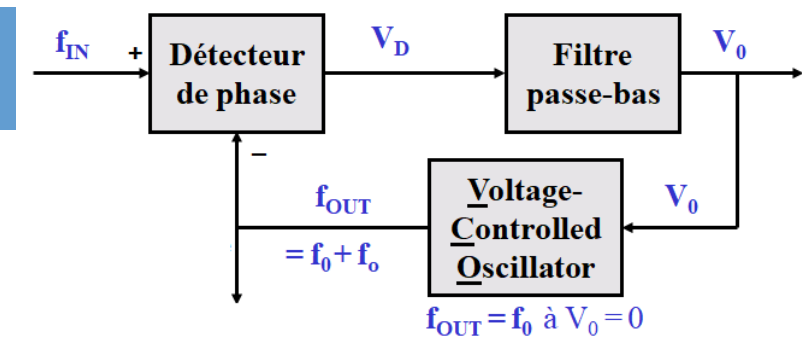
⇒ une fois la PLL verrouillée, f_{IN} peut varier dans la **plage de verrouillage** sans que la PLL ne décroche, et on a toujours $f_{OUT} = f_{IN}$ (processus de '**suivie**')

⇒ si f_{IN} sort de la plage de verrouillage, la boucle **décroche** et on revient à la situation d'une boucle non verrouillée



1. ETUDE GÉNÉRALE DE LA PLL

1.7 PROCESSUS DE CAPTURE

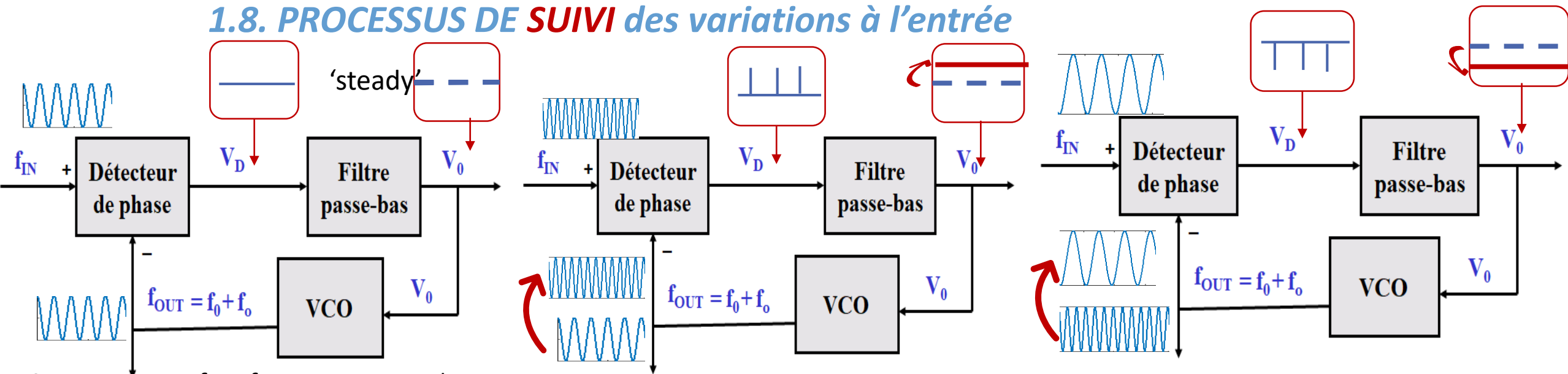


La figure décrit le processus transitoire de capture **contrôlé par le filtre passe-bas (FPB)**

- Si le signal à la sortie du détecteur de phase, proportionnel au différence $f_{IN} - f_{OUT}$, a une fréq. trop élevée pour passer à travers le FPB, la PLL ne répondra pas. On dit que le signal d'entrée est hors de la plage de capture de la PLL.
- Si la fréq du signal d'entrée s'approche la plage de capture, $f_{IN} - f_{OUT}$ diminue, et le FPB commence à laisser passer une composante qui déclenche la phase transitoire 'pull-in'; le signal est capturé et la PLL peut se verrouiller et suivre ce signal au-delà de la plage de capture.
- Par conséquent, **la plage de verrouillage > la plage de capture.**

1. ETUDE GÉNÉRALE DE LA PLL

1.8. PROCESSUS DE **SUIVI** des variations à l'entrée



Supposons que $f_{IN} = f_{OUT}$. Dans ce cas, le détecteur de phase 'voit' deux signaux en phase (écart de phase constant), donc sa sortie V_D a une valeur constante. Il envoie ce signal au filtre passe-bas, et cette valeur ('steady') est transmise à l'entrée du VCO, de sorte que VCO ne change pas sa fréquence de sortie. La boucle est stable, et dans cette condition, on dit que la boucle est **verrouillée**.

Si f_{IN} commence à augmenter légèrement par rapport à f_{OUT} , le détecteur de phase générera des valeurs positives (V_D) vers le filtre passe-bas. Celui-ci lisse et moyenne V_D pour obtenir un niveau continu positif, V_0 , forçant le VCO à augmenter sa fréquence jusqu'à ce que f_{IN} et f_{OUT} soient de nouveau à la même valeur. La boucle peut toujours être qualifiée de **verrouillée**.

Si f_{IN} commence maintenant à diminuer par rapport à f_{OUT} , le détecteur de phase génère des valeurs négatives qui sont redressées par le filtre de boucle pour créer un niveau continu négatif forçant le VCO à fonctionner plus lentement jusqu'à ce que f_{IN} et f_{OUT} soient à nouveau synchronisés. Le système reste stable, et la boucle demeure **verrouillée**.

Si f_{IN} varie trop rapidement ou de manière trop importante pour que le filtre de boucle et le VCO puissent suivre, la boucle se **déverrouille**. Elle se verrouillera à nouveau lorsque f_{IN} reviendra dans plages capture et verrouillage

1. ETUDE GÉNÉRALE DE LA PLL

1.9. **PLAGE DE CAPTURE** or 'CAPTURE RANGE'

On appelle 'Capture Range' ω_{capt} l'écart maximal de pulsation d'entrée par rapport à la pulsation libre $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$ sur laquelle la PLL parvient à se verrouiller, alors qu'elle ne l'est initialement pas.

Exemple de calcul:

Lorsque la boucle n'est pas verrouillée, $\omega_{\text{OUT}} = \omega_0 \neq \omega_{\text{IN}}$. Le signal de sortie d'un *détecteur de phase de type multiplicateur ou XOR* contient alors une composante basse fréquence, de pulsation $|\omega_{\text{IN}} - \omega_0|$, d'amplitude $K_D \cdot \pi/2$, et de forme entre le sinus et le triangle.

La résultante V_0 après le filtre passe-bas est (approximation grossière ne tenant compte que de la fondamentale du triangle) :

$$V_{0,\text{crête}} \approx \frac{\pi}{2} \cdot K_D \cdot |\underline{F}(j(\omega_{\text{IN}} - \omega_0))|$$

La PLL ne parviendra à se verrouiller que si: $V_{0,\text{crête}} \cdot K_O \geq |\omega_{\text{IN}} - \omega_0|$ ← Variation de pulsation du signal d'entrée autour de la pulsation libre du VCO

D'où:

$$\omega_{\text{capt}} \approx \frac{\pi}{2} \cdot K_D \cdot K_O \cdot |\underline{F}(j\omega_{\text{capt}})|$$

← Variation de pulsation du VCO autour de la pulsation libre (sa plage de pulsations de sortie)

- **déterminé par le filtre passe-bas** (appelé aussi filtre de boucle)
- définit le **comportement dynamique de la PLL**
- exprimé en général en pulsation (au lieu de freq.) à cause du fait que le gain du VCO, K_O , est souvent donné en rad/Vs

1. ETUDE GÉNÉRALE DE LA PLL

1.10. *PLAGE DE VERROUILLAGE* or 'LOCK RANGE'

On appelle 'Lock Range' ω_{lock} l'écart maximal de pulsation d'entrée par rapport à la pulsation libre $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$ sur laquelle la PLL reste verrouillée une fois qu'elle a capturé le signal d'entrée. Peut être limité soit par le détecteur de phase, soit par la plage de fréquences du VCO.

Exemple de calcul:

a) Si limité par le détecteur de phase: $\omega_{\text{lock}} = V_{0,\text{min,max}} \cdot K_O$

Variation maximale de pulsation du VCO
autour de a pulsation free running

En régime statique:

$$\omega_{o,\text{min/max}} = V_{0,\text{min/max}} \cdot K_O = \phi_{c,\text{min/max}} \cdot K_D \cdot |F(j0)| \cdot K_O$$

Avec un détecteur de phase de type multiplicateur ou XOR: $\phi_{c,\text{min/max}} = -/+ \frac{\pi}{2}$

Avec filtre passe-bas passif: $\underline{E}(j0) = 1$

Lorsque la boucle est verrouillée: $\omega_o = \omega_i$

$$\omega_{\text{lock}} = \frac{\pi}{2} \cdot K_D \cdot K_O$$

- Ne dépend pas du filtre passe-bas (filtre de boucle)
- Dépend du gain de la boucle en courant continu, $K_D K_O$

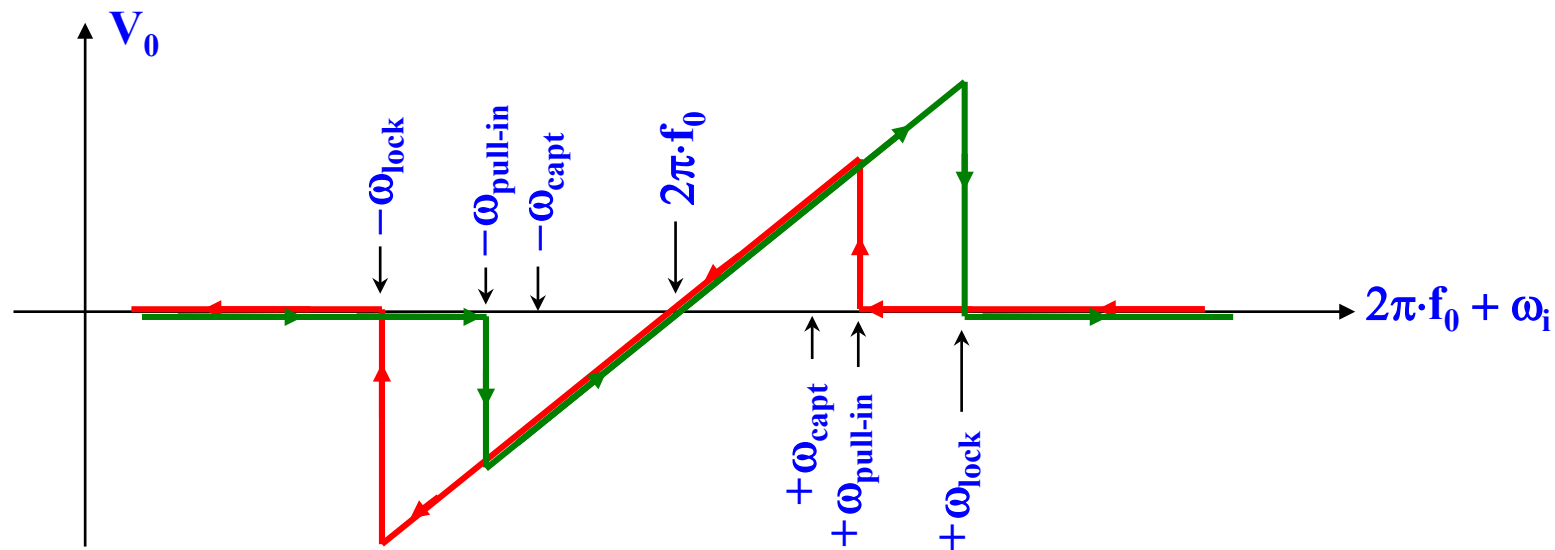
b) Si limité par le VCO: $\omega_{\text{lock}} = \omega_{o,\text{min,max}}$

- Dépend de la plage maximale de variation à la sortie du VCO (caractéristique du VCO)

1. ETUDE GÉNÉRALE DE LA PLL

1.11. MESURE STATIQUE DES "LOCK RANGE", "CAPTURE RANGE" ET "PULL-IN RANGE"

Lorsque la fréquence d'entrée balaye lentement une zone autour de f_0 plus large que la plage de verrouillage, on observe la tension V_0 suivante:

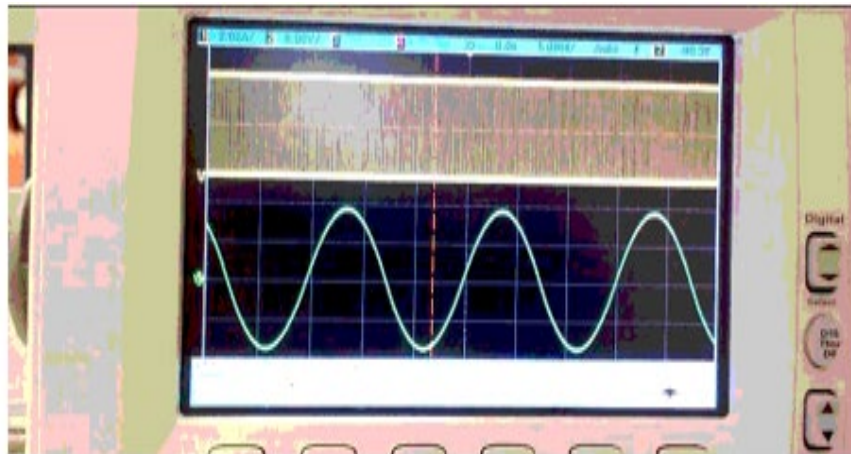


Avec un détecteur de type phase-fréquence et un filtre intégrateur les "Lock Range", "Capture Range" et "Pull-In Range" sont tous identiques, déterminés par la dynamique du VCO ou celle de sortie du filtre.

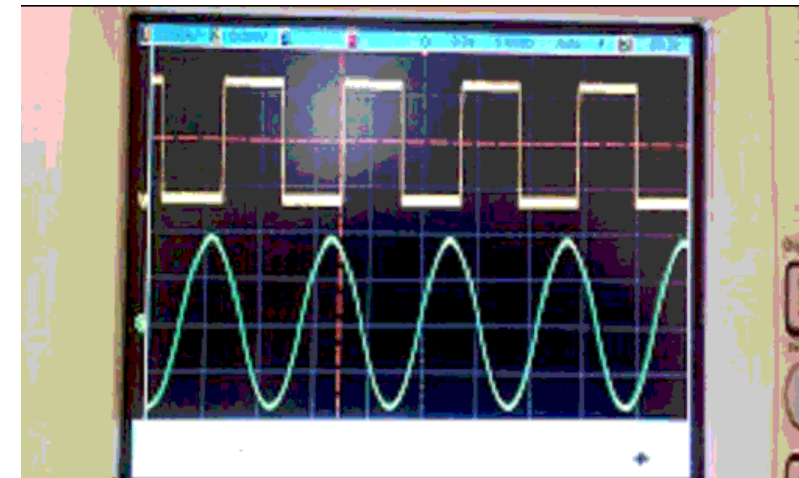
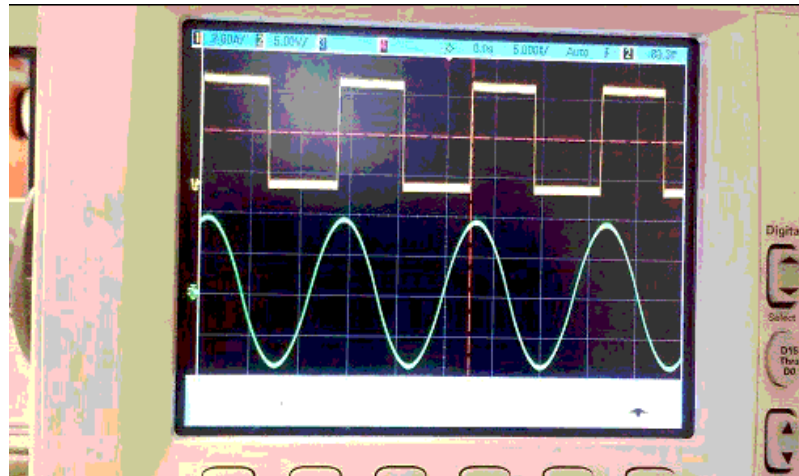
1. ETUDE GÉNÉRALE DE LA PLL

FONCTIONNEMENT - illustration

Boucle deverrouillé



Boucle verrouillé



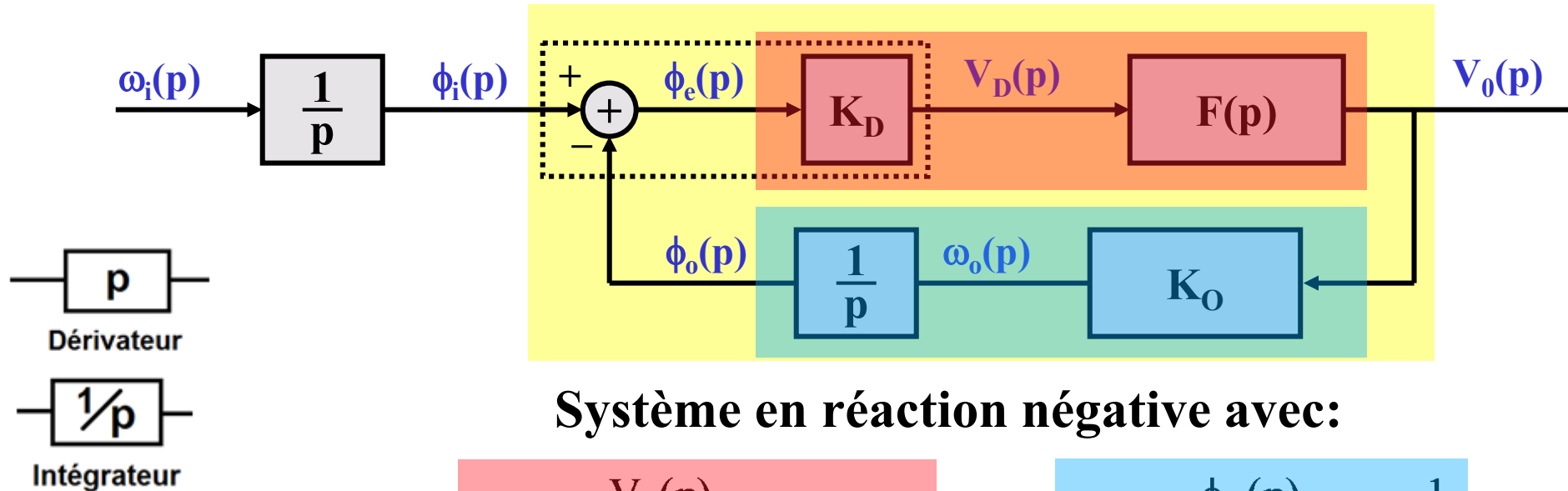
2. MODELE LINEAIRE ET FONCTION DE TRANSFERT

Hypothèse (modèle linéaire) et outil d'analyse (Laplace)

- **Lors du fonctionnement en mode verrouillage**, les corrections qui sont apportées au VCO ont des amplitudes très faibles. Ceci signifie que **les variations des grandeurs autour des points de fonctionnement des différents éléments constitutifs de la boucle ont des amplitudes suffisamment faibles pour que l'on puisse admettre que le fonctionnement est linéaire.**
- **Pour déduire la fonction de transfert globale de la PLL on utilise la transformée de Laplace:**
 - utile pour analyser les systèmes linéaires invariants dans le domaine temporel. Elle transforme une fonction du temps en une fonction d'une variable complexe p (notée aussi ' s ').
 - **permet d'étudier la réponse transitoire et la réponse en régime permanent d'un système.**
- **La fonction de transfert globale de la PLL sera déduite en considérant la transformée de Laplace de chaque élément constitutif, ainsi que sa topologie base sur la réaction négative**

2. FONCTION DE TRANSFERT GÉNÉRALE DE LA PLL

2.1 MODELE LINEAIRE



Système en réaction négative avec:

$$A(p) = \frac{V_0(p)}{\phi_e(p)} = K_D \cdot F(p)$$

et

$$\beta(p) = \frac{\phi_o(p)}{V_0(p)} = K_O \cdot \frac{1}{p}$$

$$A_F(p) = \frac{V_0(p)}{\phi_i(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p) \cdot \beta(p)} = \frac{K_D \cdot F(p)}{1 + \frac{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}{p}} = \frac{p \cdot K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O}$$

2. FONCTION DE TRANSFERT GÉNÉRALE DE LA PLL

$$A_F(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p) \cdot \beta(p)}$$



$$\frac{V_0(p)}{\phi_i(p)} = \frac{p \cdot K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O}$$

$$\phi_i(p) = \frac{\omega_i(p)}{p}$$



$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O}$$

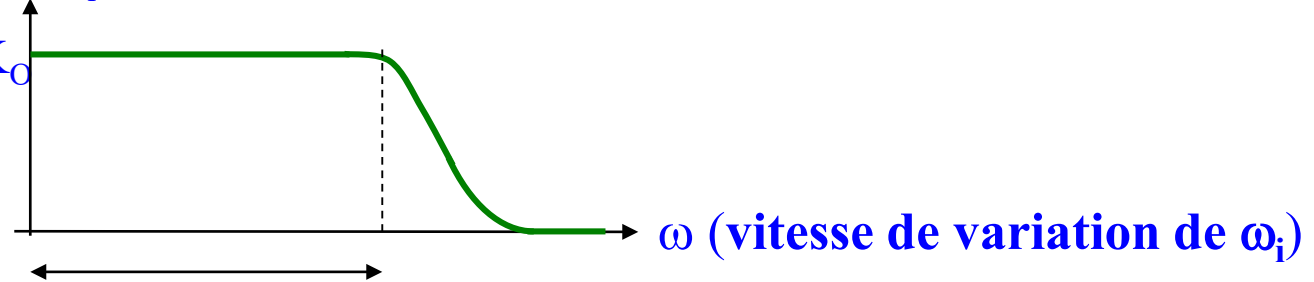
"Gain" de la PLL

$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}}$$

$$\frac{V_0(j\omega)}{\omega_i(j\omega)} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{K_D \cdot F(j\omega) \cdot K_O}}$$

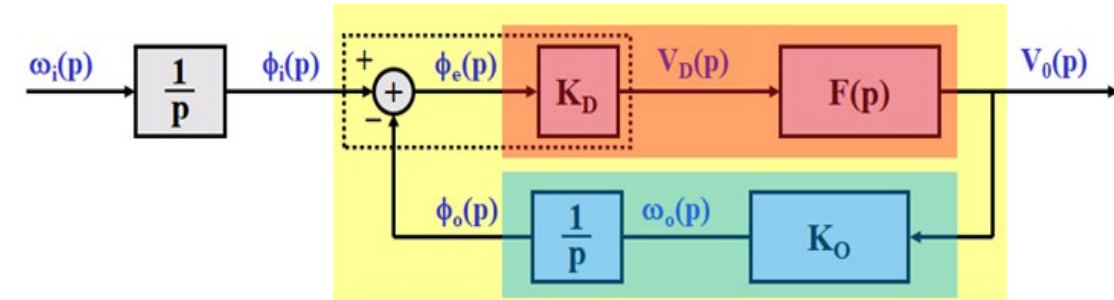
$|V_0(j\omega)/\omega_i(j\omega)|$

$1/K_O$



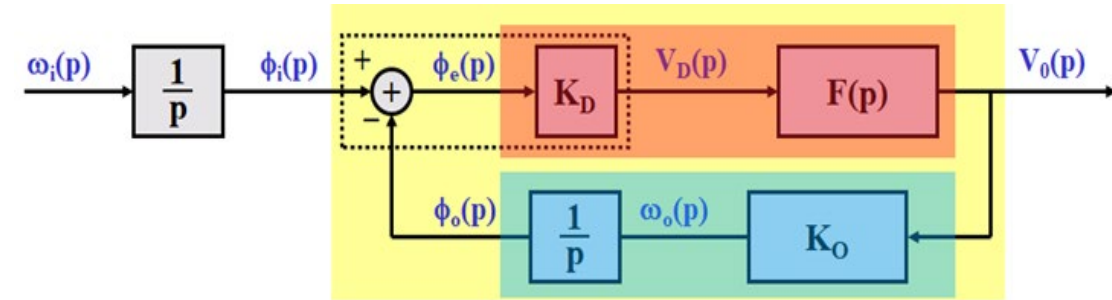
Permet d'analyser comment va réagir la PLL lorsqu'on fait varier la pulsation à l'entrée, ω_i , plus ou moins vite

Bande passante de la PLL (représente la plage de pulsation dans laquelle la PLL peut suivre ou corriger les variations de pulsation et de phase de son signal d'entrée)



2. FONCTION DE TRANSFERT GÉNÉRALE DE LA PLL

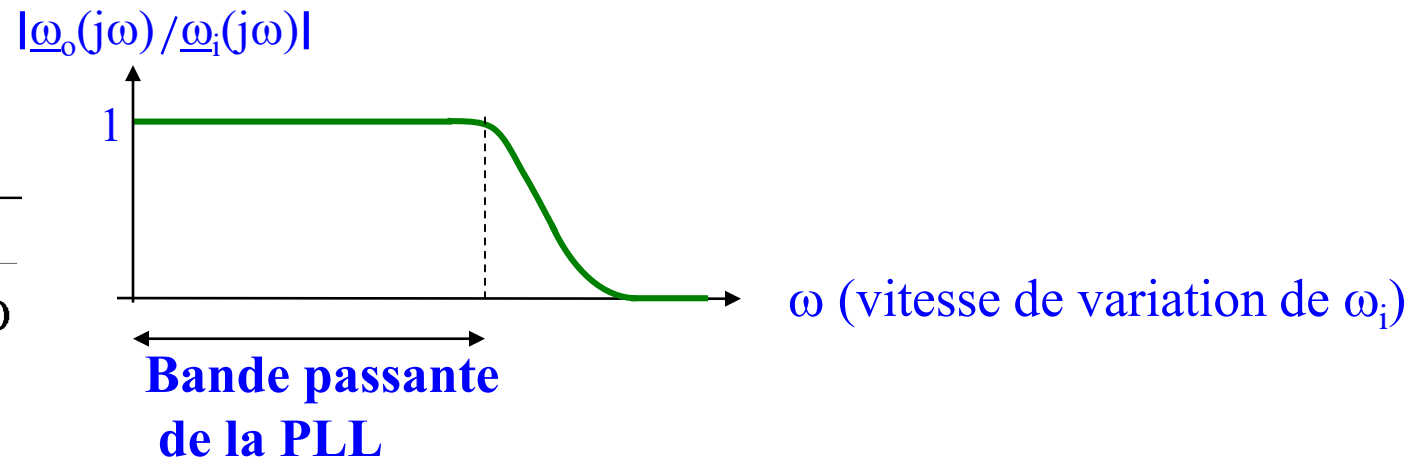
$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}}$$



$$\omega_o(p) = K_O \cdot V_0(p) \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_o(p)}{\omega_i(p)} = \frac{\phi_o(p)}{\phi_i(p)} = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}}$$

**La PLL est
un "suiveur" de fréquence**

$$\frac{\underline{\omega}_0(j\omega)}{\underline{\omega}_i(j\omega)} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{K_D \cdot F(j\omega) \cdot K_O}}$$



2. FONCTION DE TRANSFERT GÉNÉRALE DE LA PLL

$$A_F(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p) \cdot \beta(p)}$$



$$\frac{V_0(p)}{\phi_i(p)} = \frac{p \cdot K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O}$$

$$\phi_i(p) = \frac{\omega_i(p)}{p}$$



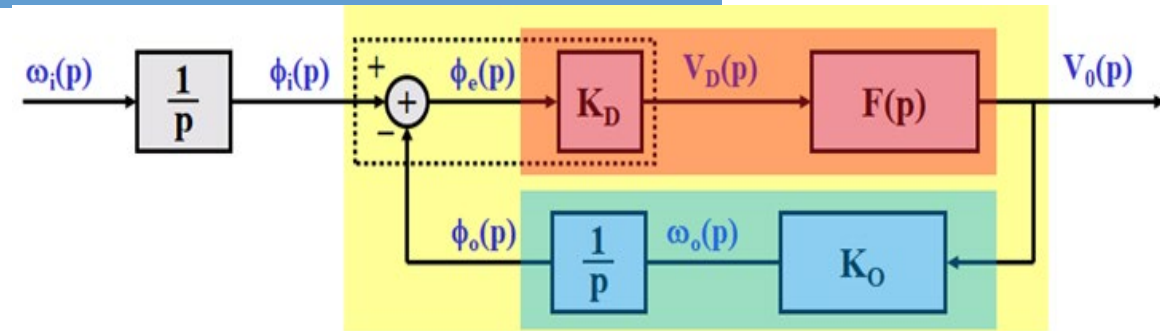
$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O}$$

$$V_0(p) = \phi_e(p) \cdot K_D \cdot F(p)$$



$$\frac{\phi_e(p)}{\phi_i(p)} = \frac{p}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O}$$

$$H_{ol}(p) = \left. \frac{\phi_o(p)}{\phi_i(p)} \right|_{ol} = A(p) \cdot \beta(p) \quad \left. \frac{\phi_o(p)}{\phi_i(p)} \right|_{ol} = \frac{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}{p}$$



Fonctions de transfert de la boucle fermée

"Gain" de la PLL

Fonction "d'erreur"

Permet de calculer pour différents signaux indépendants d'entrée quelle est l'erreur de phase dans la boucle, et vérifier quelle ne dépasse pas l'erreur maximale tolérée par le détecteur de phase

"Gain de boucle ouverte"

Trois observations importantes:

1. La PLL est un système avec une "mémoire" (intégrale dans la boucle), donc **sa sortie nécessite un temps fini pour répondre à un changement à son entrée, exigeant une bonne compréhension de la dynamique de la boucle.**
2. **Dans une PLL, contrairement à de nombreux autres systèmes à réaction négative, la variable d'intérêt change de dimension autour de la boucle :** elle est convertie de la phase en tension (ou courant) par le détecteur de phase, traitée en tant que telle par le filtre passe-bas, puis reconvertie en phase par le VCO.
3. **En condition de verrouillage, les fréquences d'entrée et de sortie sont exactement égales, bien que l'erreur de phase puisse ne pas être nulle, mais soit nécessairement constante.** Il s'agit d'une propriété extrêmement importante car de nombreuses applications tolèrent mal même de petites différences (systématiques) entre les fréquences d'entrée et de sortie. Notez que si le détecteur de phase est remplacé par un simple détecteur de fréquence, cette propriété disparaît.

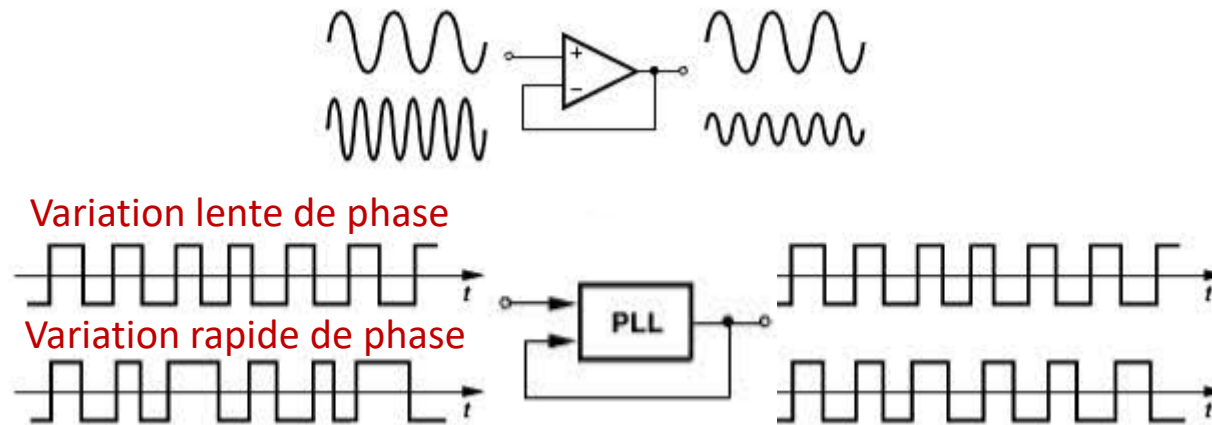
3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

Comprendre intuitivement la fonction de transfert de la PLL

Analogie avec le suiveur de tension

Pour un suiveur de tension, la fonction de transfert indique comment une tension sinusoïdale d'entrée se propage jusqu'à la sortie. Par exemple, une sinusoïde avec une fréquence basse subit peu d'atténuation, tandis qu'une sinusoïde avec une fréquence plus élevée est retrouvée à la sortie avec une amplitude en tension plus faible (justification dans l'étude stabilité réaction négative...).

Comment étendons-nous ces concepts au domaine de la phase ?



La fonction de transfert d'une PLL doit révéler comment une variation lente ou rapide de la phase du signal d'entrée se propage jusqu'à la sortie. La figure illustre des exemples de variations lentes et rapides de la phase. À partir de l'exemple montré, on peut supposer que le comportement passe-bas de la PLL "atténue" les excursions (variations larges) de phase si la phase d'entrée varie rapidement. Autrement dit, la sortie suit étroitement la phase d'entrée uniquement pour des variations lentes.

Méthode d'analyse (1/2)

- Pour caractériser le comportement dynamique de la PLL on va étudier sa réponse à quatre types de sollicitations à l'entrée: *saut de phase, saut de fréquence, rampe de fréquence et modulation sinusoïdale de fréquence*
- La PLL est supposée être un système linéaire; ceci signifie, en particulier, que **les amplitudes des sauts de phase ou des pulsations appliqués à l'entrée restent limités de façon à ce que la boucle restent verrouillée**
- **Le comportement dynamique de la PLL est directement lié au filtre passe-bas dans la boucle (ordre, nombre et positions des pôles et zéros)**
- **L'ordre de la PLL = l'ordre du filtre +1**
- **L'écriture de la fonction de transfert de la PLL sous forme *canonique* permet d'identifier facilement les paramètres caractéristiques du comportement du système.** Pour un système de 2nd ordre (PLL avec un filtre de boucle du première ordre) ces paramètres sont: **le gain statique, le coefficient d'amortissement (ζ) ou le facteur de qualité (Q), et la pulsation propre (naturelle) (ω_n)**

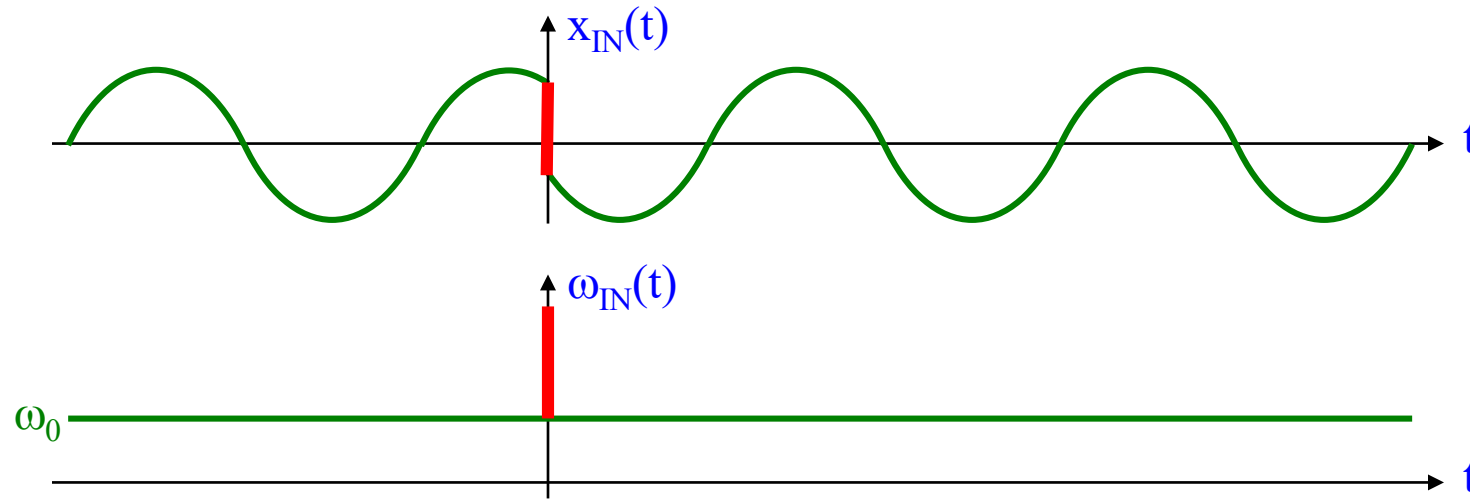
Méthode d'analyse (2/2)

- **Pulsation Propre (ω_n)** : est la fréquence à laquelle la PLL oscillerait en réponse à une perturbation s'il n'y avait pas d'amortissement. Dans une PLL de deuxième ordre, la pulsation propre dépend du filtre de boucle et d'autres paramètres du système. Elle définit en grande partie la rapidité de réponse de la PLL pour suivre les variations de la fréquence du signal d'entrée. Une pulsation propre élevée permet une correction d'erreurs plus rapide, mais peut entraîner une instabilité si l'amortissement n'est pas suffisant.
- **Facteur d'Amortissement (ζ)** : caractérise la manière dont les oscillations dans le système décroissent après une perturbation. Il détermine si la réponse du système à un décalage de fréquence ou de phase sera lisse ou oscillatoire. Pour caractérisation on utilise en général le facteur de qualité : $2 \cdot \xi = 1/Q$
- Un facteur de qualité :
 - *Q élevé (faible amortissement)* : le système est plus réactif mais présente des oscillations importantes pendant qu'il se verrouille.
 - *Q moyen (amortissement modéré)* : le système atteint l'état de verrouillage rapidement avec quelques oscillations faibles.
 - *Q faible (amortissement élevé)* : le système se verrouille sans oscillation, mais la réponse est plus lente. Les valeurs de la pulsation propre et du facteur d'amortissement sont essentielles pour ajuster le temps de réponse et la stabilité de la PLL, surtout dans des applications nécessitant un suivi de phase précis et un temps de stabilisation minimal.

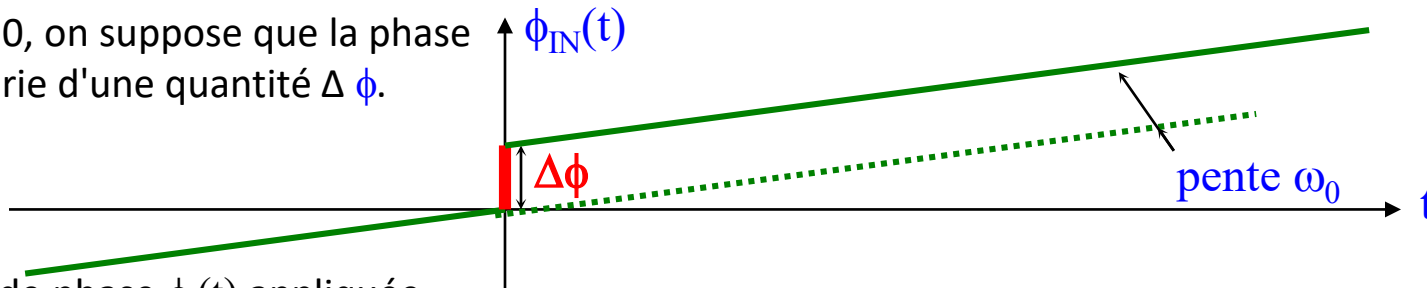
Nous utiliserons pour l'analyse des courbes d'amortissement qui montrent la relation entre ω_n , l'erreur de phase et ζ (Q). Il convient de noter, cependant, que ces courbes supposent que $K_D K_O \gg \omega_n$, le critère d'une boucle à gain élevé.

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

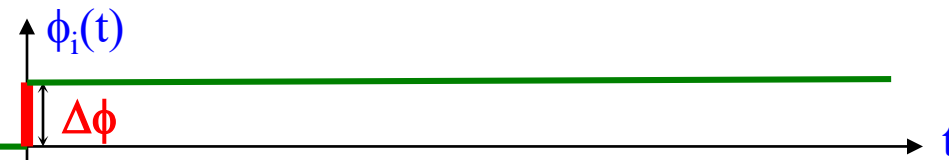
SOLLICITATION 1: SAUT DE PHASE $\Delta\phi$



A l'instant $t=0$, on suppose que la phase en entrée varie d'une quantité $\Delta\phi$.



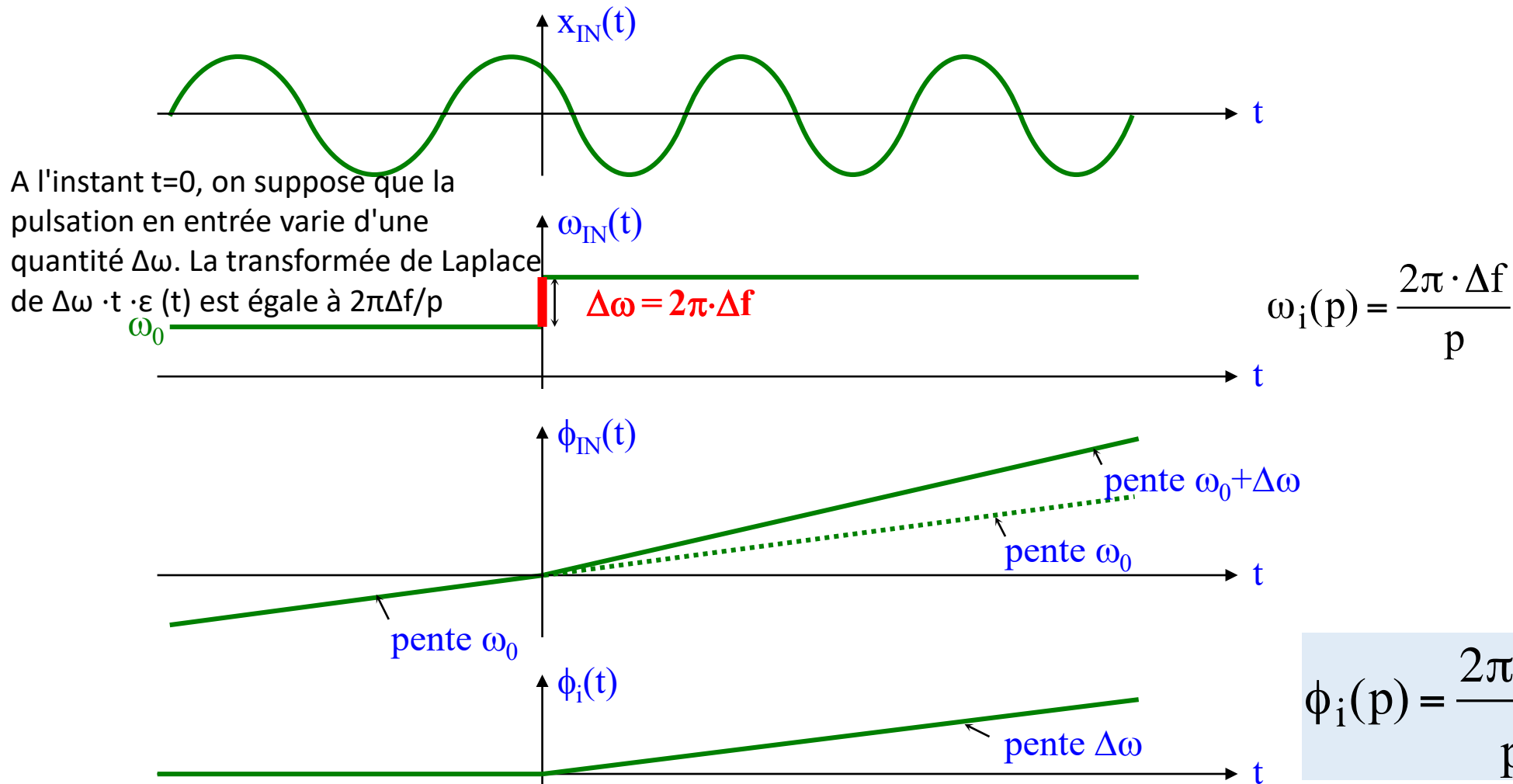
La variation de phase $\phi_i(t)$ appliquée à l'instant zéro en entrée, est donc égale à $\phi_i(t) \cdot \varepsilon(t)$ où $\varepsilon(t)$ représente un saut indiciel unité.



$$\phi_i(p) = \frac{\Delta\phi}{p}$$

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

SOLLICITATION 2: SAUT DE FRÉQUENCE Δf

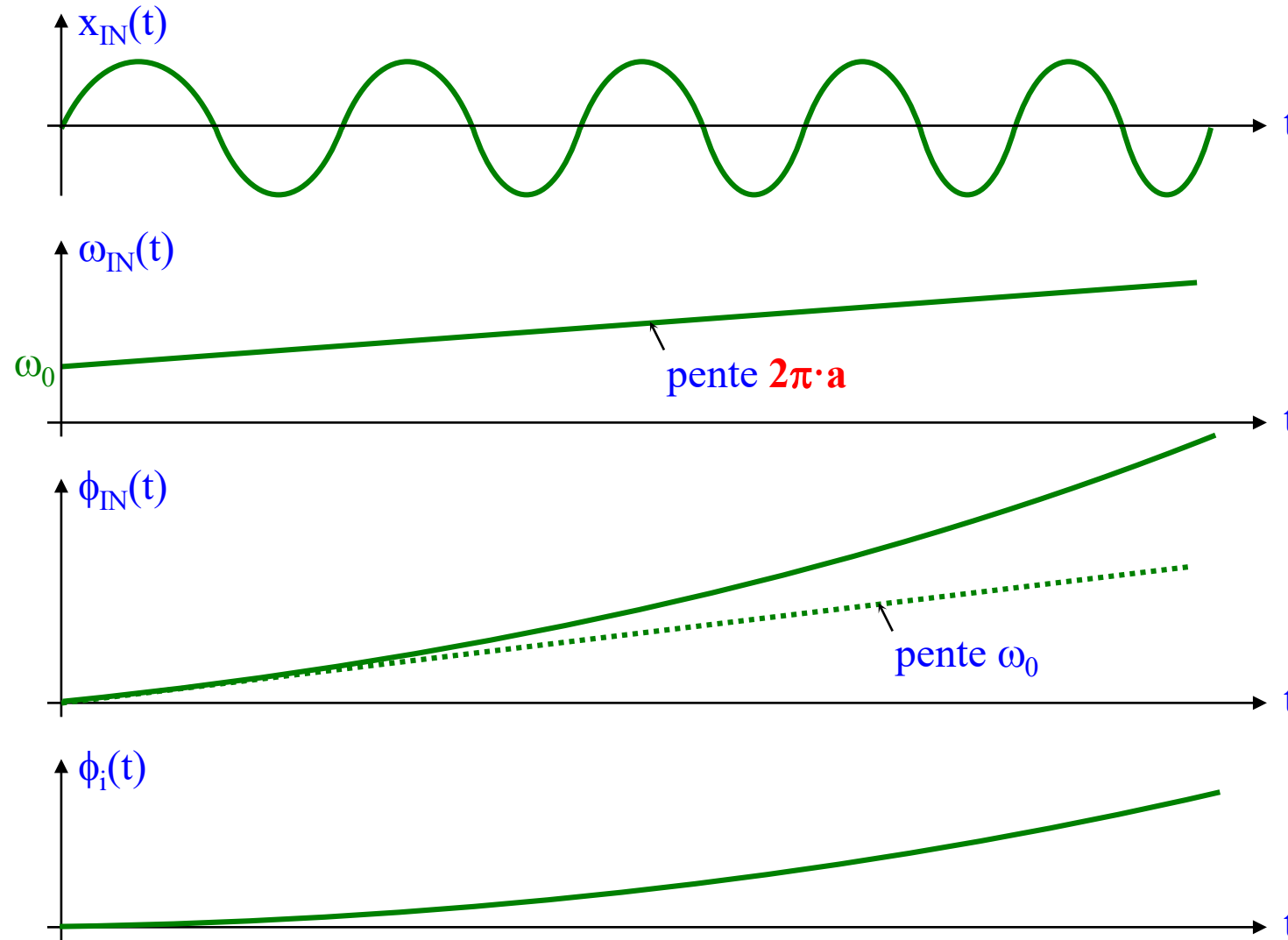


La variation de phase $\phi_i(p)$ est l'intégrale de $\omega_i(p)$

$$\phi_i(p) = \frac{2\pi \cdot \Delta f}{p^2}$$

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

SOLLICITATION 3: RAMPE DE FRÉQUENCE $f_{IN} = f_0 + a \cdot t$



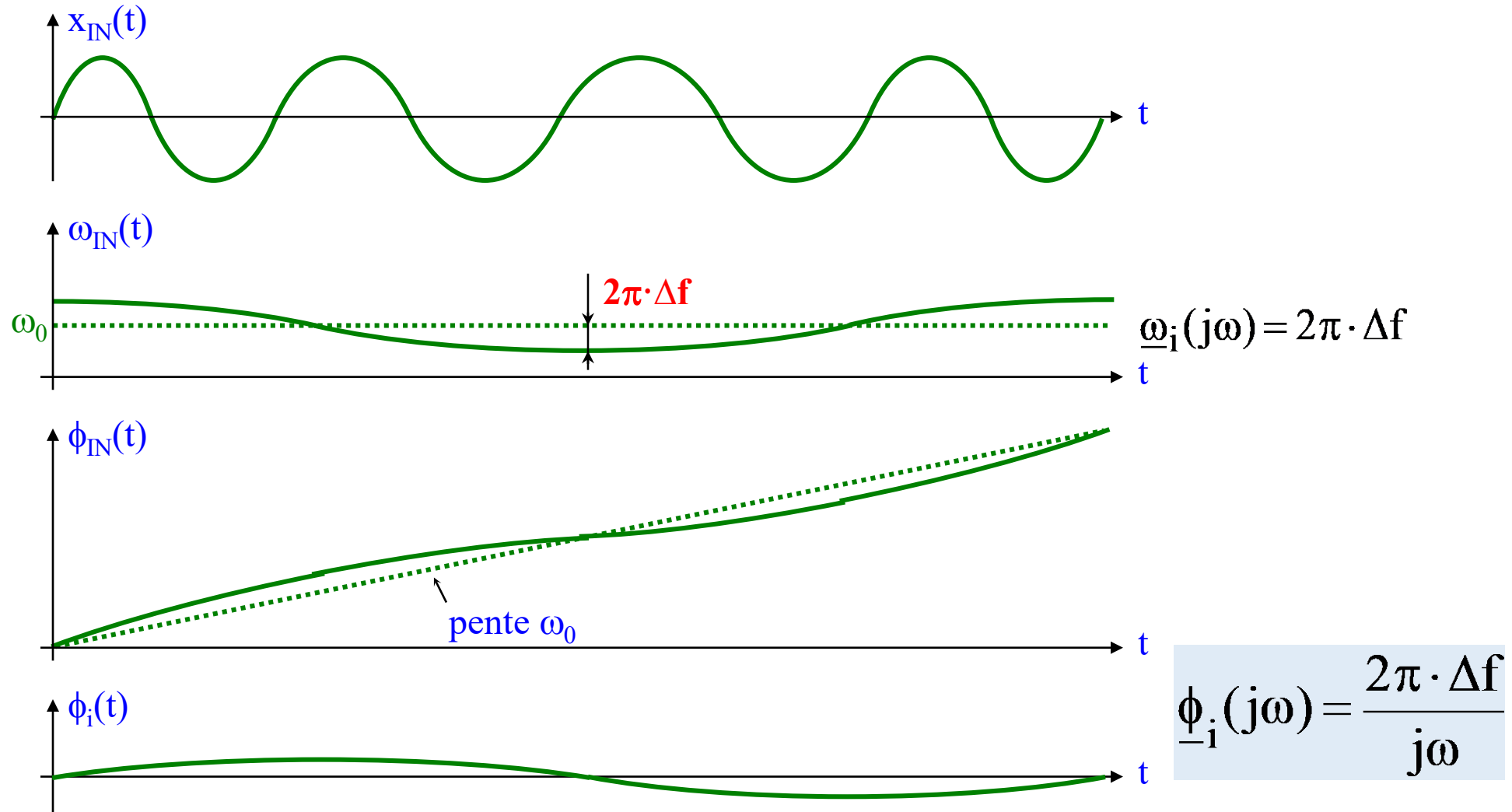
On suppose que la fréquence à l'entrée de la boucle évolue linéairement avec le temps, à partir de l'instant $t=0$

$$\omega_i(p) = \frac{2\pi \cdot a}{p^2}$$

$$\phi_i(p) = \frac{2\pi \cdot a}{p^3}$$

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

SOLLICITATION 4: MODULATION SINUSOÏDALE DE FRÉQUENCE $f_{IN} = f_0 + \Delta f \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t)$



3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

FILTRE

La PLL du second ordre possède un filtre $F(p)$ de type passe-bas du 1^{er} ordre (1 pôle).
Le comportement de la boucle diffère selon la nature exacte de ce filtre.

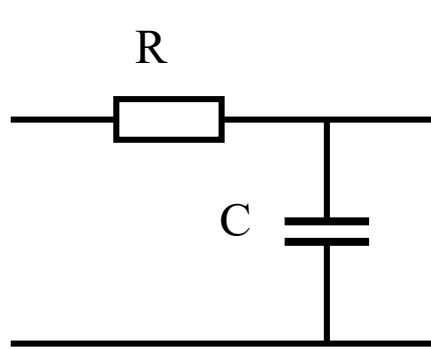
ETUDE

- Examiner le comportement de la PLL pour différentes sollicitations à l'entrée
- Dimensionner les éléments pour optimiser simultanément (si possible)
 - le 'Lock-Range' : ω_{lock}
 - la 'bande passante' de la boucle (qui dépend de la pulsation propre ω_n , et l'amortissement ζ)
 - le comportement transitoire de la boucle exprimé par le facteur de qualité (Q) ou d'amortissement (ζ , $2\zeta = 1/Q$)

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

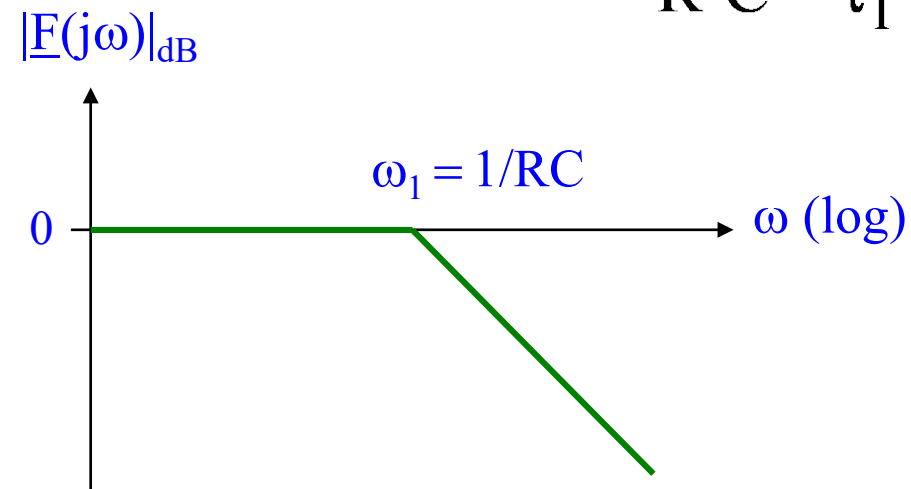
3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À UN PÔLE, SANS ZÉRO



$$F(p) = \frac{\frac{1}{p \cdot C}}{R + \frac{1}{p \cdot C}} = \frac{1}{p \cdot R \cdot C + 1} = \frac{1}{p \cdot \tau_1 + 1} = \frac{1}{\frac{p}{\omega_1} + 1} = \frac{\omega_1}{p + \omega_1}$$

avec $\omega_1 = \frac{1}{R \cdot C} = \frac{1}{\tau_1}$



3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À UN PÔLE, SANS ZÉRO

$$F(p) = \frac{1}{p \cdot \tau_1 + 1} = \frac{\omega_1}{p + \omega_1} \quad \rightarrow \quad \frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{K_D \cdot \frac{\omega_1}{p + \omega_1}}{p + K_D \cdot \frac{\omega_1}{p + \omega_1} \cdot K_O}$$

$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{K_D \cdot \omega_1}{p^2 + p \cdot \omega_1 + K_D \cdot K_O \cdot \omega_1} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{K_D \cdot K_O \cdot \omega_1}{p^2 + p \cdot \omega_1 + K_D \cdot K_O \cdot \omega_1} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{\omega_n^2}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\omega_n = \sqrt{K_D \cdot K_O \cdot \omega_1} = \sqrt{\frac{K_D \cdot K_O}{\tau_1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \sqrt{K_D \cdot K_O \cdot \tau_1} = \sqrt{\frac{K_D \cdot K_O}{\omega_1}} = \frac{\omega_n}{\omega_1}}$$

Par ailleurs on sait que la "Lock-Range" vaut:

$$\boxed{\omega_{\text{lock}} = K_D \cdot K_O \cdot \frac{\pi}{2}}$$

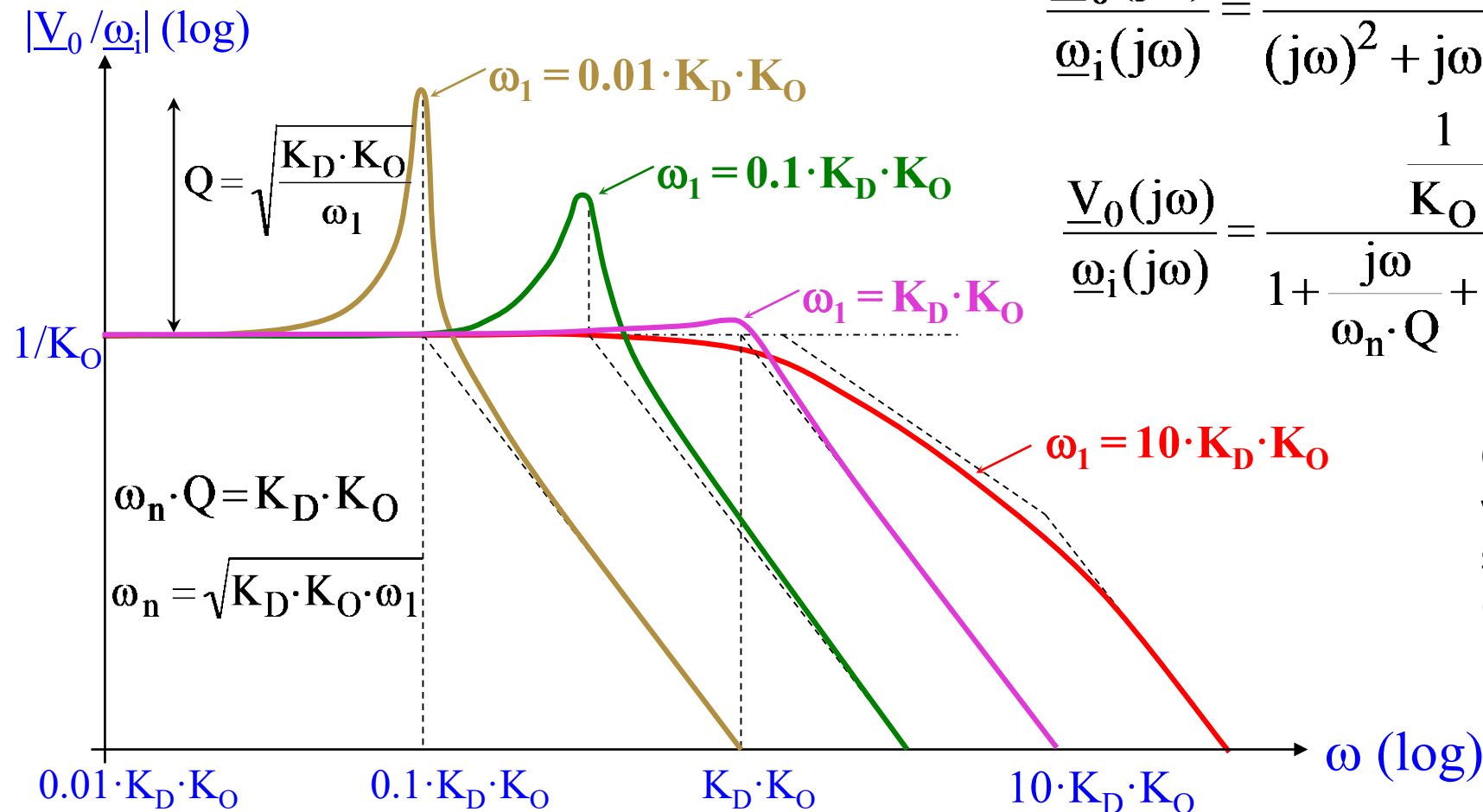
Conclusion: On ne dispose que de deux paramètres, ω_1 et $(K_D \cdot K_O)$ pour ajuster trois grandeurs, donc il manque un degré de liberté.

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À UN PÔLE, SANS ZÉRO

RÉPONSE EN FRÉQUENCE $p \rightarrow j\omega$



$$\frac{V_0(j\omega)}{\omega_i(j\omega)} = \frac{K_D \cdot \omega_1}{(j\omega)^2 + j\omega \cdot \omega_1 + K_D \cdot K_O \cdot \omega_1}$$

$$\frac{V_0(j\omega)}{\omega_i(j\omega)} = \frac{1}{K_O} \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_n \cdot Q} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

On remarque que seules les valeurs autour de $\omega_1 = K_D \cdot K_O$ sont utilisable en pratique (voir slide suivant)

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

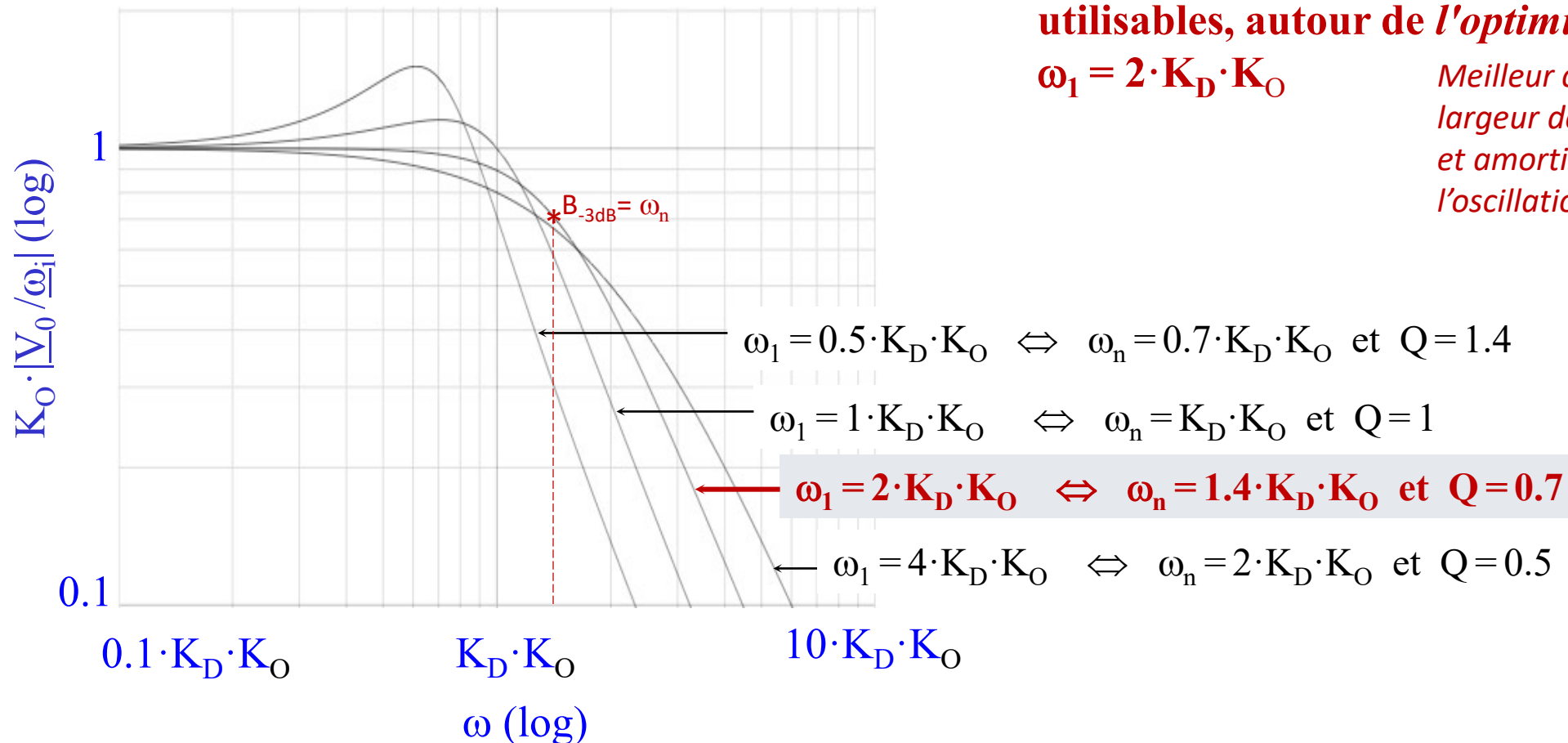
PLL AVEC FILTRE À UN PÔLE, SANS ZÉRO

RÉPONSE EN FRÉQUENCE

Détails dans des conditions pratiques utilisables, autour de *l'optimum*:

$$\omega_1 = 2 \cdot K_D \cdot K_O$$

Meilleur compromis entre largeur de la bande passante et amortissement de l'oscillation transitoire

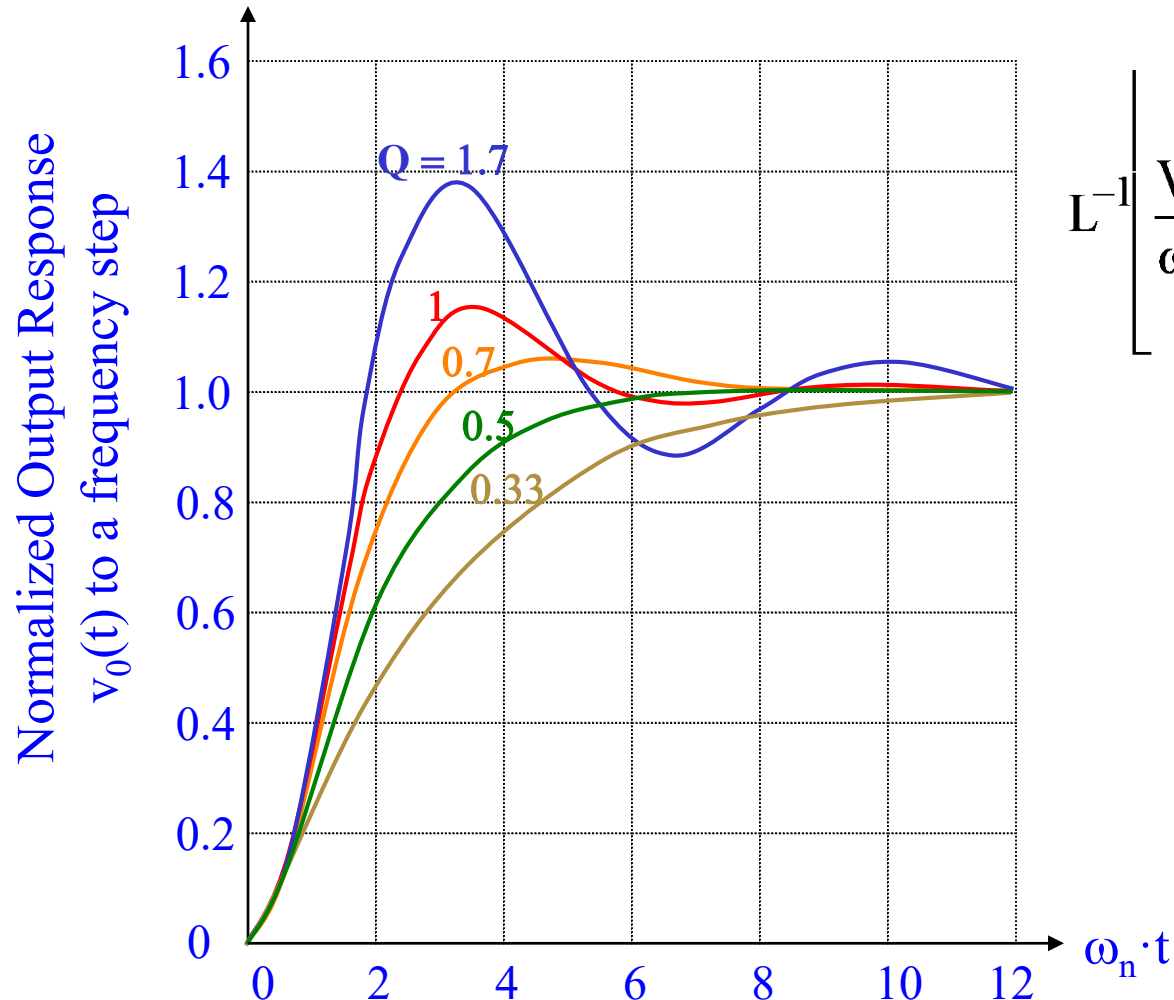


3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À UN PÔLE, SANS ZÉRO

RÉPONSE À UN SAUT DE FRÉQUENCE



$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{V_o(p)}{\omega_i(p)} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\omega_n^2}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2} \right]$$

Rappel: $2 \cdot \xi = 1/Q$

$Q = 0.33$	$\rightarrow$	$\xi = 1.5$
$Q = 0.5$	$\rightarrow$	$\xi = 1$
$Q = 0.7$	$\rightarrow$	$\xi = 0.7$
$Q = 1$	$\rightarrow$	$\xi = 0.5$
$Q = 1.7$	$\rightarrow$	$\xi = 0.3$

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À UN PÔLE, SANS ZÉRO

ERREUR DE PHASE

$$F(p) = \frac{1}{p \cdot \tau_1 + 1} = \frac{\omega_1}{p + \omega_1} \quad \rightarrow \quad \frac{\phi_e(p)}{\phi_i(p)} = \frac{p}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{p}{p + K_D \cdot \frac{\omega_1}{p + \omega_1} \cdot K_O} = \frac{p \cdot (p + \omega_1)}{p^2 + p \cdot \omega_1 + \omega_1 \cdot K_D \cdot K_O}$$

Réponse à un
saut de phase

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{\Delta \phi}{p} \cdot \frac{p \cdot (p + \omega_1)}{p^2 + p \cdot \omega_1 + \omega_1 \cdot K_D \cdot K_O} = 0$$

Réponse à un
saut de fréquence

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot \Delta f}{p^2} \cdot \frac{p \cdot (p + \omega_1)}{p^2 + p \cdot \omega_1 + \omega_1 \cdot K_D \cdot K_O} = \frac{2\pi \cdot \Delta f}{K_D \cdot K_O}$$

Réponse à une
rampe de fréquence

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot a}{p^3} \cdot \frac{p \cdot (p + \omega_1)}{p^2 + p \cdot \omega_1 + \omega_1 \cdot K_D \cdot K_O} = \infty$$

Ces limites
mathématiques
évaluent les
erreurs de phase
persistantes après
l'amortissement
des transitoires

PLL incapable de rester verrouillée
sur une rampe de freq.

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À UN PÔLE, SANS ZÉRO

CONCLUSION

- On dispose seulement de 2 paramètres, ω_1 et le produit $K_D \cdot K_O$ pour ajuster 3 grandeurs

- Lock-Range $\Rightarrow K_D \cdot K_O = 2 \cdot \omega_{\text{lock}} / \pi$

- ω_n
 - Q } liés par: $\omega_n \cdot Q = K_D \cdot K_O$

$$\Rightarrow K_D \cdot K_O \leq \omega_1 \leq 4 \cdot K_D \cdot K_O$$

pour un amortissement correct: $0.5 \leq \xi \leq 1$

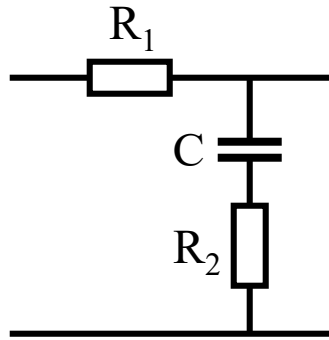
- **En régime**, erreur de phase nulle pour un saut de phase
finie pour un saut de fréquence
infinie pour une rampe de fréquence, donc verrouillage impossible

- En cas de disparition momentanée du signal d'entrée, la PLL possède une **mémoire de fréquence**, mais celle-ci s'éloigne de sa valeur de référence avec une constante de temps $\tau_1 = RC = 1/\omega_1$

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

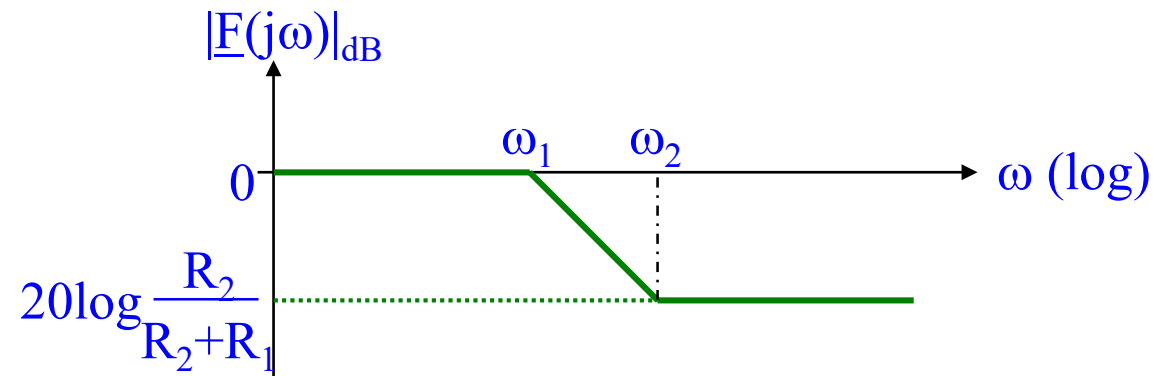
3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À UN PÔLE ET UN ZÉRO



$$F(p) = \frac{R_2 + \frac{1}{p \cdot C}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{p \cdot C}} = \frac{p \cdot R_2 \cdot C + 1}{p \cdot (R_1 + R_2) \cdot C + 1} = \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1 + 1} = \frac{1 + \frac{p}{\omega_2}}{1 + \frac{p}{\omega_1}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{p + \omega_2}{p + \omega_1}$$

avec $\omega_1 = \frac{1}{(R_1 + R_2) \cdot C} = \frac{1}{\tau_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2 \cdot C} = \frac{1}{\tau_2}$



3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À UN PÔLE ET UN ZÉRO

$$F(p) = \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1 + 1} \quad \frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{K_D \cdot \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1 + 1}}{p + K_D \cdot \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1 + 1} \cdot K_O}$$

$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{\frac{K_D}{\tau_1} \cdot (p \cdot \tau_2 + 1)}{p^2 + p \cdot \left(\frac{1 + \tau_2 \cdot K_D \cdot K_O}{\tau_1} \right) + \frac{K_D \cdot K_O}{\tau_1}} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{\omega_n^2 \cdot (p \cdot \tau_2 + 1)}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2}$$

→ $\omega_n = \sqrt{\frac{K_D \cdot K_O}{\tau_1}} = \sqrt{K_D \cdot K_O \cdot \omega_1}$ et $\frac{1}{Q} = \omega_n \cdot \left(\frac{1}{K_D \cdot K_O} + \tau_2 \right)$

On observe que ce type de filtre permet d'ajuster indépendamment la pulsation propre (bande passante) et le facteur de qualité avec τ_1 et τ_2

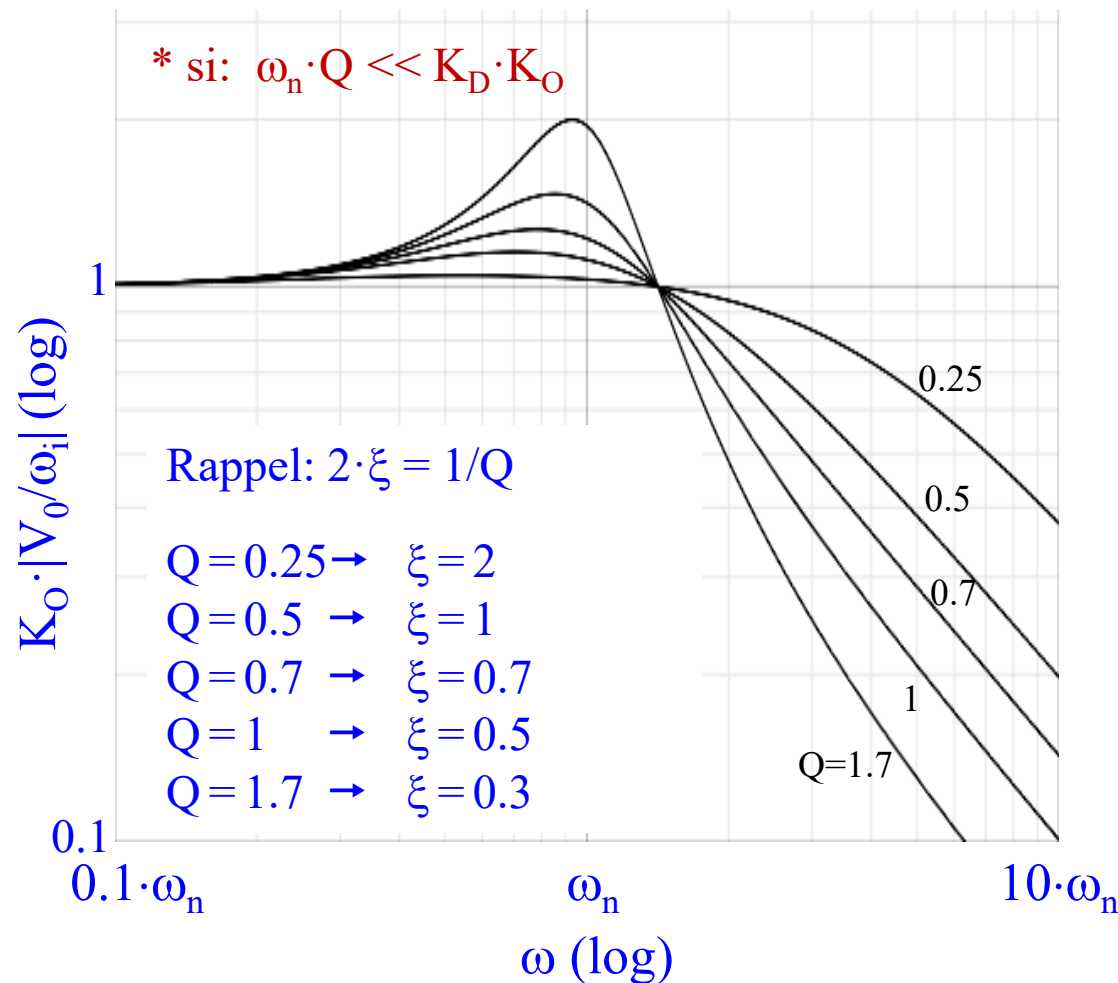
Par ailleurs on sait que la "Lock-Range" vaut:

$$\omega_{\text{lock}} = K_D \cdot K_O \cdot \frac{\pi}{2}$$

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À UN PÔLE ET UN ZÉRO



RÉPONSE EN FRÉQUENCE

$$\frac{V_0(j\omega)}{\omega_i(j\omega)} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{(1 + \frac{j\omega}{\omega_2})}{1 + \frac{j\omega}{\omega_n \cdot Q} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2}$$

$$\frac{V_0(j\omega)}{\omega_i(j\omega)} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{1 + j\omega \cdot (\frac{1}{\omega_n \cdot Q} - \cancel{\frac{1}{K_D \cdot K_O}})}{1 + \frac{j\omega}{\omega_n \cdot Q} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2}$$

* Si $\omega_n \cdot Q \approx K_D \cdot K_O$ on en revient à un PLL du 2^e ordre avec un filtre à un pôle et sans zéro

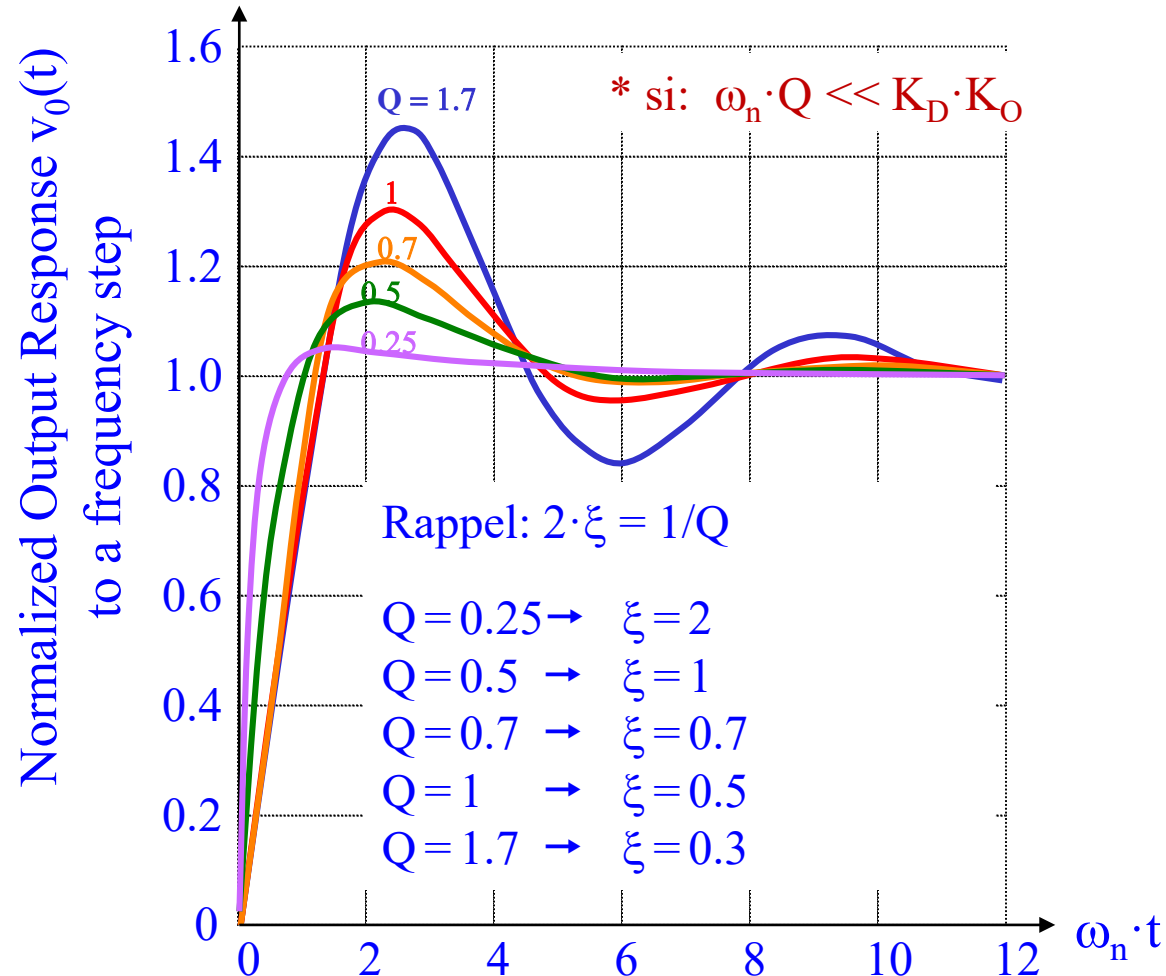
* $\omega_n \cdot Q > K_D \cdot K_O$ n'est pas réalisable car il faudrait $\tau_2 < 0$

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À UN PÔLE ET UN ZÉRO

RÉPONSE À UN SAUT DE FRÉQUENCE



$$L^{-1} \left[\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\omega_n^2 \cdot \left(p \cdot \left(\frac{1}{\omega_n \cdot Q} - \frac{1}{K_D \cdot K_O} \right) + 1 \right)}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2} \right]$$

* Si $\omega_n \cdot Q \approx K_D \cdot K_O$ on en revient à un PLL du 2^e ordre avec un filtre à un pôle et sans zéro

* $\omega_n \cdot Q > K_D \cdot K_O$ n'est pas réalisable car il faudrait $\tau_2 < 0$

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À UN PÔLE ET UN ZÉRO

ERREUR DE PHASE

$$F(p) = \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1 + 1} \quad \rightarrow \quad \frac{\phi_e(p)}{\Delta\phi_i(p)} = \frac{p}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{p \cdot (p + \omega_1)}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2}$$

Réponse à un
saut de phase

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{\Delta\phi}{p} \cdot \frac{p \cdot (p + \omega_1)}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2} = 0$$

Réponse à un
saut de fréquence

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot \Delta f}{p^2} \cdot \frac{p \cdot (p + \omega_1)}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2} = \frac{2\pi \cdot \Delta f}{K_D \cdot K_O}$$

Réponse à une
rampe de fréquence

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot a}{p^3} \cdot \frac{p \cdot (p + \omega_1)}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2} = \infty$$

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À UN PÔLE ET UN ZÉRO

CONCLUSIONS

- On dispose de 3 paramètres, τ_1 , τ_2 et $K_D \cdot K_O$ pour ajuster 3 grandeurs
 - Lock-range $\Rightarrow K_D \cdot K_O = \frac{2 \cdot \omega_{\text{lock}}}{\pi}$ ou imposé par les circuits utilisés
 - $\omega_n \Rightarrow \tau_1 = \frac{K_D \cdot K_O}{\omega_n^2}$
 - $Q \Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{\omega_n \cdot Q} - \frac{1}{K_D \cdot K_O}$

$\Rightarrow$ **Souplesse et bon comportement dynamique**

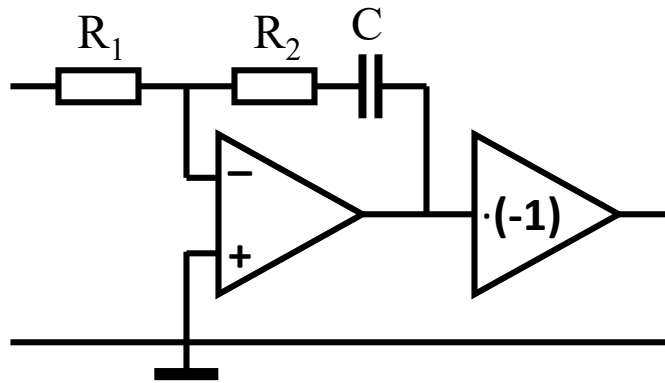
- **En régime**, erreur de phase nulle pour un saut de phase
finie pour un saut de fréquence
infinie pour une rampe de fréquence, donc
verrouillage impossible

- En cas de disparition momentanée du signal d'entrée, la PLL possède une **mémoire de fréquence**, mais celle-ci s'éloigne de sa valeur de référence avec une constante de temps τ_1

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À INTEGRALE ET ZÉRO

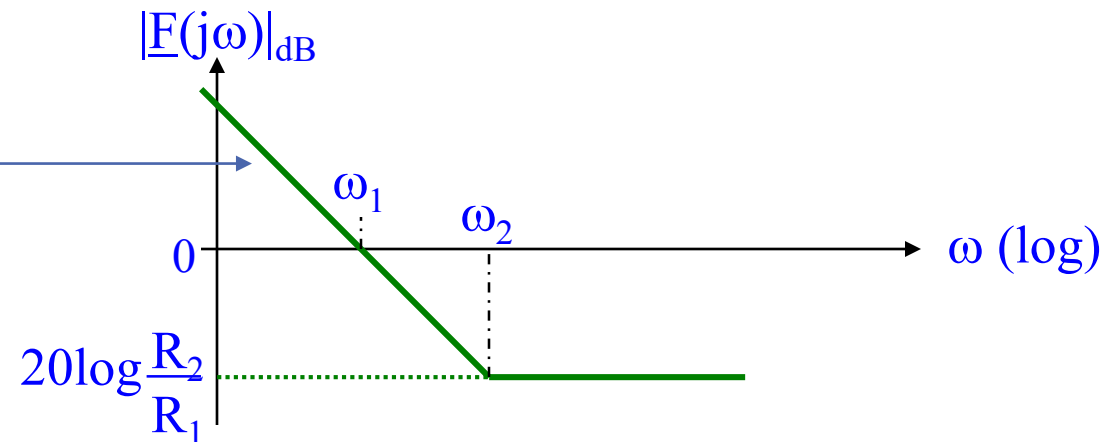


Le rôle de l'inverseur est de corriger le signe négatif qui apparaît dans l'écriture de la fonction de transfert du premier étage.

$$F(p) = \frac{R_2 + \frac{1}{p \cdot C}}{R_1} = \frac{p \cdot R_2 \cdot C + 1}{p \cdot R_1 \cdot C} = \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1} = \frac{1 + \frac{p}{\omega_2}}{\frac{p}{\omega_1}} = \frac{\omega_1 \cdot (p + \omega_2)}{\omega_2 \cdot p}$$

avec $\omega_1 = \frac{1}{R_1 \cdot C} = \frac{1}{\tau_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2 \cdot C} = \frac{1}{\tau_2}$

grand gain à
basse fréquence
(ampli op en
boucle ouverte)



3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À INTEGRALE ET ZÉRO

$$F(p) = \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1}$$
$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{K_D \cdot F(p) \cdot K_D}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{K_D \cdot \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1}}{p + K_D \cdot \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1} \cdot K_O}$$
$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{\frac{K_D}{\tau_1} \cdot (p \cdot \tau_2 + 1)}{p^2 + p \cdot \frac{\tau_2 \cdot K_D \cdot K_O}{\tau_1} + \frac{K_D \cdot K_O}{\tau_1}} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{\omega_n^2 \cdot (p \cdot \tau_2 + 1)}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2}$$

→ $\omega_n = \sqrt{\frac{K_D \cdot K_O}{\tau_1}} = \sqrt{K_D \cdot K_O \cdot \omega_1}$ et $Q = \frac{1}{\omega_n \cdot \tau_2}$

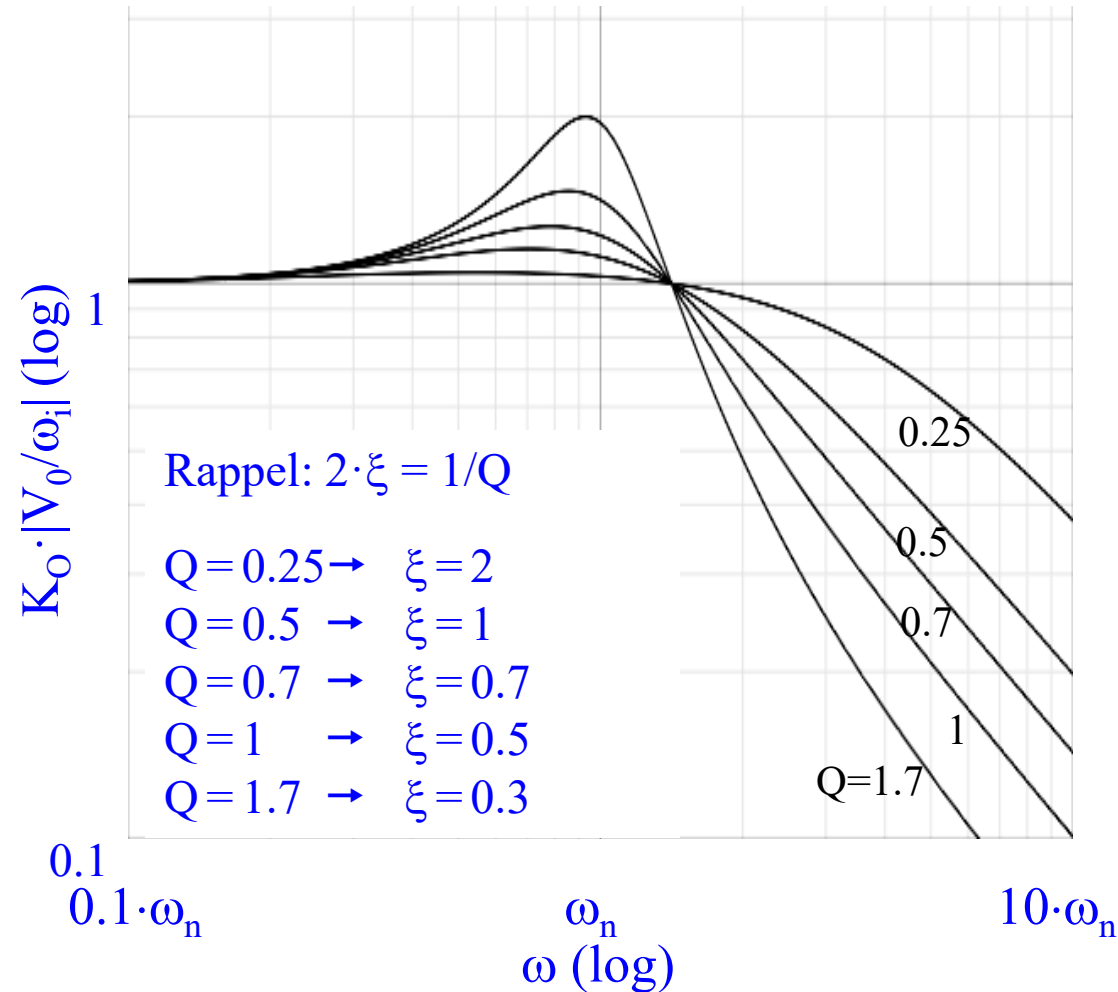
En outre, à cause de l'intégrateur, "Lock-Range"

$$2\omega_{\text{lock}} = \begin{cases} \text{dynamique du VCO} \\ \text{ou} \\ V_{0,\text{max,min}} \text{ de l'intégrateur} \end{cases}$$

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À INTEGRALE ET ZÉRO



RÉPONSE EN FRÉQUENCE

$$\frac{V_0(j\omega)}{\omega_i(j\omega)} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{(1 + \frac{j\omega}{\omega_n \cdot Q})}{1 + \frac{j\omega}{\omega_n \cdot Q} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2}$$

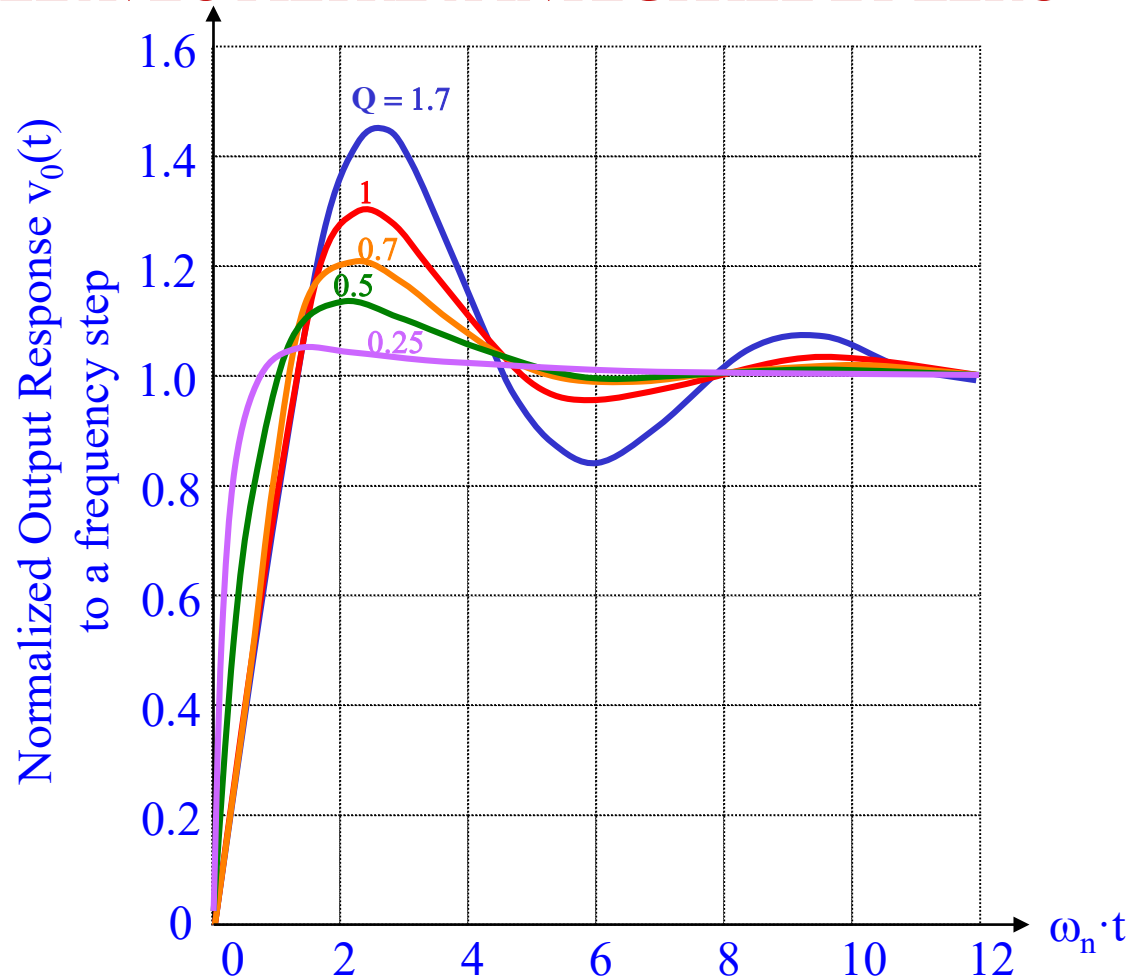
$$B_{-3db} = \frac{\omega_n}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2Q^2} + 1} + \sqrt{(\frac{1}{2Q^2} + 1)^2 + 1}$$

Identique à la PLL avec filtre passif à un pôle et un zéro tels que $\omega_n \cdot Q \ll K_D \cdot K_O$

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À INTEGRALE ET ZÉRO



RÉPONSE À UN SAUT DE FRÉQUENCE

$$L^{-1} \left[\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\omega_n^2 \cdot (p \cdot \frac{1}{\omega_n \cdot Q} + 1)}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2} \right]$$

Rappel: $2 \cdot \xi = 1/Q$

$Q = 0.25 \rightarrow \xi = 2$

$Q = 0.5 \rightarrow \xi = 1$

$Q = 0.7 \rightarrow \xi = 0.7$

$Q = 1 \rightarrow \xi = 0.5$

$Q = 1.7 \rightarrow \xi = 0.3$

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À INTEGRALE ET ZÉRO

ERREUR DE PHASE

$$F(p) = \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\phi_E(p)}{\phi_i(p)} = \frac{p}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{p^2}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2}$$

Réponse à un
saut de phase

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{\Delta\phi}{p} \cdot \frac{p^2}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2} = 0$$

Réponse à un
saut de fréquence

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot \Delta f}{p^2} \cdot \frac{p^2}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2} = 0$$

Réponse à une
rampe de fréquence

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot a}{p^3} \cdot \frac{p^2}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2} = \frac{2\pi \cdot a}{\omega_n^2}$$

PLL peut rester verrouillée
sur une rampe de freq.

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 2^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À INTEGRALE ET ZÉRO

CONCLUSIONS

- On dispose de 3 paramètres, τ_1 , τ_2 et $K_D \cdot K_O$ pour ajuster 3 grandeurs

- Lock-Range $\Rightarrow$ imposée par la dynamique du VCO ou du filtre

- $\omega_n \Rightarrow \tau_1 = \frac{K_D \cdot K_O}{\omega_n^2}$

- $Q \Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{\omega_n \cdot Q}$

$\Rightarrow$ **Souplesse et bon comportement dynamique**

- **En régime**, erreur de phase nulle pour un saut de phase ou de fréquence, finie pour une rampe de fréquence, donc verrouillage possible

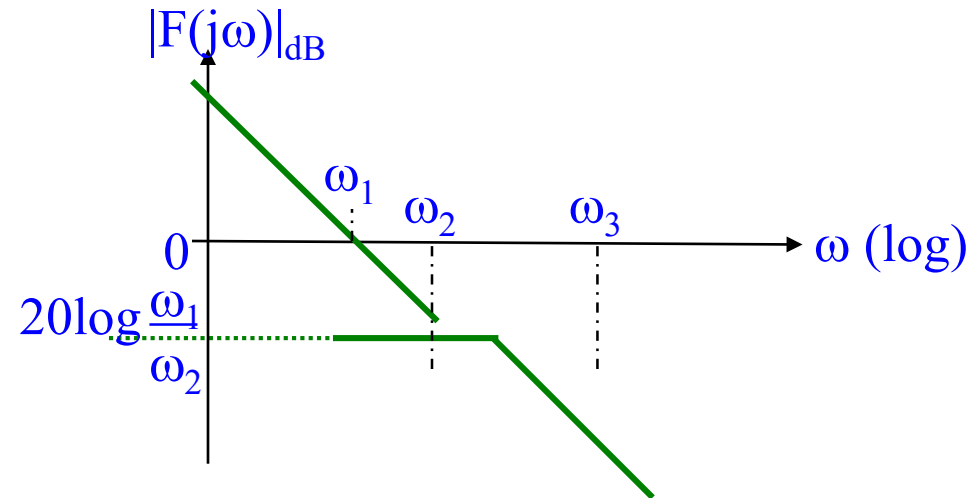
- En cas de disparition momentanée du signal d'entrée, la PLL possède une **excellente mémoire de fréquence**.

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

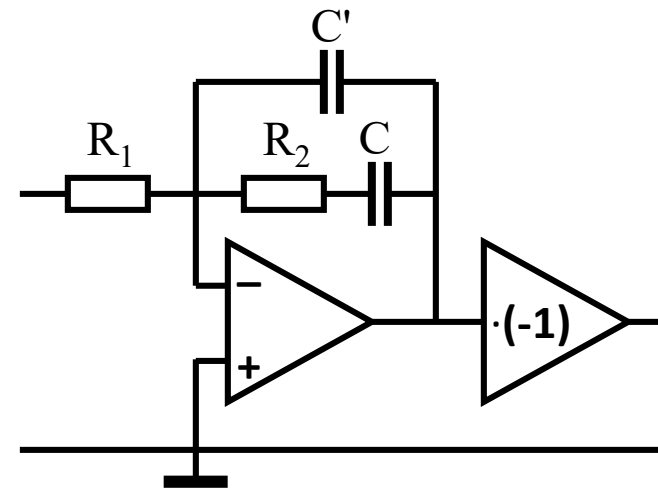
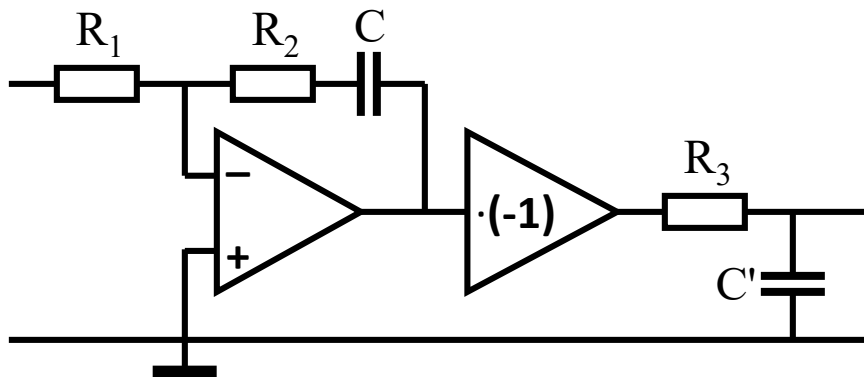
3.1 PLL DU 3^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À INTEGRALE ET ZÉRO, ET UN PÔLE SECONDAIRE

$$F(p) = \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1 \cdot (p \cdot \tau_3 + 1)} = \frac{1 + \frac{p}{\omega_2}}{\frac{p}{\omega_1} \cdot \left(1 + \frac{p}{\omega_3}\right)}$$



Exemples:



3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 3^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À INTEGRALE ET ZÉRO, ET UN PÔLE SECONDAIRE

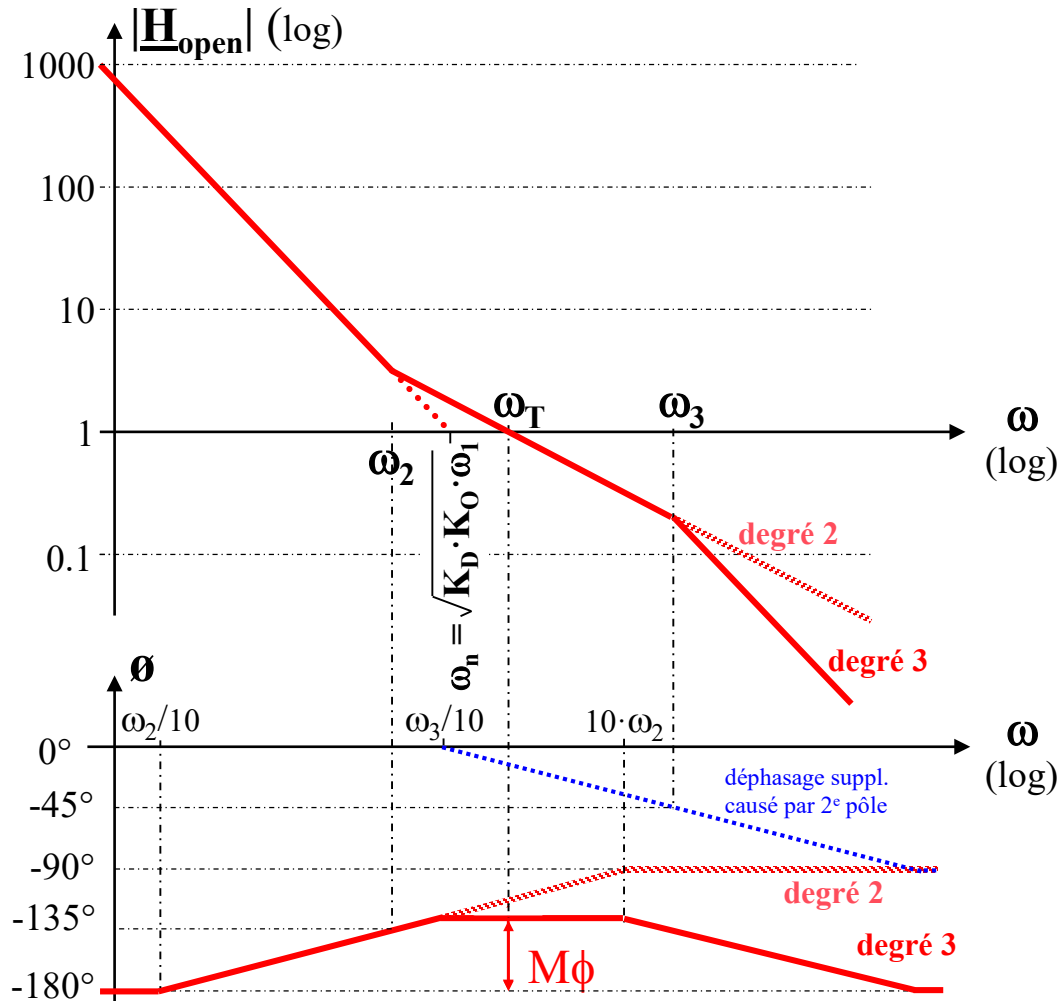
$$F(p) = \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1 \cdot (p \cdot \tau_3 + 1)} \quad \frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{K_D \cdot \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1 \cdot (p \cdot \tau_3 + 1)}}{p + K_D \cdot \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1 \cdot (p \cdot \tau_3 + 1)} \cdot K_O}$$

$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{K_D \cdot (p \cdot \tau_2 + 1)}{p^3 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3 + p^2 \cdot \tau_1 + p \cdot \tau_2 \cdot K_D \cdot K_O + K_D \cdot K_O}$$

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 3^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À INTEGRALE ET ZÉRO, ET UN PÔLE SECONDAIRE



$$H_{ol}(p) = \frac{\phi_o(p)}{\phi_i(p)} \Big|_{ol} = \frac{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}{p}$$

$$H_{ol}(p) = \frac{\frac{p}{\omega_2} + 1}{\frac{p^2}{\omega_1 \cdot K_D \cdot K_O} \cdot \left(\frac{p}{\omega_3} + 1\right)}$$

Le pôle supplémentaire:

- ☺ atténue les composantes à f_{IN} ou $2 \cdot f_{IN}$ à l'entrée du VCO
- ☹ diminue la marge de phase, donc dégrade l'amortissement, s'il est trop près de ω_2

3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

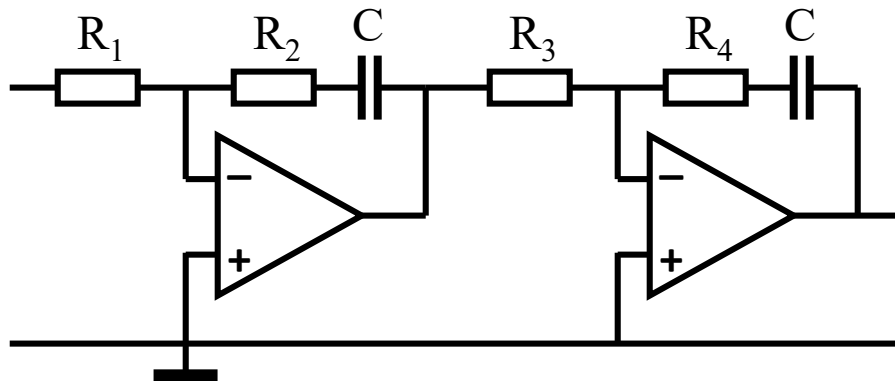
3.1 PLL DU 3^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À DOUBLE INTEGRALE ET DEUX ZÉROS

$$F(p) = \frac{(p \cdot \tau_2 + 1) \cdot (p \cdot \tau_4 + 1)}{p^2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3} = \frac{(1 + \frac{p}{\omega_2}) \cdot (1 + \frac{p}{\omega_4})}{\frac{p^2}{\omega_1 \cdot \omega_3}}$$

Les deux zéros sont nécessaires pour la stabilité de la boucle.

Exemple:



3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

3.1 PLL DU 3^e ORDRE

PLL AVEC FILTRE À INTEGRALE ET ZÉRO, ET UN PÔLE SECONDAIRE

$$F(p) = \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1} \cdot \frac{p \cdot \tau_4 + 1}{p \cdot \tau_3} \quad \text{et} \quad \frac{\phi_e(p)}{\phi_i(p)} = \frac{p}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O}$$

➡ Réponse à une rampe de fréquence :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot a}{p^3} \cdot \frac{p}{p + \frac{(p \cdot \tau_2 + 1) \cdot (p \cdot \tau_4 + 1) \cdot K_D \cdot K_O}{p^2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3}} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot a}{p^3} \cdot \frac{p^3 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3}{p^3 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3 + p^2 \cdot \tau_2 \cdot \tau_4 \cdot K_D \cdot K_O + p \cdot (\tau_2 + \tau_4) \cdot K_D \cdot K_O + K_D \cdot K_O} = 0 \end{aligned}$$

Avec ce filtre, la PLL du 3^e ordre est particulièrement adaptée au verrouillage sur un signal affecté par l'effet Doppler (réception d'un signal de satellite en orbite basse), car :

- ☺ elle peut suivre sans erreur de phase une rampe de fréquence
- ☺ elle possède une mémoire de rampe de fréquence