

Solution : Ex 1

Exercice : Tracer les diagrammes de Bode de la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = y \cdot \frac{10}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

On reprend la fonction de transfert calculée dans l'exercice 6 :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega RC} = \frac{10}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Donc :

$$|H(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Diagrammes de Bode de l'Amplitude :

$\omega \rightarrow 0$: $|H| \rightarrow 10$, donc en Décibel : $20\text{Log}(10) = 20\text{dB}$

$\omega \rightarrow \infty$: $|H| \rightarrow 0$, donc en Décibel : $10\text{Log}(H \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$

$\omega = \omega_0$; $|H(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7.07$, donc en Décibel : $20\text{Log}|H| = 16.99\text{dB}$

Où $\omega_0 = 10^{10}\text{rad/s}$

Diagramme de Bode de l'argument :

$\omega \rightarrow 0$, $\text{Arg}(H(j\omega)) \rightarrow 0$, car $\arctan(0) \rightarrow 0$

$\omega \rightarrow \infty$, $\text{Arg}(H(\omega \rightarrow \infty)) = -\arctan(H \rightarrow \infty) = -\frac{\pi}{2}$

$\omega = \omega_0$, $\text{Arg}(H(j\omega)) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$

Nous sommes aussi intéressés au point où $\omega_0 = \omega = 10^{10}\text{rad/s}$

$$|H(\omega = \omega_0)| = 20\text{Log}\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right) = 20[\text{Log}(10) - \text{Log}(\sqrt{2})] = 20 \cdot 1 - 20 \cdot 0.707 \approx 17$$

$$\text{Arg}(H(\omega = \omega_0)) = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

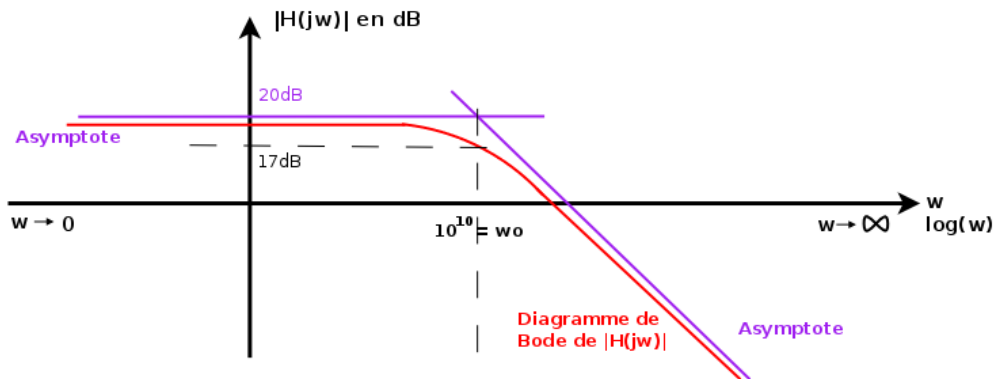


FIGURE 1 – Diagramme de Bode du module de la fonction de transfert

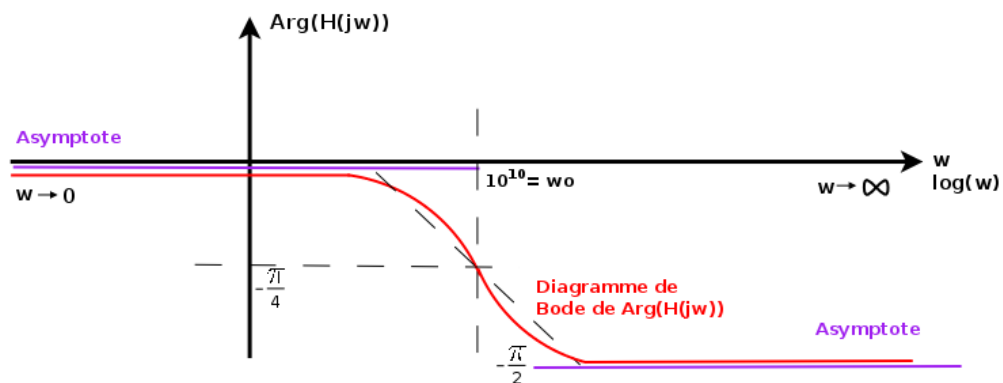


FIGURE 2 – Diagramme de Bode de l'argument de la fonction de transfert

Solution : Ex 2

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_2}}{(1 + j \frac{\omega}{\omega_1})(1 + \frac{\omega}{\omega_2})}$$

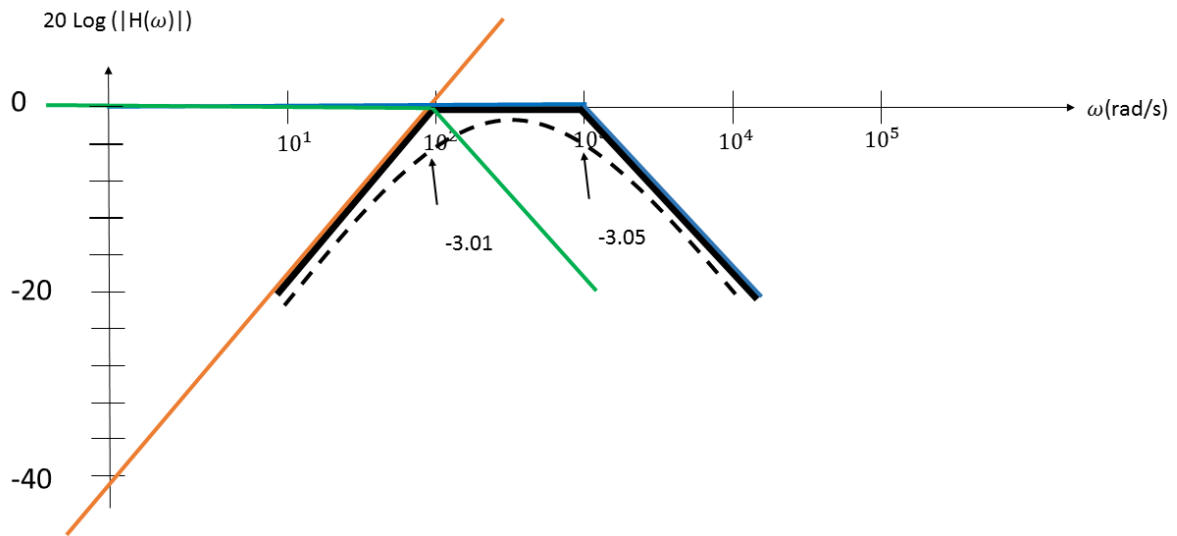
Pour obtenir les valeurs de l'amplitude en dB :

$$\begin{aligned} 20\text{Log}(|\underline{H}(j\omega)|) &= \\ 20\text{Log}(|j \frac{\omega}{\omega_2}|) - 20\text{Log}(|1 + j \frac{\omega}{\omega_1}|) - 20\text{Log}(|1 + \frac{\omega}{\omega_2}|) &= \\ 20\text{Log}\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) - 20\text{Log}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\right) - 20\text{Log}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}\right) \end{aligned}$$

On peut calculer les valeurs exactes pour deux points :

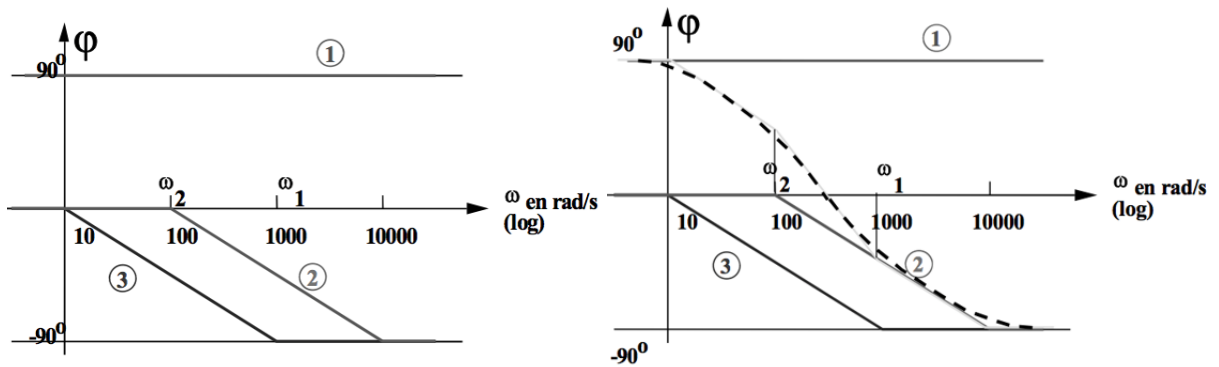
$$20\text{Log}(|\underline{H}(j\omega = 10^2 \text{ rad/s})|) = 20\text{Log}(1) - 20\text{Log}(\sqrt{1 + (0.1)^2}) - 20\text{Log}(\sqrt{1 + (1)^2}) = -3.01$$

$$20\text{Log}(|\underline{H}(j\omega = 10^3 \text{ rad/s})|) = 20\text{Log}(10) - 20\text{Log}(\sqrt{1 + (1)^2}) - 20\text{Log}(\sqrt{1 + (10)^2}) = -3.05$$



Pour obtenir les valeurs de phase :

$$\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{H}(j\omega))}{\text{Re}(\underline{H}(j\omega))}\right) = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)$$



(1) : 90°

(2) : $-\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$

(3) : $-\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)$

Solution : Ex 3

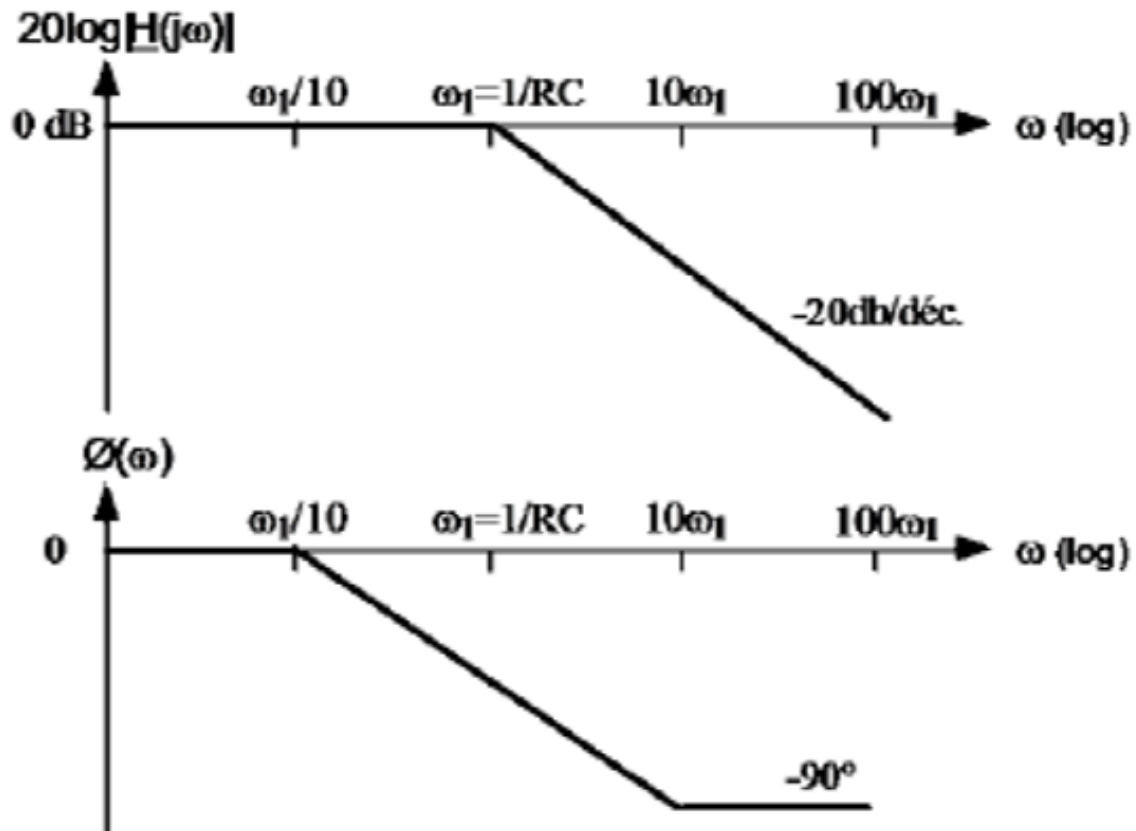
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Pour obtenir les valeur de l'amplitude en dB :

$$20\text{Log}(|\underline{H}(j\omega)|) = -20\text{Log}(|1 + j\omega RC|) = 20\text{Log}(\sqrt{1 + (\omega RC)^2})$$

Pour obtenir les valeurs de phase :

$$\Phi = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{H}(j\omega))}{\text{Re}(\underline{H}(j\omega))}\right) = -\arctan(\omega RC)$$

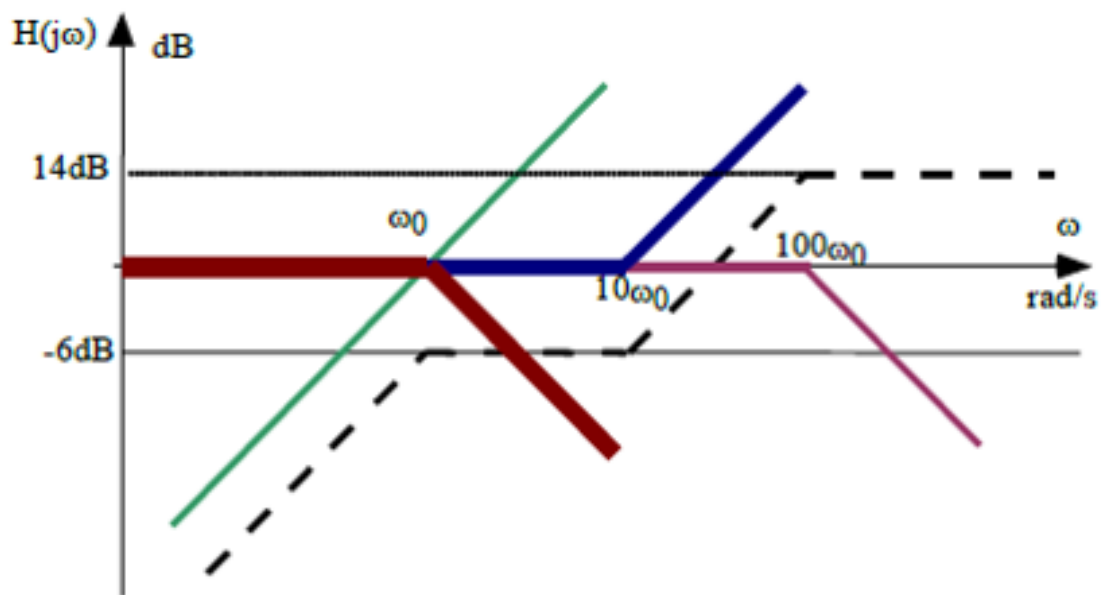


Solution : Ex 4

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{(1 + j\frac{\omega}{10\omega_0})(j\frac{\omega}{\omega_0})}{(1 + j\frac{\omega}{100\omega_0})(1 + j\frac{\omega}{\omega_0})}$$

Pour obtenir les valeurs de l'amplitude en dB :

$$20\text{Log}(|\underline{H}(j\omega)|) = -6 + 20\text{Log}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10\omega_0}\right)^2}\right) + 20\text{Log}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 20\text{Log}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{100\omega_0}\right)^2}\right) - 20\text{Log}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$



Solution : Ex 5

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega RC_1}{(1 + j\omega R(C_1 + C_2))}$$

Pour obtenir les valeurs de l'amplitude en dB :

$$20\text{Log}(|\underline{H}(j\omega)|) = 20\text{Log}(\omega RC_1) - 20\text{Log}(\sqrt{1 + (\omega R(C_1 + C_2))^2})$$

Pour obtenir les valeurs de phase :

$$\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = 90^\circ - \arctan(\omega R(C_1 + C_2))$$

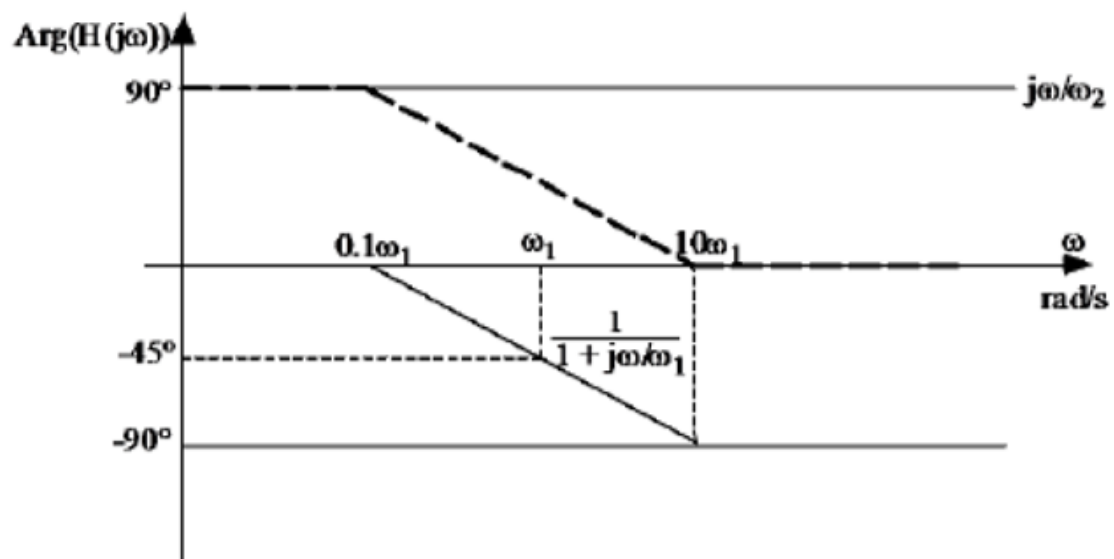
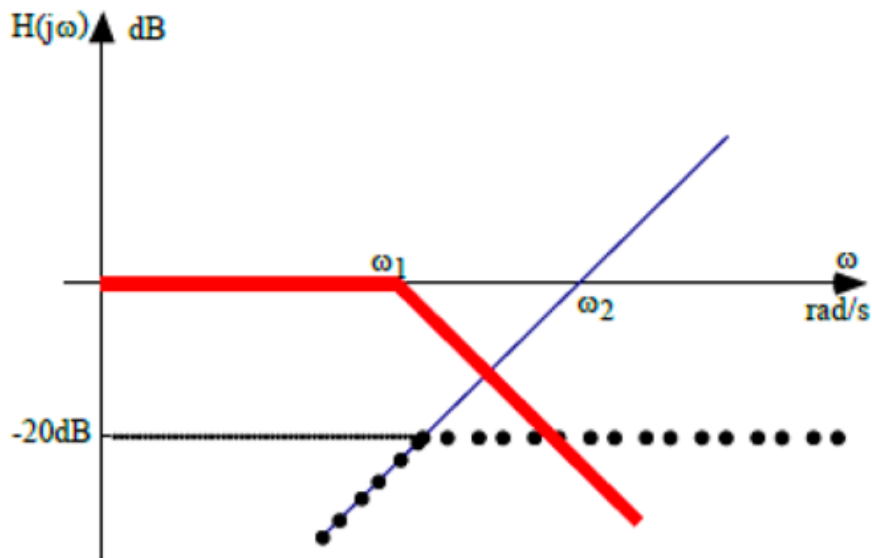
Pour ω :

$$\omega \ll \frac{1}{R(C_1 + C_2)} :$$

$$\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) \approx 90^\circ - 0^\circ = 90^\circ$$

et pour $\omega : \omega \gg \frac{1}{R(C_1+C_2)}$:

$$\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) \approx 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$$



Solution : Ex 6

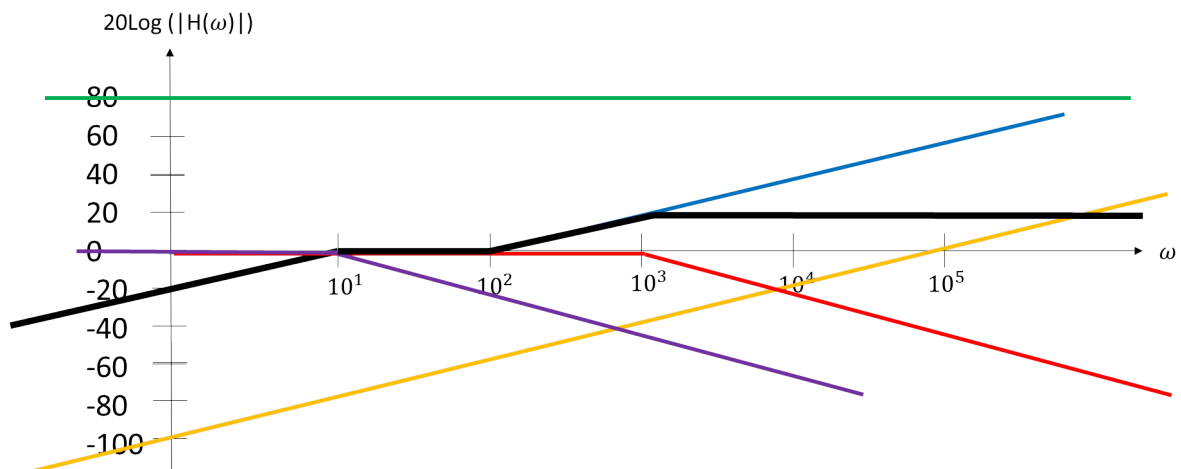
$$\underline{H}(j\omega) = -10^4 \frac{(1 + j\omega 10^{-2})(j\omega 10^{-5})}{(1 + j\omega 10^{-1})(1 + j\omega 10^{-3})}$$

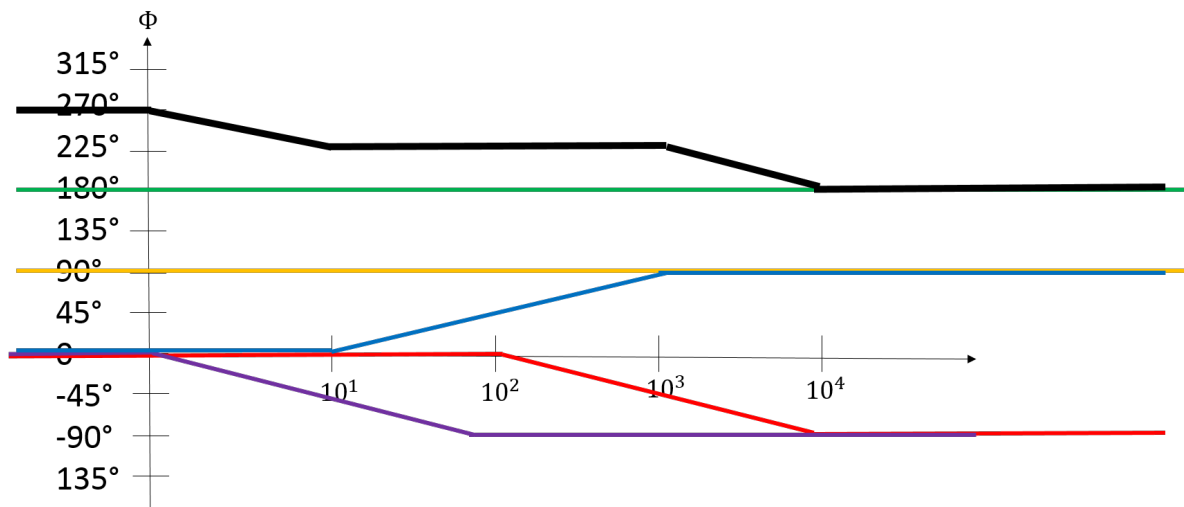
Pour obtenir les valeurs de l'amplitude en dB :

$$\begin{aligned} 20\text{Log}(|\underline{H}(j\omega)|) &= \\ 80 + 20\text{Log}(|1 + j\omega 10^{-2}|) + 20\text{Log}(|j\omega 10^{-5}|) - 20\text{Log}(|1 + j\omega 10^{-1}|) - 20\text{Log}(|1 + j\omega 10^{-3}|) &= \\ 80 + 20\text{Log}(\sqrt{1 + (\omega 10^{-2})^2}) + 20\text{Log}(\omega 10^{-5}) - 20\text{Log}(\sqrt{1 + (\omega 10^{-1})^2}) - 20\text{Log}(\sqrt{1 + (\omega 10^{-3})^2}) &= \end{aligned} \quad (1)$$

Pour obtenir les valeurs de phase :

$$\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{H}(j\omega))}{\text{Re}(\underline{H}(j\omega))}\right) = 180^\circ + \arctan(\omega 10^{-2}) + 90^\circ - \arctan(\omega 10^{-1}) - \arctan(\omega 10^{-3}) \quad (2)$$





Pour les valeurs de phase et de amplitude en dB pour $\omega = 10Hz$, $\omega = 10^3Hz$, $\omega = 10^2Hz$ et $\omega = 10^5Hz$ on utilise les equations (1) et (2) et on trouve

$$|\underline{H}(\omega = 10Hz)| = -3dB$$

$$|\underline{H}(\omega = 10^3Hz)| = 17dB$$

$$Arg(\underline{H}(\omega = 10^2Hz)) = 225^\circ$$

$$Arg(\underline{H}(\omega = 10^5Hz)) = 180.5^\circ$$