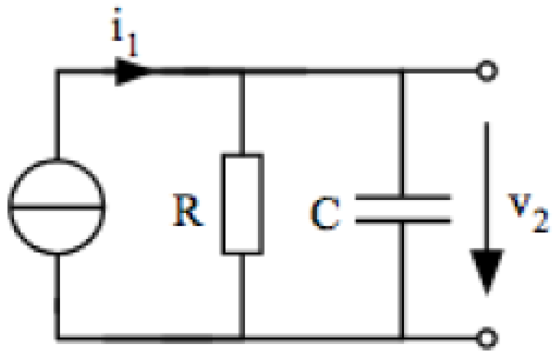
Solution : Ex 1

Schéma :



La function de transfert est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_2}}{\underline{I_1}}$$

Pour résoudre, on passe dans le domain complexe :

$$i_1(t) = \underline{I_1} = I_1 \cdot e^{j\phi_1}$$
$$v_2(t) = \underline{V_2} = V_2 \cdot e^{j\phi_2}$$

La somme des courants ainsi que les lois des éléments nous donnent :

$$\underline{I_1} = \underline{I_R} + \underline{I_c} \tag{1}$$

$$\underline{I_R} = \frac{\underline{V_2}}{R} \tag{2}$$

$$\underline{I_c} = j\omega C\underline{V_2} \tag{3}$$

En remplaçant (2) et (3) dans (1) on obtient avec $\underline{V_R} = \underline{V_2}$:

$$\underline{I_1} = \frac{\underline{V_R}}{R} + j\omega C\underline{V_2} \Rightarrow \underline{V_2} = \frac{\underline{I_1}}{\frac{1}{R} + j\omega C}$$

$$H(j\omega) = \frac{\underline{V_2}}{\underline{I_1}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = Z_f(j\omega) = \frac{R(1 - j\omega CR)}{1 + (\omega CR)^2}$$

$$\mid Z_f(j\omega) \mid = \frac{V_2}{I_1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \tag{4}$$

$$Arg(Z_f(j\omega)) = \arctan \frac{Im(Z_f(j\omega))}{Re(Z_f(j\omega))} = \arctan(-\omega RC)$$

Détermine $v_2(t)$ en sachant (4)

$$V_2 = I_1 \frac{R}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

$$\phi_2 = \phi_1 + \arctan(-\omega RC)$$

Étant donné que $I_1 = 2mA$ et $\phi_1 = 0$:

$$\Rightarrow v_2(t) = \frac{2 \cdot R \cdot 10^{-3}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cdot \cos(\omega t - \arctan(\omega RC))$$

et avec $f = 1kHz$, $\omega = 2\pi 10^3 rad/s$:

$$\omega RC = 2\pi 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-11} = 2\pi 10^{-7}$$

Étant donné que le terme ωRC est très petit, on peut approximer

$$\mid Z_f(j\omega) \mid \frac{R}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \simeq R$$

$$Arg(Z_f(j\omega)) = \arctan(-\omega RC) \simeq 0$$

Donc :

$$\Rightarrow V_2 = R \cdot I_2 = R \cdot 2mA = 20mV$$

$$\phi_1 = \phi_2 = 0$$

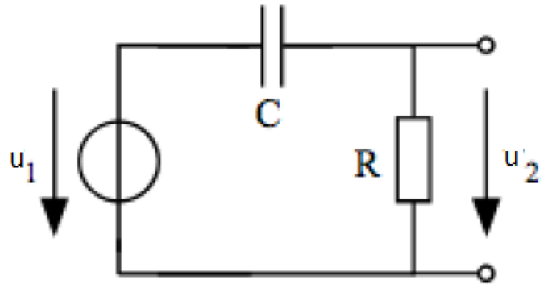
$$v_2(t) = 20mV \cdot \cos(2\pi 10^3 t)$$

Solution alternative : Substitue le parallel RC avec une impedance equivalente :

$$Z_{eq} = \frac{R}{1+j\omega RC}$$

Solution : Ex 2

Schéma :



Analyse fréquentielle :

On obtient la function de tranfert avec l'expression du diviseur de tension :

$$\bar{V_2} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \bar{V_1}$$

$$H(\bar{j}\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} = \frac{j\omega RC(1 - j\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{(\omega RC)^2 + j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$\mid H(\bar{j}\omega) \mid = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$Arg(H(j\omega)) = \arctan \frac{\omega RC}{(\omega RC)^2} = \arctan \frac{1}{\omega RC}$$

Application numérique : $R = 10^3 \Omega$, $C = 0.1 \mu F \Rightarrow RC = 10^{-4} s$

$$\mid H(\bar{j}\omega)) \mid = \frac{2\pi \cdot 10^{-4} s \cdot 10kHz}{\sqrt{1 + 39.44}} = \frac{6.28}{\sqrt{1 + 39.44}} \simeq 1$$

$$\arctan(\frac{1}{6.28}) = 9^\circ$$

$$u_2 = 50 \cos(\omega t + 9^\circ), \;\; avec \;\; \omega = 2\pi 10^4$$

Solution : Ex 3

a)
On peut écrire les équations suivantes pour les éléments R et C :

$$i = \frac{u_e - u_s}{R}$$

et

$$i = C\frac{du_s}{dt}$$

donc

$$\frac{u_e - u_s}{R} = C\frac{du_s}{dt}$$

d'où on tire :

$$RC\frac{du_s}{dt} + u_s = u_e;$$

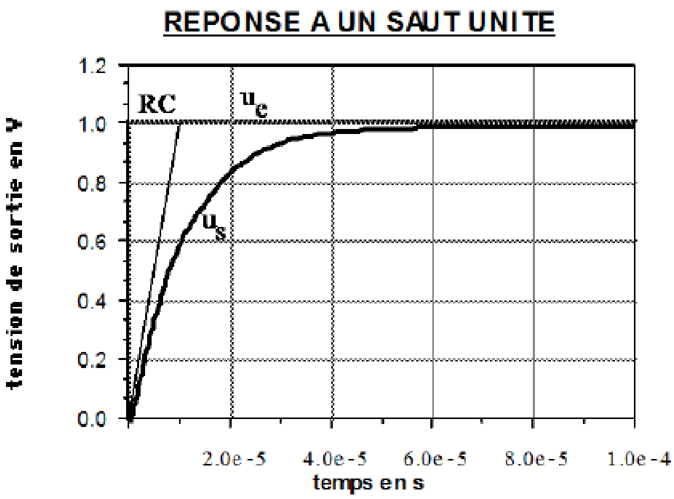
où

$$u_e = A\epsilon(t) = A$$

et

$$u_s(t = 0) = 0$$

Cette équation a comme solution : $u_s(t) = A(1 - e^{-t/RC})$



b)
On peut écrire les équations suivantes pour les éléments R et C :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_e - \underline{U}_s}{R}$$

$$\underline{I} = j\omega C\underline{U}_s$$

donc :

$$\frac{(\underline{U}_e - \underline{U}_s)}{R} = j\omega C\underline{U}_s$$

d'où on tire :

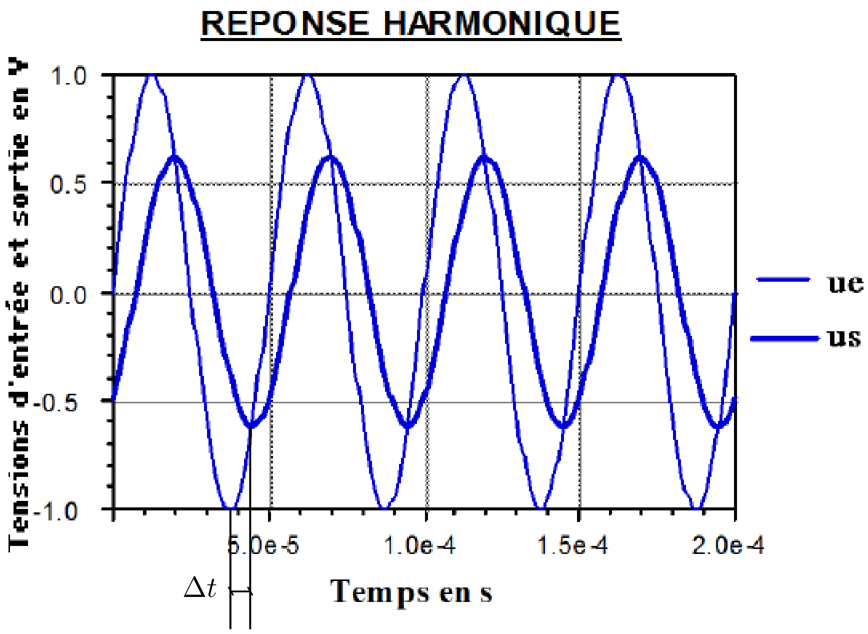
$$\underline{U}_s(j\omega) = \frac{\underline{U}_e}{1 + j\omega RC}$$

La function transfert est

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$H(\omega) = A = \frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

c)



$$U_s = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot 1 \ = 0.62V$$

déphasage de

$$\phi_s = -arctg(\omega RC) = -0.9\, rad = -57°$$

$$u_s(t) = 0.62 sin(1.25 \cdot 10^5 \cdot t - 0.9)$$

$$\Delta t = \frac{\phi_s}{\omega} = \frac{0.9}{1.25 \cdot 10^5} = 7.2 \cdot 10^{-6} s$$

* Δt est le retard en seconds de la sortie par rapport à l'entrée.

Solution : Ex 4

a)

Avec le loi de Kirchhoff on sais :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_R + \underline{I}_C \tag{5}$$

$$\underline{I}_1 = j\omega C_1(\underline{V}_1 - \underline{V}_2) \tag{6}$$

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{V}_2}{R} \tag{7}$$

$$\underline{I}_C = j\omega C_2 \underline{V}_2 \tag{8}$$

Avec (6),(7) et (8) dans (5) on obtient :

$$j\omega C_1(\underline{V}_1 - \underline{V}_2) = \frac{\underline{V}_2}{R} + j\omega C_2 \underline{V}_2$$

Après simplification on trouve

$$\underline{V}_2 = \underline{V}_1 \frac{j\omega C_1}{\frac{1}{R} + j\omega(C_1 + C_2)}$$

$$\underline{V}_2 = \underline{V}_1 \frac{j\omega R C_1}{1 + j\omega R(C_1 + C_2)}$$

avec

$$\omega_2 = 1/RC_1 = 10^4 rad/s$$

et

$$\omega_1 = 1/R(C_1 + C_2) = 10^3 rad/s$$

on obtient

$$\underline{V}_2 = \underline{V}_1 \frac{\frac{j\omega}{\omega_2}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_1}}$$

et la fonction de transfert

$$H(j\omega) = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{\frac{j\omega}{\omega_2}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_1}}$$