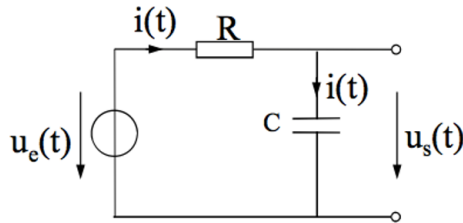


Solution : Ex 1

Schéma :



Pour trouver l'équation différentielle en $u_s(t)$, on regarde la loi des mailles :

$$u_e(t) = u_R(t) + u_s(t)$$

$$u_e(t) = R \cdot i(t) + u_s(t)$$

avec

$$Q = C \cdot u_s(t) \Rightarrow i(t) = C \cdot \frac{du_s(t)}{dt}$$

on reçoit

$$u_e(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t)$$

q.e.d.

En sachant que $u_s(t < 0) = u_0 = 3V$ et $u_s(t \rightarrow \infty) = u_\infty = 5V$, trouver la valeur de u_s en état stationnaire ($u_{t>0}$) pour $U_e(t)$ ayant l'allure ci-dessous.

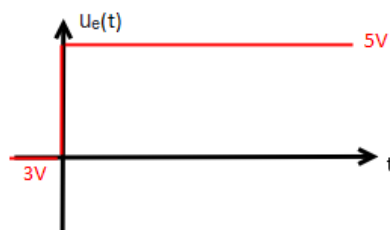


FIGURE 1 – Allure de la tension d'entrée

Solution homogène

$$RC \cdot \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t) = 0$$

$$u_s(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (1)$$

Solution particulière

$t \rightarrow \infty ; u_s(t) = \text{const}$ car $u_e(t)$ est constant

$$RC \cdot 0 + u_s(t \rightarrow \infty) = 5V$$

$$u_s(t \rightarrow \infty) = 5V \quad (2)$$

(1)+(2) :

$$\rightarrow u_s(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + 5V$$

$$u_s(0) = K \cdot e^{-\frac{0}{RC}} + 5V = K \cdot 1 + 5V \Rightarrow K = -2V$$

$$u_s(t) = -2V \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + 5V = 3V + 2V \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Solution : Ex2

Schéma :

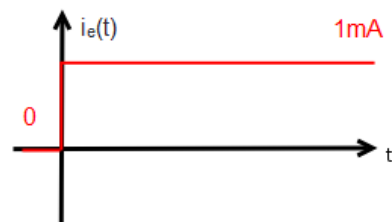
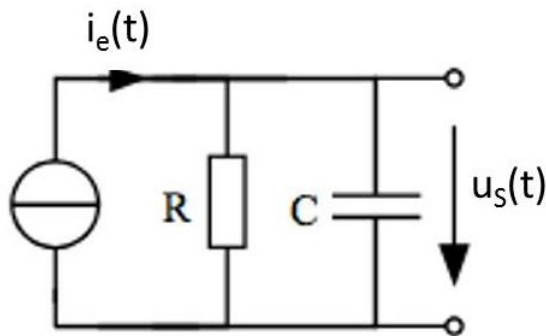


FIGURE 2 – Allure du courant

Exercices : Écrire et résoudre les équations différentielles décrivant $u_c(t)$

Sommes des courants :

$$i_e(t) = i_r(t) + i_s(t) \quad (3)$$

Équation des éléments :

$$i_r(t) = \frac{u_s(t)}{R} \quad (4)$$

$$i_c(t) = C \cdot \frac{du_s(t)}{dt} \quad (5)$$

(4) et (5) dans (3) :

$$i(t) = \frac{u_s(t)}{R} + C \cdot \frac{du_s(t)}{dt} \quad (6)$$

et obtient

$$\frac{du_s(t)}{dt} + \frac{u_s(t)}{RC} = \frac{i_e(t)}{C}$$

Réponse transitoire en résolvant l'équation homogène

$$\frac{du_s(t)}{u_s(t)} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\ln(u_s(t)) - \ln(u_s(0)) = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln \frac{u_s(t)}{u_s(0)} = -\frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow \frac{u_s(t)}{u_s(0)} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow u_s(t) = u_s(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

La solution particulière se trouve en faisant tendre t vers l'infini, en substituant dans (6) :

$u_s(\infty) = \text{constant}$ (même forme que l'entrée)

on trouve :

$$i_e(t = \infty) = \frac{u_s(t = \infty)}{R} \Rightarrow u_s(t = \infty) = \text{constante} = R \cdot i_e(t = \infty) = 10k\Omega \cdot 1mA = 10V$$

En combinant les deux solutions on trouve :

$$u_s(t) = R \cdot i_e(t = \infty) + u_s(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (7)$$

Pour trouver $u_s(0)$ il faut imposer les conditions initiales ($u_s(0) = 0$), de (7) on trouve :

$$0 = R \cdot i_\infty + u_s(0) \cdot e^{-\frac{0}{RC}} = R \cdot i_\infty + u_s(0) \cdot 1 \Rightarrow u_s(0) = -R \cdot I_0 \quad (8)$$

En substituant (8) dans (7), on trouve finalement :

$$u_s(t) = R \cdot i_e(t = \infty) + (-R \cdot i_e(t = \infty)) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = R \cdot i_e(t = \infty)(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

On peut mettre les valeurs

$$u_s(t) = 10k\Omega \cdot 1mA(1 - e^{-\frac{1}{10pF \cdot 10k\Omega}}) = 10V \cdot (1 - e^{-\frac{t}{10^{-7}s}})$$

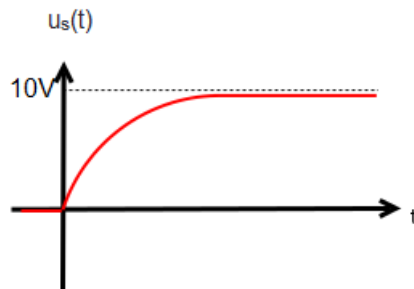


FIGURE 3 – Allure de la tension aux bornes de la capacité

Solution : Ex 3

Schéma :

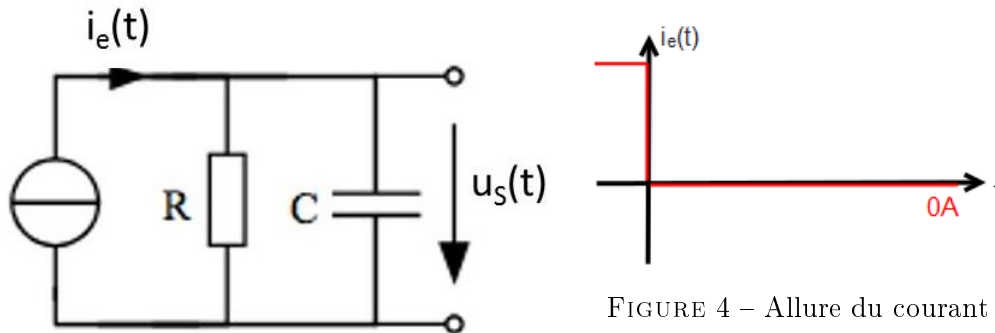


FIGURE 4 – Allure du courant

Écrire et résoudre l'équation différentielle pour $u_s(t)$ pour $t > 0$:

$$i_e(t) = \frac{u_s(t)}{R} + C \cdot \frac{du_s(t)}{dt} = 0 \quad (9)$$

l'équation (9) est homogène, la solution est donc donnée par

$$\rightarrow u_s(t) = u_s(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (10)$$

Sol. particulière

$$u_s(\infty) = 0 \quad (11)$$

Les conditions initiales sont (en utilisant l'équation (10)) :

$$u_s(t = 0) = 10V$$

Donc, à partir de (10) et (11) :

$$u_s(t) = 10V \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Solution : Ex 4

a) Ici $i(t)$ et $u(t)$ sont opposés.

On obtient :

$$i(t) = -\frac{Cdu(t)}{dt}$$

$$du(t) = \frac{-i(t)dt}{C} \Leftrightarrow \int_{t_i}^{t_j} du(t) = - \int_{t_i}^{t_j} \frac{i(t)dt}{C}$$

ou encore

$$u(t_j) - u(t_i) = -\frac{1}{C} \int_{t_i}^{t_j} i(t)dt = -\frac{1}{C} \int_{t_i}^{t_j} i_{const}dt$$

On intègre sur les intervalles où i est constant aussi :

$$u(t_j) - u(t_i) = -\frac{i_{const}}{C}(t_j - t_i)$$

$$u(t_j) = u(t_i) - \frac{i_{const}}{C}(t_j - t_i) = u(t_i) - \frac{i}{1\mu F}(t_j - t_i) \quad (12)$$

b) Application numérique :

Intervalle

$$t_0 = 0ms, t_1 = 1ms, i = 0mA, u(t_0) = 1V$$

De (12)

$$\Rightarrow u(t_1) = u(t_0) - \frac{0A}{1\mu F} = u(t_0) - 0V = 1V$$

Intervalle

$$t_1 = 1ms, t_2 = 2ms, i = 4mA, u(t_1) = 1V$$

$$\Rightarrow u(t_2) = u(t_1) - 4V = -3V$$

Intervalle

$$t_2 = 2ms, t_3 = 3ms, i = 2mA, u(t_2) = -3V$$

$$\Rightarrow u(t_3) = u(t_2) - 2V = -5V$$

Intervalle

$$t_3 = 3ms, t_4 = 4ms, i = 1mA, u(t_3) = -5V$$

$$\Rightarrow u(t_4) = u(t_3) - 1V = -6V$$

Intervalle

$$t_4 = 4ms, t_5 = \infty, i = 0mA, u(t_4) = -6V$$

$$t_4 = 4ms, t_5 = \infty, i = 0mA, u(t_4) = -6V$$

$$\Rightarrow u(\infty) = u(t_4) - 0V = -6V$$

Solution : Ex 5

La tension instantanée

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Dans tous les intervalles i est linéaire.

Pour $0 < t < 2ms$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{2mA - 0mA}{2ms - 0s} = 1 \frac{A}{s}$$

$$u(0 < t < 2ms) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 1mH \cdot 1 \frac{A}{s} = 1mV$$

Pour $2ms < t < 4ms$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{2mA - 2mA}{4ms - 2ms} = 0 \frac{A}{s}$$

$$u(2ms < t < 4ms) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 1mH \cdot 0 \frac{A}{s} = 0mV$$

Pour $4ms < t < 5ms$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{0mA - 2mA}{5ms - 4ms} = -2 \frac{A}{s}$$

$$u(4ms < t < 5ms) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 1mH \cdot -2 \frac{A}{s} = -2mV$$