Laboratoire d'électrotechnique

Génie mécanique

Bachelor semestre 1

2023

6ème séance

LES FILTRES

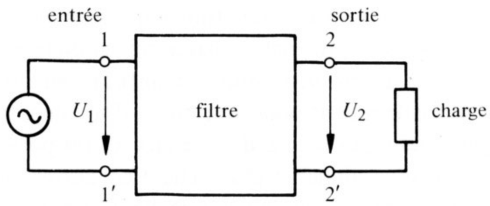
A. OBJECTIFS

- Étude des filtres passe-haut **RC**, passe-bas **RL** et passe-bande **RLC**
- Mise en évidence des fréquences de coupure et de résonance
- Utilisation du Diagramme de Bode

B. LABORATOIRE

1. Introduction

Le *filtrage* est une opération qui consiste à séparer les composants d'un signal selon leurs fréquences. Un filtre électrique est représenté sur la figure suivante :



Lorsque la tension d'entrée U_1 est sinusoïdale, la transmission à travers le filtre dépend de fréquence f :

- La ***bande passante*** est le domaine des fréquences à l'intérieur duquel un signal est transmis pratiquement sans affaiblissement ($U_2 \cong U_1$).
- Dans la ***bande bloquée***, au contraire, il est fortement affaibli ($U_2 \ll U_1$).

On distingue les filtres ***passe-haut***, ***passe-bas*** et ***passe-bande***.

La caractéristique de base des filtres est la fonction de transfert du circuit

$$H(\omega) = \left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right| = \left|\frac{\underline{U}_2(\mathrm{j}\omega)}{\underline{U}_1(\mathrm{j}\omega)}\right| \tag{1}$$

Définitions :

- La ***fréquence de coupure*** $\boldsymbol{f_C}$ sépare la bande passante de la bande bloquée et elle est valable pour les filtres *passe-haut* et *passe-bas*.
  C'est la fréquence pour laquelle la fonction de transfert du filtre $H(\omega)$ vaut

  $$H(\omega_C) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

  À la fréquence de coupure f_C, la puissance active de sortie P_2 est diminuée de moitié par rapport à la puissance active d'entrée P_1 (voir annexe A.1)

  $$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2} \tag{3}$$

- La ***fréquence de résonance*** $\boldsymbol{f_0}$ est valable pour le filtre *passe-bande*.
  C'est la fréquence pour laquelle la fonction de transfert du filtre $H(\omega)$ est purement ***réelle*** et il n'y a aucun affaiblissement ($U_2 = U_1$). De conséquence, on peut écrire

  $$H(\omega_0) = 1 \tag{4}$$

  À la fréquence de résonance f_0, la puissance active du circuit est maximale tandis que la puissance réactive est nulle.

- Le rapport de la tension d'entrée par rapport à la tension de sortie, en fonction de la fréquence présente à l'entrée du filtre, est appelé **gain**.
- Lorsqu’une grandeur sinusoïdale traverse un filtre, il se produit également une avance ou un retard de **phase** entre l'entrée et la sortie du filtre.

Pour étudier le gain est la phase d’un filtre, nous allons utiliser le **diagramme de Bode** qui est un moyen de représenter le comportement fréquentiel d'un système $H(\omega) = \left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right|$ à l’aide de **deux** tracés :

- le **gain** qui est exprimé en décibels (dB). Sa valeur est calculée à partir de

$$20\log\left(H(\omega)\right) = 20\log\left(\left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right|\right) \tag{5}$$

Remarque :

- Valeur **positive** en décibels : **AMPLIFICATION**
- Valeur **négative** en décibels : **ATTENUATION**

À la fréquence de coupure f_C, le gain vaut

$$20\log\left(H(\omega_C)\right) = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\ \mathrm{dB} \tag{6}$$

À la fréquence de résonance f_0, le gain vaut

$$20\log\left(H(\omega_0)\right) = 20\log\left(1\right) = 0\ \mathrm{dB} \tag{7}$$

- la **phase** qui est exprimée en degré. Elle est donnée par

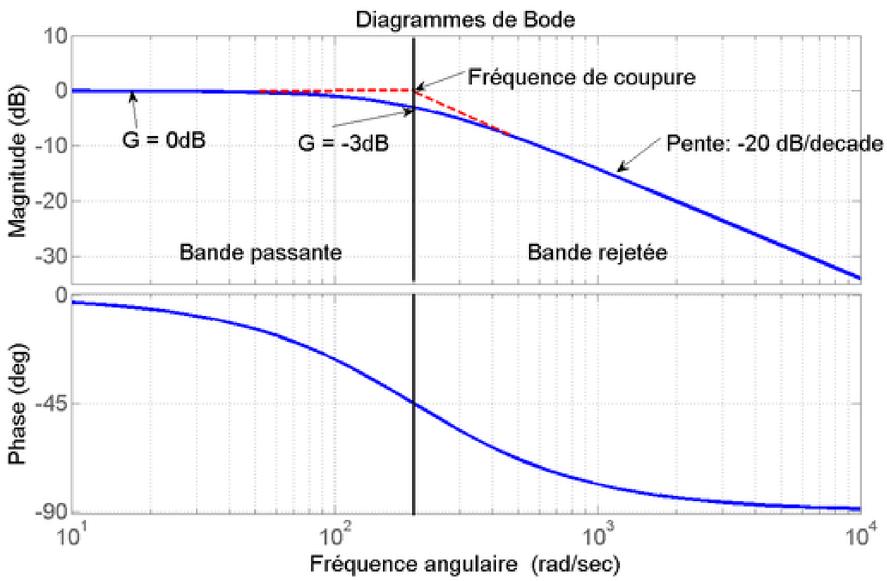
$$\arg\left(\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right) = \arctan\left(\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right) \tag{8}$$

L'échelle de l'abscisse est logarithmique et elle est exprimée en :

- rad/s pour des pulsations
- Hz pour des fréquences

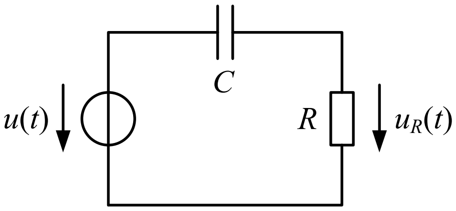
L'échelle logarithmique permet un tracé très lisible, car composé majoritairement de tronçons linéaires.

Voici un exemple de diagramme de Bode (source : Wikipédia) valable pour un filtre *passe-bas* :



2. Filtre passe-haut RC

Schéma de principe :



$R = 10\ \mathrm{k\Omega}$
$C = 10\ \mathrm{nF}$
$u(t) = \hat{U}\sin(2\pi f t)$
$u_R(t) = \hat{U}_R \sin(2\pi f t + \varphi)$

La tension d'entrée du filtre est donnée par $u(t)$.

La tension de sortie du filtre est donnée par $u_R(t)$.

2.1. Comportement fréquentiel

La fonction de transfert du filtre passe-haut RC est exprimée par (voir Annexe A.2)

$$\left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right| = H(\omega) = \frac{U_R(\omega)}{U(\omega)} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \tag{9}$$

Avec

$$\omega = 2\pi f \tag{10}$$

Pour le filtre passe-haut RC, la fréquence de coupure f_C est donnée par

$$H(\omega_C) = \frac{\omega_C RC}{\sqrt{1+(\omega_C RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_C = 2\pi f_C = \frac{1}{RC} \tag{11}$$

$$f_C = \frac{1}{2\pi RC} \tag{12}$$

Comment varie la valeur du gain $H(\omega)$ en fonction de la fréquence f (plusieurs réponses possibles) ?

- ☐ Si $f \to 0$, $H(\omega) \to 0$ (bande bloquée)
- ☐ Si $f \to 0$, $H(\omega) \to 1$ (bande passante)
- ☐ Si $f \to \infty$, $H(\omega) \to 0$ (bande bloquée)
- ☐ Si $f \to \infty$, $H(\omega) \to 1$ (bande passante)

2.2. Fréquence de coupure

Calculer la fréquence de coupure f_C (relation (12)) :

$f_C =$ ....

Calculer la valeur du gain en décibels (dB) pour la fréquence de coupure f_C (relations (9)+(11)) :

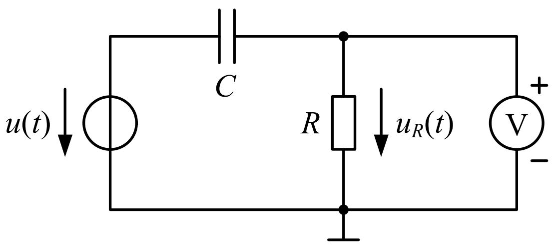
$20\log\left(H\left(\omega_C\right)\right) =$ ....

Calculer la phase φ pour la fréquence de coupure f_C (relations (11)+(34)) :

$\varphi =$ ....

2.3. Mesures

Schéma de montage :



$u(t) = \hat{U}\sin(2\pi f t)$ (HMF2525)
$R = 10\ \mathrm{k\Omega}$
$C = 10\ \mathrm{nF}$
V = Voltmètre (Multimètre HMC8012)

Pour étudier le filtre passe-haut RC, on va choisir pour la tension d'entrée du filtre $u(t)$ un signal sinusoïdal d'amplitude $\hat{U} = 10\ \mathrm{V}$ dont on fait varier la fréquence f.

Utiliser les paramètres suivants pour le générateur de fonctions **HMF2525** :

Fonction	
Frequency	Variable (voir page 7)
Offset	$0\ \mathrm{V}$

Quelle amplitude faut-t-il choisir avec la touche **AMPLITUDE** ?

- ☐ $20\ \mathrm{V}$
- ☐ $10\ \mathrm{V}$

<u>Mesure du gain en décibels (dB)</u>

La mesure du gain en décibels (dB) sera effectuée à l'aide du multimètre **HMC8012**.

- Connecter la tension $u_R(t)$ à mesurer entre les deux bornes **V** et **COM**.

	On obtient une mesure correcte en effectuant une connexion qui respecte le sens de la tension : Le signe "**+**" du schéma correspond à la borne **V** Le signe "**–**" du schéma correspond à la borne **COM**	**V** ○ **+** U **COM** ○ **–**

- Quelle touche permet-elle de sélectionner la mesure d'une tension alternative ?

  ☐ **DC I**

  ☐ **DC V**

  ☐ **AC V**

- Vérifier que la touche **Auto Range** est activée en contrôlant que l'écriture de l'affichage correspondant est de couleur **JAUNE**

Dans le cadran réservé à la mesure principale (**Main**) on visualise la **valeur efficace** de la tension $u_R(t)$.

Dans le cadran supérieur réservé à la 2ème mesure possible (**2nd**), faire apparaître la valeur du **gain** en décibels (dB) en sélectionnant la mesure grâce au menu **2nd Function** :

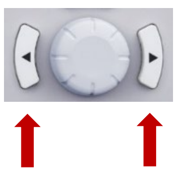
SELECT : dB

Pour visualiser correctement la valeur du gain en dB, on doit également choisir la valeur de référence exprimée en valeur efficace.

Dans notre cas, la valeur de référence correspond à la valeur efficace de la tension d'entrée du filtre $u(t)$:

$$\frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7.07\ \mathrm{V} \tag{13}$$

Dans le menu **2nd Function** , choisir **REF. VALUE** et introduire la valeur 7.07 V.



Utiliser ces **deux touches** pour choisir le chiffre à modifier dans la valeur de référence.

Mesure de la phase φ

La mesure de la phase φ sera effectuée à l'aide de l'oscilloscope.

Visualiser les tensions $u(t)$ et $u_R(t)$ à l'oscilloscope.

Utiliser la configuration suivante :

Canal 1 (CH1)	$u(t)$		
Canal 2 (CH2)	$u_R(t)$		
Base de temps	À choisir en fonction de la fréquence f		
Trigger	SOURCE : $u(t)$ (Canal 1)	LEVEL : $0\ \mathrm{V}$	SLOPE : Flanc Montant

Quel couplage faut-t-il utiliser pour les **deux** canaux afin de visualiser les courbes correctement ?

- ☐ AC
- ☐ DC
- ☐ AC ou DC

Superposer le **GND** des deux courbes.

Utiliser le menu **AUTO MEASURE** pour mesurer le déphasage φ :

Noter la configuration choisie dans le tableau suivant :

PLACE MESURE (MEAS. PLACE)	
MESURE 1 (MEASURE 1)	
TYPE	
SOURCE MESURE	
SOURCE REF	

Travail à effectuer :

Faire varier la fréquence f et étudier l'évolution de la valeur du gain et de la phase φ.

Utiliser la séquence suivante exprimée en Hz :

100	200	400	600	800	1 k	f_C	2 k	4 k	6 k	8 k	10 k

Pour chaque fréquence :

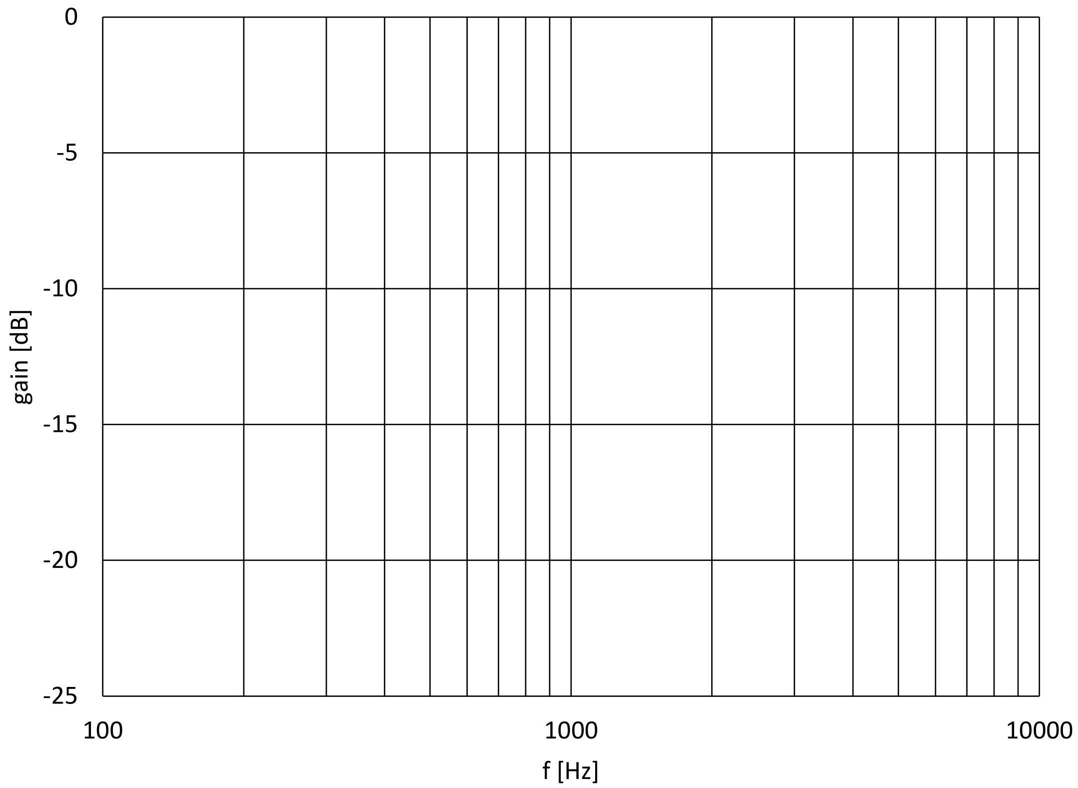
1. Mesurer le gain en décibels (dB) à l'aide du multimètre.
2. ⚠ Choisir le calibre de la base de temps et le calibre de la tension $u_R(t)$ afin d'utiliser au maximum la taille de l'écran de l'oscilloscope et augmenter la précision des calculs.
3. Mesurer la phase φ à l'aide du menu **AUTO MEASURE** de l'oscilloscope.

Reporter les valeurs dans le tableau ci-dessous.

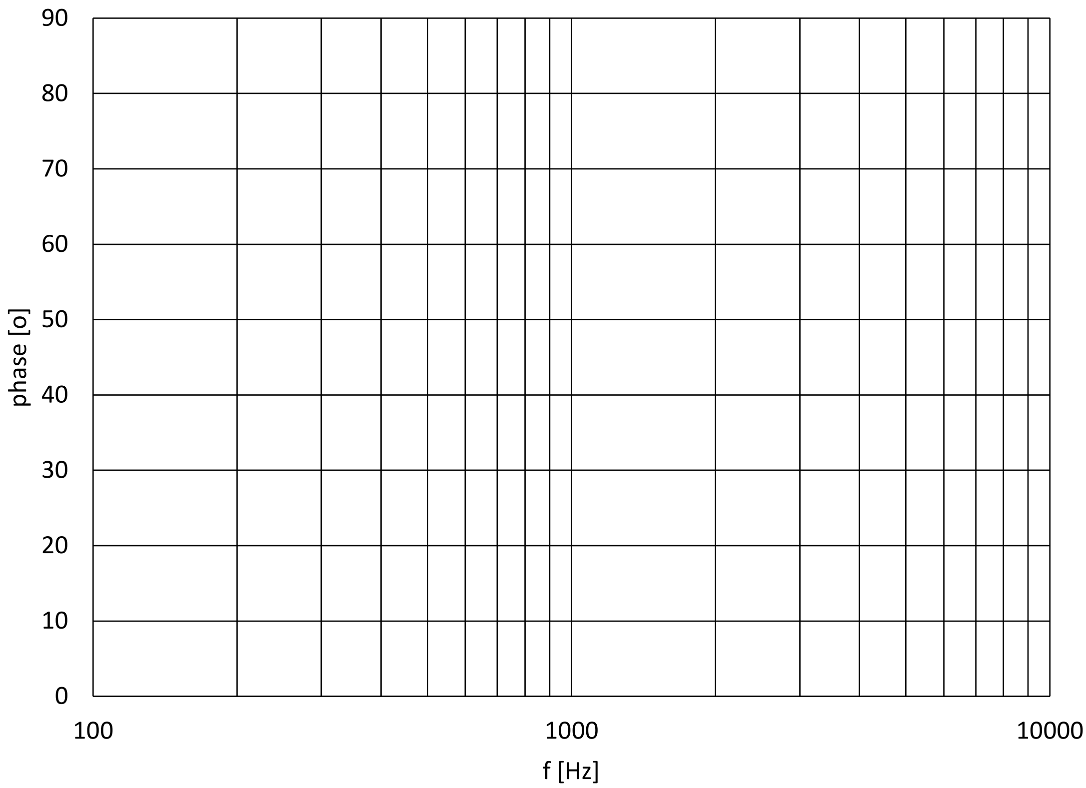
f [Hz]	$20\log(U_R/U)$ [dB]	φ [°]
100		
200		
400		
600		
800		
1 k		
f_C		
2 k		
4 k		
6 k		
8 k		
10 k		

En tenant compte de la précision des appareils de laboratoire, de la tolérance des composants et des imperfections de la plaque "Hirshman", vérifier qu'il y a concordance entre les valeurs calculées pour la fréquence de coupure f_C et les valeurs mesurées.

Reporter le gain $20\log(U_R / U)$ dans le diagramme de Bode ci-dessous

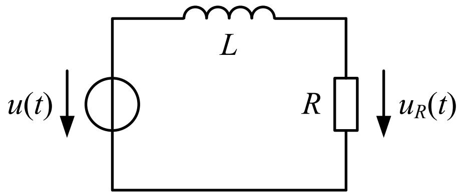


Reporter la phase φ dans le diagramme de Bode ci-dessous



3. Filtre passe-bas RL

Schéma de principe :



$R = 1\ \mathrm{k\Omega}$

$L = 10\ \mathrm{mH}$

$u(t) = \hat{U}\sin(2\pi f t)$

$u_R(t) = \hat{U}_R \sin(2\pi f t + \varphi)$

La tension d'entrée du filtre est donnée par $u(t)$.

La tension de sortie du filtre est donnée par $u_R(t)$.

3.1. Comportement fréquentiel

La fonction de transfert du filtre passe-bas RL est exprimée par (voir Annexe A.3)

$$\left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right| = H(\omega) = \frac{U_R(\omega)}{U(\omega)} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \tag{14}$$

Avec

$$\omega = 2\pi f \tag{15}$$

Pour le filtre passe-bas RL, la fréquence de coupure f_C est donnée par

$$H(\omega_C) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega_C L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_C = 2\pi f_C = \frac{R}{L} \tag{16}$$

$$f_C = \frac{R}{2\pi L} \tag{17}$$

Comment varie la valeur du gain $H(\omega)$ en fonction de la fréquence f (plusieurs réponses possibles) ?

- ☐ Si $f \to 0$, $H(\omega) \to 0$ (bande bloquée)
- ☐ Si $f \to 0$, $H(\omega) \to 1$ (bande passante)
- ☐ Si $f \to \infty$, $H(\omega) \to 0$ (bande bloquée)
- ☐ Si $f \to \infty$, $H(\omega) \to 1$ (bande passante)

3.2. Fréquence de coupure

Calculer la fréquence de coupure f_C (relation (17)) :

$f_C =$ ....

Calculer la valeur du gain en décibels (dB) pour la fréquence de coupure f_C (relations (14)+(16)) :

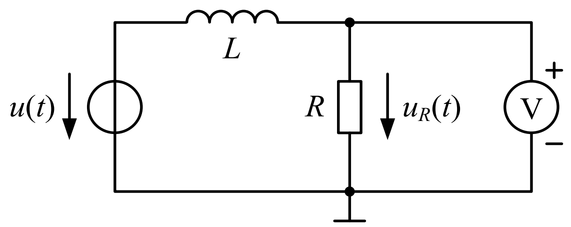
$20\log\left(H\left(\omega_C\right)\right) =$ ....

Calculer la phase φ pour la fréquence de coupure f_C (relations (16)+(41)) :

$\varphi =$ ....

3.3. Mesures

Schéma de montage :



$u(t) = \hat{U}\sin(2\pi f t)$ (HMF2525)
$R = 1\ \mathrm{k\Omega}$
$L = 10\ \mathrm{mH}$
V = Voltmètre (Multimètre HMC8012)

Pour étudier le filtre passe-bas RL, on va choisir pour la tension d'entrée du filtre $u(t)$ un signal sinusoïdal d'amplitude $\hat{U} = 10\ \mathrm{V}$ dont on fait varier la fréquence f.

Les appareils de laboratoire ont la même configuration utilisée lors de l'étude du filtre passe-haut RC (chapitre 2).

<u>Travail à effectuer :</u>

Faire varier la fréquence f et étudier l'évolution de la valeur du gain et de la phase φ.

Utiliser la séquence suivante exprimée en kHz :

1	2	4	6	8	10	f_C	20	40	60	80	100

Pour chaque fréquence :

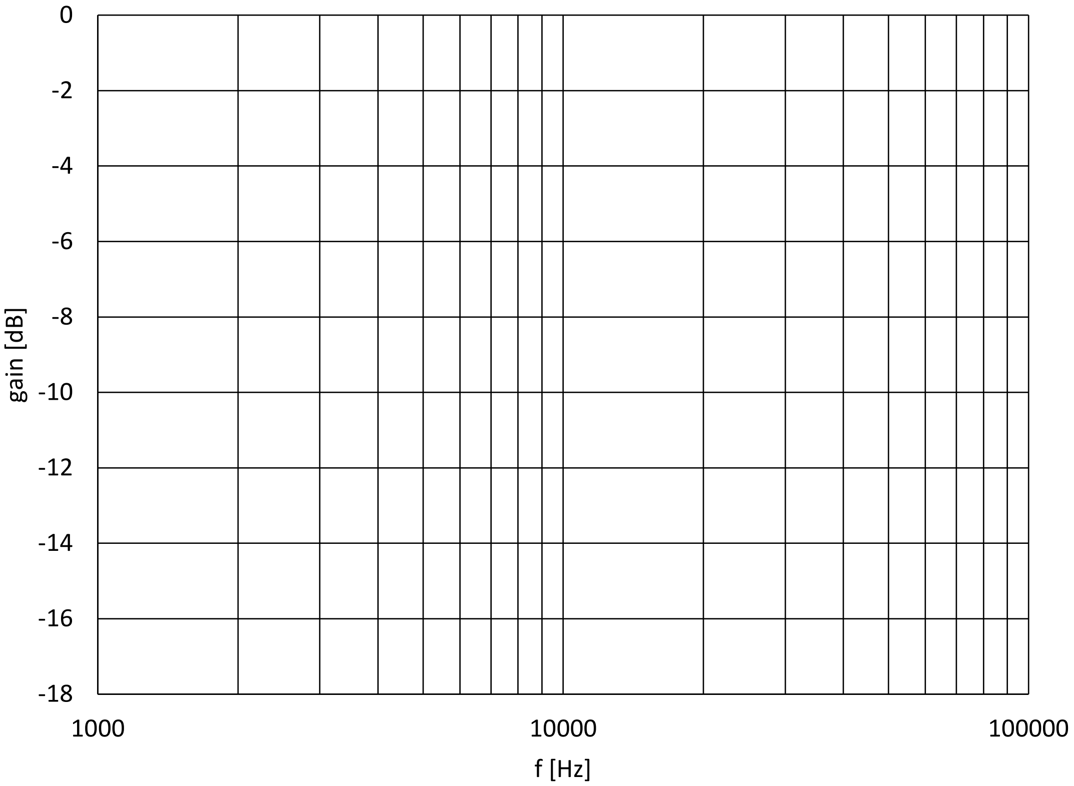
1. Mesurer le gain en décibels (dB) à l'aide du multimètre.
2. Choisir le calibre de la base de temps et le calibre de la tension $u_R(t)$ afin d'utiliser au maximum la taille de l'écran de l'oscilloscope et augmenter la précision des calculs.
3. Mesurer la phase φ à l'aide du menu **AUTO MEASURE** de l'oscilloscope.

Reporter les valeurs dans le tableau ci-dessous.

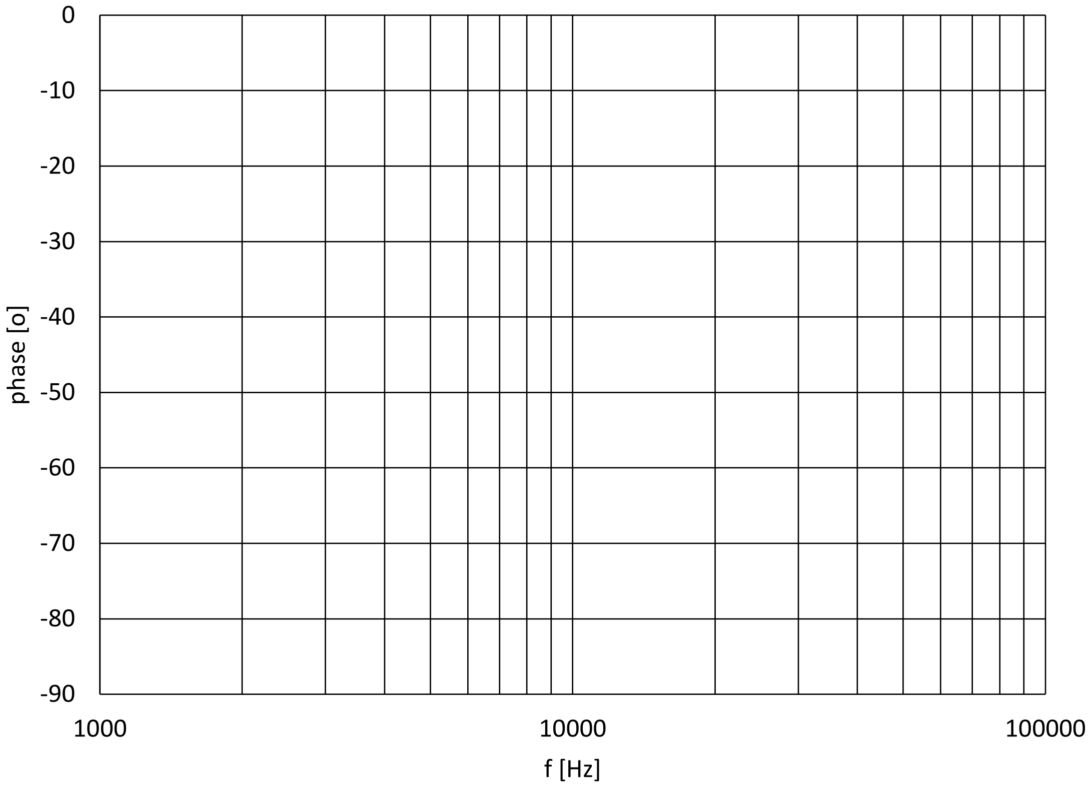
f [kHz]	$20\log(U_R/U)$ [dB]	φ [°]
1		
2		
4		
6		
8		
10		
f_C		
20		
40		
60		
80		
100		

En tenant compte de la précision des appareils de laboratoire, de la tolérance des composants et des imperfections de la plaque "Hirshman", vérifier qu'il y a concordance entre les valeurs calculées pour la fréquence de coupure f_C et les valeurs mesurées.

Reporter le gain $20\log\left(U_R / U\right)$ dans le diagramme de Bode ci-dessous

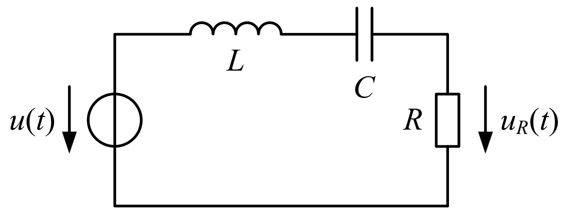


Reporter la phase φ dans le diagramme de Bode ci-dessous



4. Filtre passe-bande RLC

Schéma de principe :



$R = 1\ \mathrm{k\Omega}$
$L = 10\ \mathrm{mH}$
$C = 10\ \mathrm{nF}$
$u(t) = \hat{U}\sin(2\pi f t)$
$u_R(t) = \hat{U}_R \sin(2\pi f t + \varphi)$

La tension d'entrée du filtre est donnée par $u(t)$.

La tension de sortie du filtre est donnée par $u_R(t)$.

4.1. Comportement fréquentiel

La fonction de transfert du filtre passe-bande RLC est exprimée par (voir Annexe A.4)

$$\left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right| = H(\omega) = \frac{U_R(\omega)}{U(\omega)} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\omega RC}{\sqrt{\left(\omega RC\right)^2 + \left(\omega^2 LC - 1\right)^2}} \qquad (18)$$

Avec

$$\omega = 2\pi f \qquad (19)$$

Pour le filtre passe-bande RLC, la fréquence de résonance f_0 est donnée par

$$H(\omega_0) = \frac{\omega_0 RC}{\sqrt{\left(\omega_0 RC\right)^2 + \left(\omega_0^2 LC - 1\right)^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (20)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (21)$$

Comment varie la valeur du gain $H(\omega)$ en fonction de la fréquence f (plusieurs réponses possibles) ?

- ☐ Si $f \to 0$, $H(\omega) \to 0$ (bande bloquée)
- ☐ Si $f \to 0$, $H(\omega) \to 1$ (bande passante)
- ☐ Si $f \to f_0$, $H(\omega) \to 1$ (bande passante)
- ☐ Si $f \to \infty$, $H(\omega) \to 0$ (bande bloquée)
- ☐ Si $f \to \infty$, $H(\omega) \to 1$ (bande passante)

4.2. Fréquence de résonance

Calculer la fréquence de résonance f_0 (relation (21)) :

$f_0 =$ ....

Calculer la valeur du gain en décibels (dB) pour la fréquence de résonance f_0 (relations (18)+(20)) :

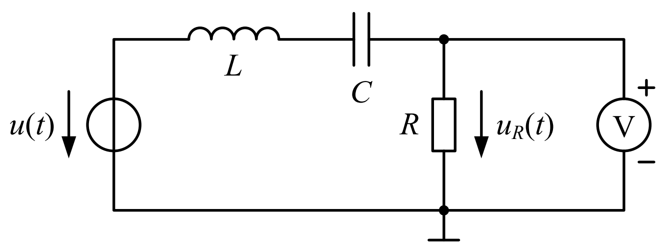
$20\log\left(H\left(\omega_0\right)\right) =$ ....

Calculer la phase φ pour la fréquence de résonance f_0 (relations (20)+(48)) :

$\varphi =$ ....

4.3. Mesures

Schéma de montage :



$u(t) = \hat{U}\sin(2\pi ft)$ (HMF2525)
$R = 1\ \mathrm{k\Omega}$
$L = 10\ \mathrm{mH}$
$C = 10\ \mathrm{nF}$
V = Voltmètre (HMC8012)

Pour étudier le filtre passe-bande RLC, on va choisir pour la tension d'entrée du filtre $u(t)$ un signal sinusoïdal d'amplitude $\hat{U} = 10\ \mathrm{V}$ dont on fait varier la fréquence f.

Les appareils de laboratoire ont la même configuration utilisée lors de l'étude du filtre passe-haut RC et passe-bas RL (chapitre 2 et 3).

<u>Travail à effectuer :</u>

Faire varier la fréquence f et étudier l'évolution de la valeur du gain et de la phase φ.

Utiliser la séquence suivante exprimée en kHz :

1	2	4	6	8	10	f_C	20	40	60	80	100

Pour chaque fréquence :

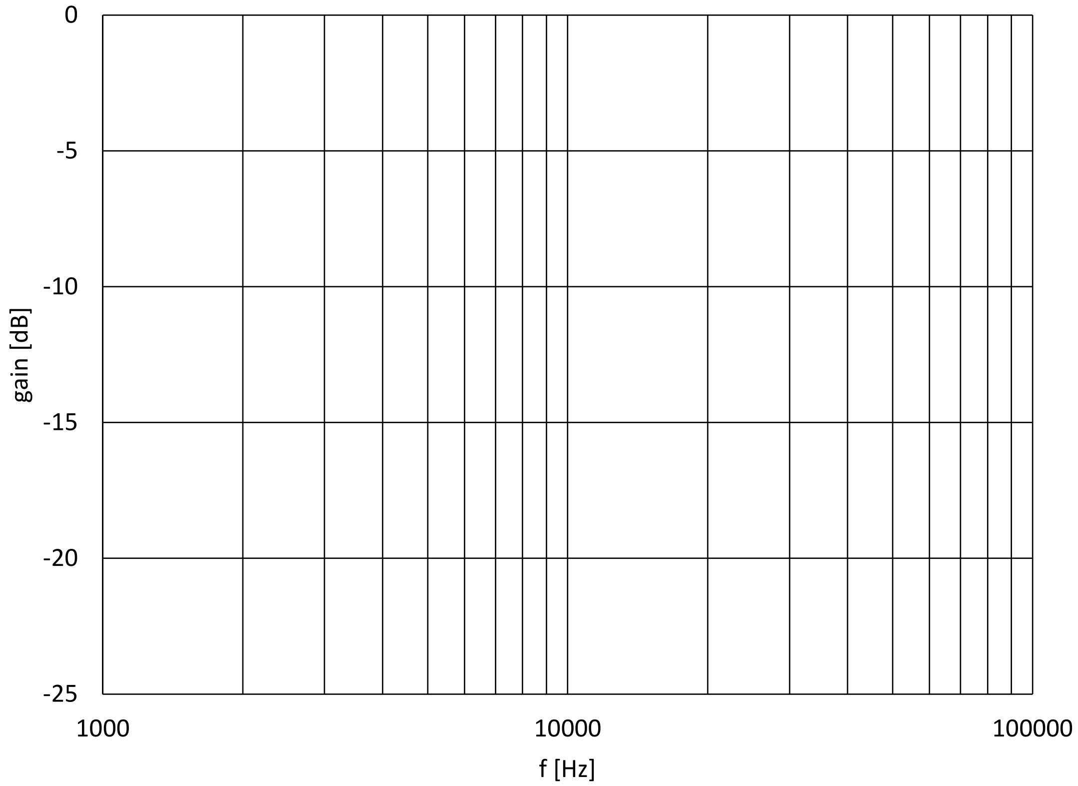
1. Mesurer le gain en décibels (dB) à l'aide du multimètre.
2. ⚠ Choisir le calibre de la base de temps et le calibre de la tension $u_R(t)$ afin d'utiliser au maximum la taille de l'écran de l'oscilloscope et augmenter la précision des calculs.
3. Mesurer la phase φ à l'aide du menu **AUTO MEASURE** de l'oscilloscope.

Reporter les valeurs dans le tableau ci-dessous.

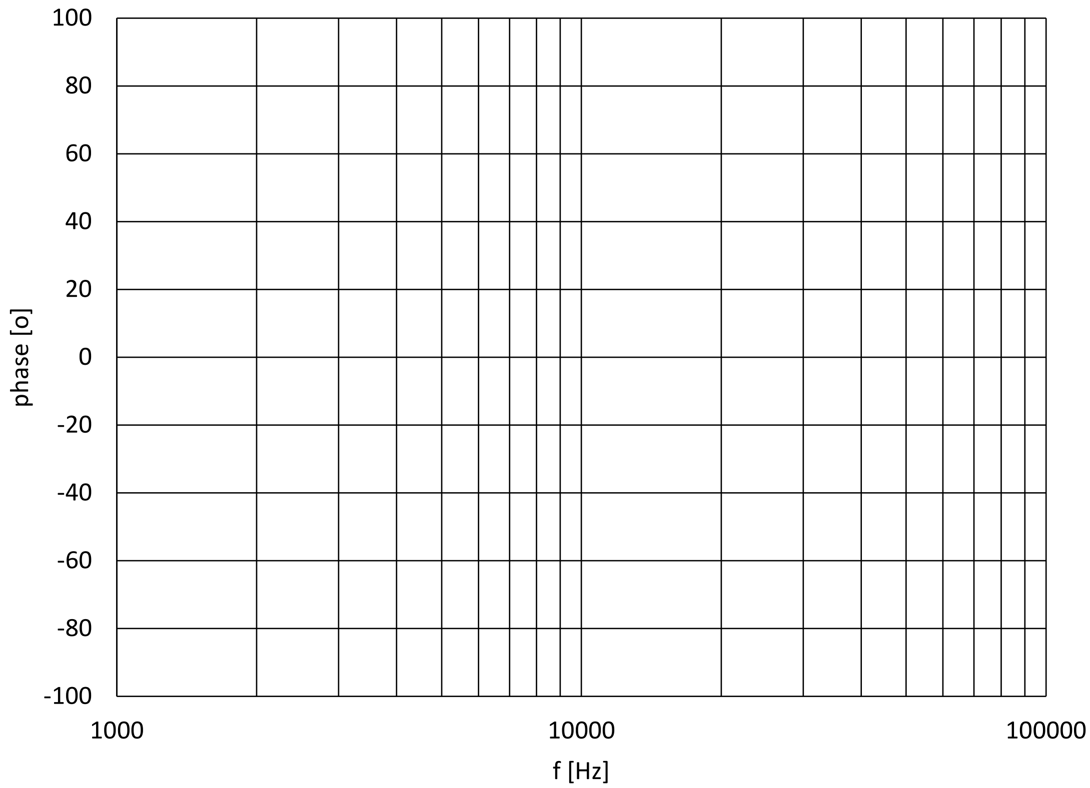
f [kHz]	$20\log(U_R/U)$ [dB]	φ [°]
1		
2		
4		
6		
8		
10		
f_0		
20		
40		
60		
80		
100		

En tenant compte de la précision des appareils de laboratoire, de la tolérance des composants et des imperfections de la plaque "Hirshman", vérifier qu'il y a concordance entre les valeurs calculées pour la fréquence de résonance f_0 et les valeurs mesurées.

Reporter le gain $20\log(U_R / U)$ dans le diagramme de Bode ci-dessous



Reporter la phase φ dans le diagramme de Bode ci-dessous



ANNEXE

A.1 Puissances

L'impédance du filtre est exprimée par :

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X \tag{22}$$

L'admittance du filtre est exprimée par :

$$\underline{Y} = G + \mathrm{jB} \tag{23}$$

La puissance **active** est proportionnelle au carré du courant ou au carré de la tension

$$P = UI\cos\varphi = RI^2 = GU^2 \tag{24}$$

La puissance **réactive** est proportionnelle au carré du courant ou au carré de la tension

$$Q = UI\sin\varphi = XI^2 = -BU^2 \tag{25}$$

Les puissances actives d'entrée P_1 et de sortie P_2 du filtre sont définies par

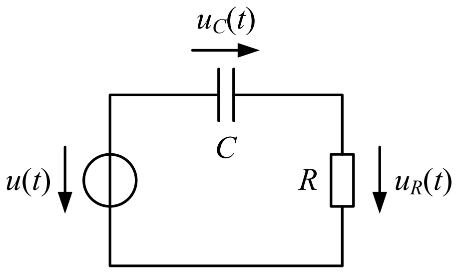
$$\begin{aligned} P_1 &= GU_1^2 \\ P_2 &= GU_2^2 \end{aligned} \tag{26}$$

À la *fréquence de coupure* f_C, leur rapport est enfin donné par

$$\begin{aligned} \frac{P_2}{P_1} &= \frac{GU_2^2}{GU_1^2} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ P_2 &= \frac{1}{2}P_1 \end{aligned} \tag{27}$$

La puissance de sortie P_2 est diminuée de moitié par rapport à la puissance d'entrée P_1

A.2 Filtre passe-haut RC



$$u(t) = \hat{U}\sin(2\pi f t)$$

L'étude du filtre est basée sur le calcul complexe.

Fonction de transfert $\boldsymbol{H(\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right|}$

Impédances

$$\begin{aligned} \underline{Z}_R &= R \\ \underline{Z}_C &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \end{aligned} \qquad (28)$$

Diviseur de tension

$$\underline{U}_R = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C}\underline{U} \qquad (29)$$

La relation (29) devient

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \frac{R}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{\mathrm{j}\omega RC}{1 + \mathrm{j}\omega RC} \qquad (30)$$

La relation suivante permet de calculer le module d'un nombre complexe

$$\underline{z} = \frac{a + \mathrm{j}b}{c + \mathrm{j}d} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} \qquad (31)$$

À l'aide des relations (30) et (31), on obtient enfin pour le module $\left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right|$

$$\left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right| = H(\omega) = \frac{U_R(\omega)}{U(\omega)} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \qquad (32)$$

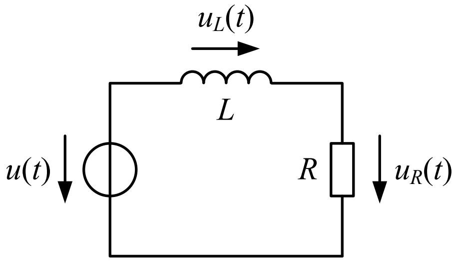
Phase φ

Le calcul de la phase φ se fait à partir de la relation (30)

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\mathrm{j}\omega RC}{1 + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{\mathrm{j}\omega RC(1 - \mathrm{j}\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}(\omega RC + \mathrm{j}) \qquad (33)$$

$$\varphi = \arg\left(\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right) = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \qquad (34)$$

A.3 Filtre passe-bas RL



$$u(t) = \hat{U}\sin(2\pi f t)$$

L'étude du filtre est basée sur le calcul complexe.

Fonction de transfert $\boldsymbol{H(\omega) = |\underline{H}(\mathrm{j}\omega)|}$

Impédances

$$\begin{aligned} \underline{Z}_R &= R \\ \underline{Z}_L &= \mathrm{j}\omega L \end{aligned} \tag{35}$$

Diviseur de tension

$$\underline{U}_R = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L}\underline{U} \tag{36}$$

La relation (36) devient

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \frac{R}{R + \mathrm{j}\omega L} \tag{37}$$

La relation suivante permet de calculer le module d'un nombre complexe

$$\underline{z} = \frac{a + \mathrm{j}b}{c + \mathrm{j}d} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} \tag{38}$$

À l'aide des relations (37) et (38), on obtient enfin pour le module $|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)|$

$$|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)| = H(\omega) = \frac{U_R(\omega)}{U(\omega)} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \tag{39}$$

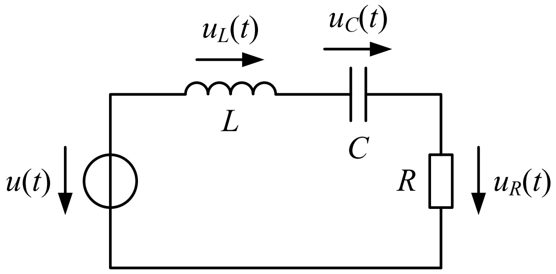
Phase φ

Le calcul de la phase φ se fait à partir de la relation (37)

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{R}{R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{R(R - \mathrm{j}\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} \tag{40}$$

$$\varphi = \arg\left(\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right) = \arctan\left(-\frac{\omega L}{R}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \tag{41}$$

A.4 Filtre passe-bande RLC



$u(t) = \hat{U}\sin(2\pi f t)$

L'étude du filtre est basée sur le calcul complexe.

Fonction de transfert $\boldsymbol{H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|}$

Impédances

$$\underline{Z}_R = R$$

$$\underline{Z}_{LC} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{42}$$

Diviseur de tension

$$\underline{U}_R = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_{LC}}\underline{U} \tag{43}$$

La relation (43) devient

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\omega RC}{\omega RC + j\left(\omega^2 LC - 1\right)} \tag{44}$$

La relation suivante permet de calculer le module d'un nombre complexe

$$\underline{z} = \frac{a + jb}{c + jd} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} \tag{45}$$

À l'aide des relations (44) et (45), on obtient enfin pour le module $|\underline{H}(j\omega)|$

$$|\underline{H}(j\omega)| = H(\omega) = \frac{U_R(\omega)}{U(\omega)} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\omega RC}{\sqrt{\left(\omega RC\right)^2 + \left(\omega^2 LC - 1\right)^2}} \tag{46}$$

Phase φ

Le calcul de la phase φ se fait à partir de la relation (44)

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\omega RC}{\omega RC + j\left(\omega^2 LC - 1\right)} = \frac{\omega RC\left(\omega RC - j\left(\omega^2 LC - 1\right)\right)}{\left(\omega RC\right)^2 + \left(\omega^2 LC - 1\right)^2} \tag{47}$$

$$\varphi = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \arctan\left(\frac{-\left(\omega^2 LC - 1\right)}{\omega RC}\right) = \arctan\left(\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC}\right) \tag{48}$$