EPFL

Cours 9: Régime permanent sinusoïdal: Superposition, Thévenin, Norton

R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

EE 106 – Sciences et technologies de l'électricité

Automne 2024

Dr. Christian Lafforgue – christian.lafforgue@epfl.ch

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Rappels

Signal sinusoïdal

- En grandeur réelle:

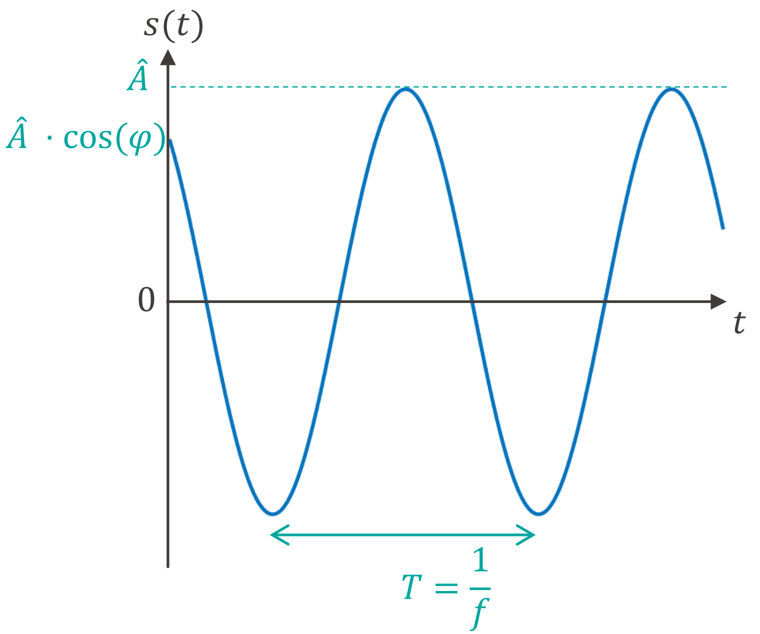
Pulsation $(= 2\pi f)$

  - $s(t) = \hat{A} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

Amplitude (crête)

Phase

- En grandeur complexe:
  - $\underline{s}(t) = \hat{A} e^{j(\omega t + \varphi)}$



Signal sinusoïdal - Phaseur

- Phaseur instantané:

$$\underline{x}(t) = \hat{X}e^{j(\omega t+\varphi)}$$

- Phaseur crête

$$\underline{\hat{X}} = \hat{X}e^{j\varphi}$$

- Phaseur efficace

$$\underline{X} = Xe^{j\varphi}$$

C. Lafforgue

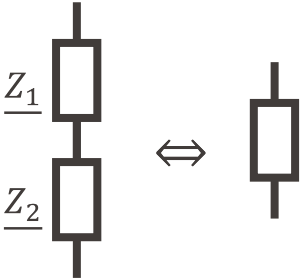
Impédance

- La loi d'Ohm se généralise pour les condensateurs et inductances en régime sinusoïdal permanent
  - $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$
  - L'impédance est complexe
  - Elle suit les mêmes règles d'agencement que les résistances en régime statique

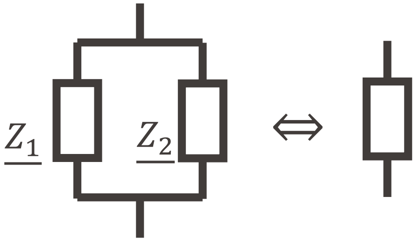
$\underline{U} = U e^{j\alpha}$

$\underline{I} = I e^{j\beta}$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} e^{j(\alpha-\beta)}$$

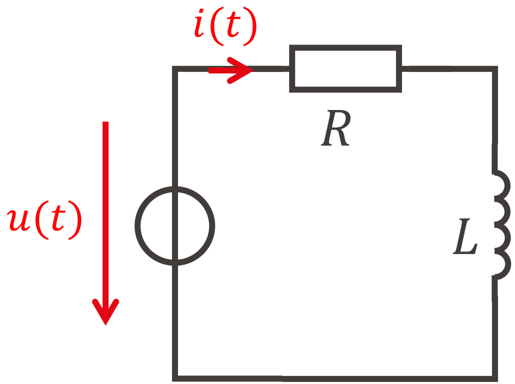


$\underline{Z_{eq}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}$



$$\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}}$$

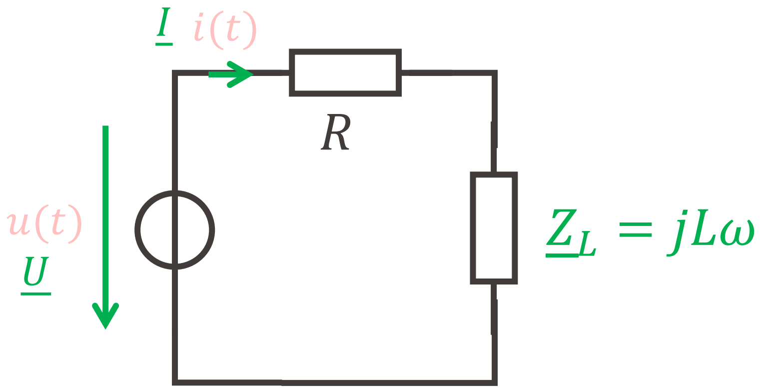
Exemple



$$u(t) = \widehat{U}\cos(\omega t + \alpha)$$
$$i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta)$$

Exemple

C. Lafforgue



$$u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha)$$
$$i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta)$$

$$\underline{U} = Ue^{j\alpha}$$
$$\underline{I} = Ie^{j\beta}$$

Mise en équation avec les phaseurs:

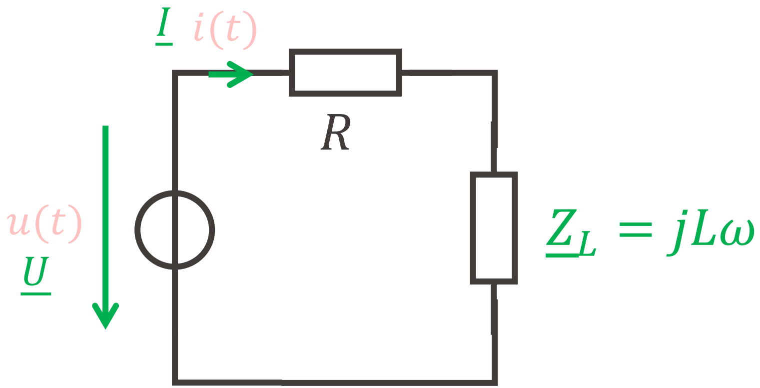
$$\underline{U} = (R + jL\omega)\underline{I}$$
$$\Leftrightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + jL\omega}$$

On en déduit le module et l'argument du courant efficace:

$$I = |\underline{I}| = \frac{|\underline{U}|}{|R + jL\omega|}$$
$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\beta = \arg(\underline{I}) = \arg(\underline{U}) - \arg(R + jL\omega)$$
$$\beta = \alpha - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

Exemple



$$u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha)$$
$$i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta)$$

$$\underline{U} = Ue^{j\alpha}$$
$$\underline{I} = Ie^{j\beta}$$

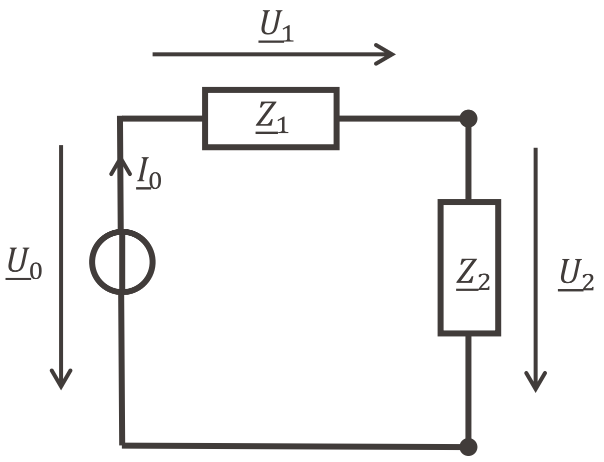
$$\underline{u}(t) = \sqrt{2}Ue^{j(\omega t+\alpha)}$$
$$\underline{i}(t) = \sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\beta)}$$

On retrouve le courant par la partie réelle du phaseur instantané:

$$i(t) = Re\{\underline{i}(t)\}$$
$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}\cos\left(\omega t + \alpha - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right)$$

C. Lafforgue

- Rappels – Utiliser le diviseur de tension pour trouver la bonne réponse



A. $\underline{U}_2 = \dfrac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_0$

B. $\underline{U}_2 = \dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_0$

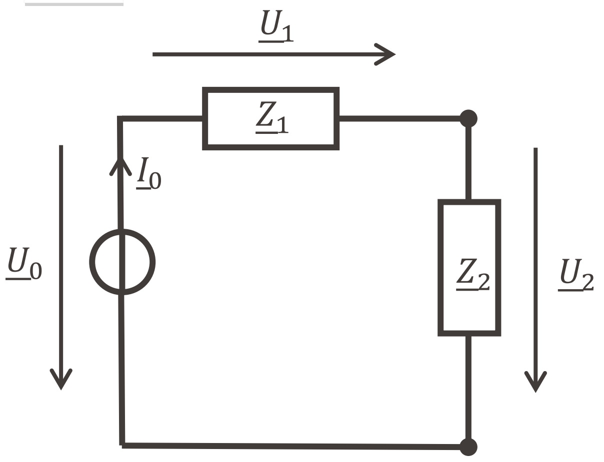
C. $\underline{U}_2 = \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_0$

D. $\underline{U}_2 = \dfrac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2} \underline{U}_0$

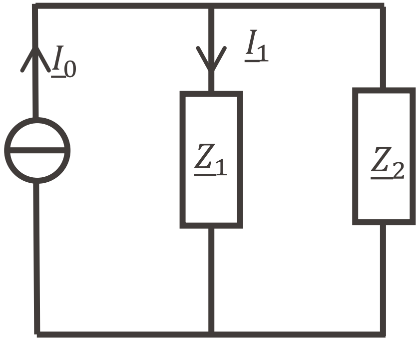
Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels – Utiliser le diviseur de tension pour trouver la bonne réponse

C. Lafforgue



- Rappels – Utiliser le diviseur de courant pour trouver la bonne réponse



A. $\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}_0$

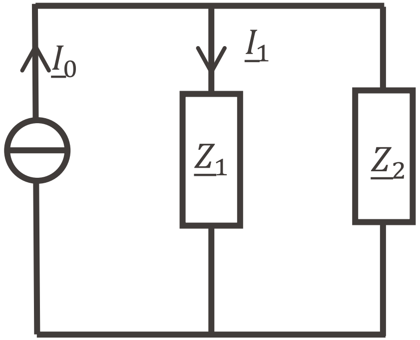
B. $\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}_0$

C. $\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}_0$

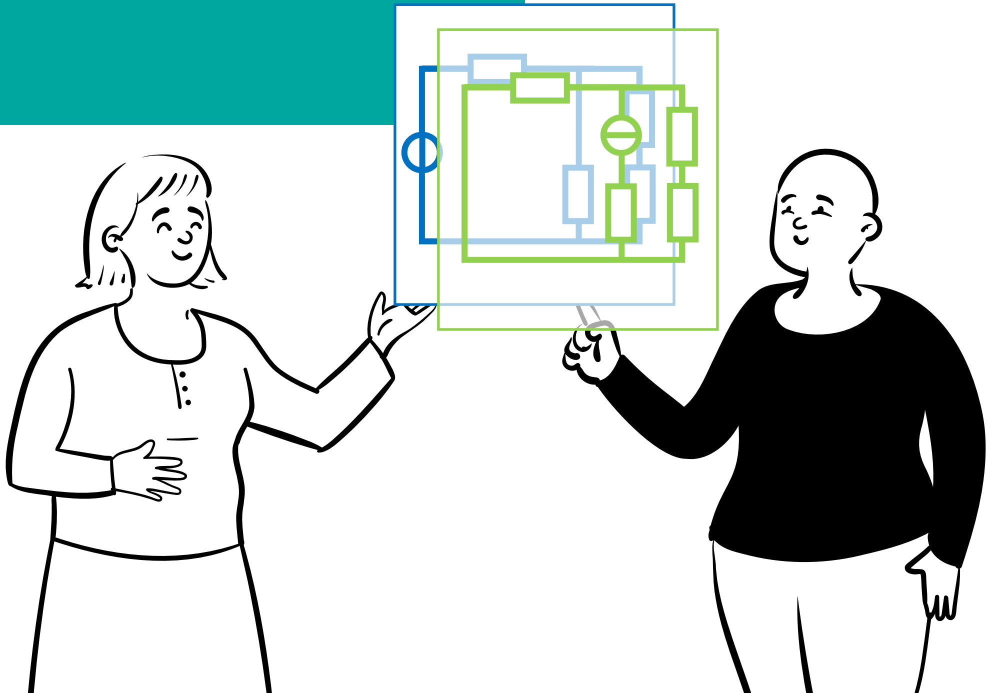
D. $\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2} \underline{I}_0$

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels – Utiliser le diviseur de courant pour trouver la bonne réponse



Principe de superposition



Principe de superposition

- En présence de plusieurs sources, on ne peut pas toujours simplifier le circuit

- On peut séparer le problème en plusieurs problèmes plus simples
  - On ne traite qu'une seule source à la fois, en éteignant les autres sources
  - On répète cela pour chaque source
  - On additionne les résultats

Principe de superposition: le résultat total est la somme des solutions correspondant à chaque source individuelle.

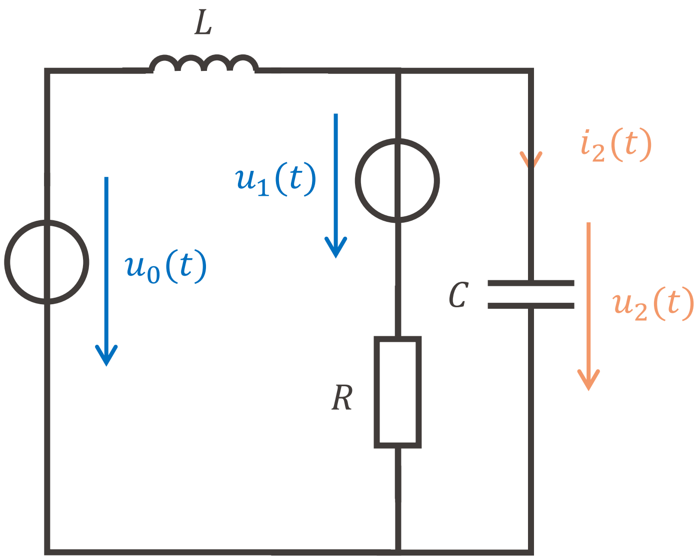
Principe de superposition– Exemple

C. Lafforgue

Objectif: Calculer la tension aux bornes de C et le courant correspondant

Données:

$$u_0(t) = \hat{U}_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$u_1(t) = -\hat{U}_1 \sin(\omega t)$$



Inconnues:

$$u_2(t) = \hat{U}_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$
$$i_2(t) = \hat{I}_2 \cos(\omega t + \beta_2)$$

C. Lafforgue

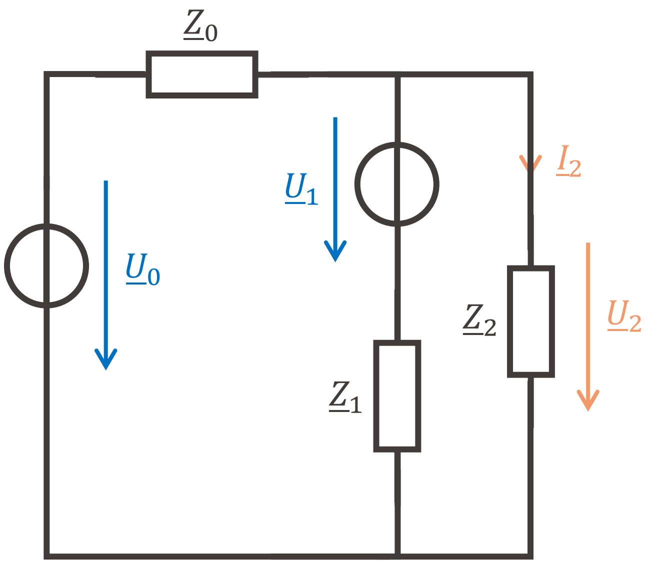
Principe de superposition– Exemple

Objectif: Calculer la tension aux bornes de $\underline{Z}_2$ et le courant correspondant

Données:

$\underline{U}_0 = U_0 e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$\underline{U}_2 = U_2 e^{j\frac{\pi}{2}}$



Inconnues:

$\underline{U}_2 = U_2 e^{j\alpha_2}$

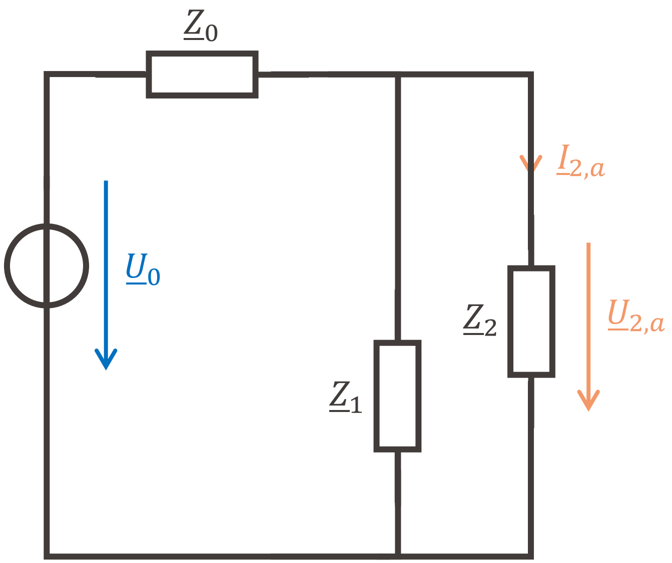
$\underline{I}_2 = I_2 e^{j\beta_2}$

Principe de superposition– Exemple

C. Lafforgue

Objectif: Calculer la tension aux bornes de $\underline{Z}_2$ et le courant correspondant

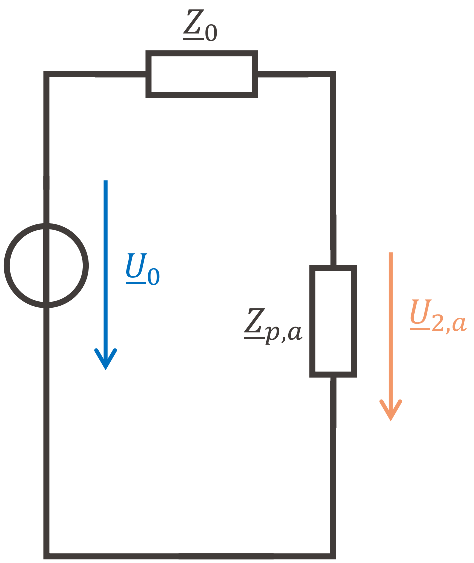
1. **On éteint la source $\underline{U}_1$**



Principe de superposition– Exemple

Objectif: Calculer la tension aux bornes de $\underline{Z}_2$ et le courant correspondant

1. On éteint la source $\underline{U}_1$
2. **On détermine les grandeurs souhaitées**



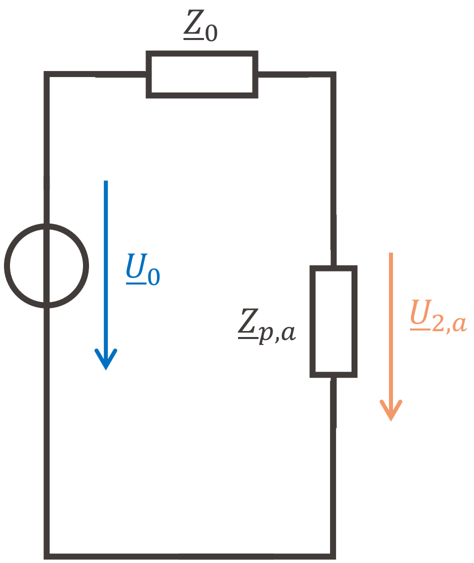
$$\underline{Z}_{p,a} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Principe de superposition– Exemple

C. Lafforgue

Objectif: Calculer la tension aux bornes de $\underline{Z}_2$ et le courant correspondant

1. On éteint la source $\underline{U}_1$
2. **On détermine les grandeurs souhaitées**

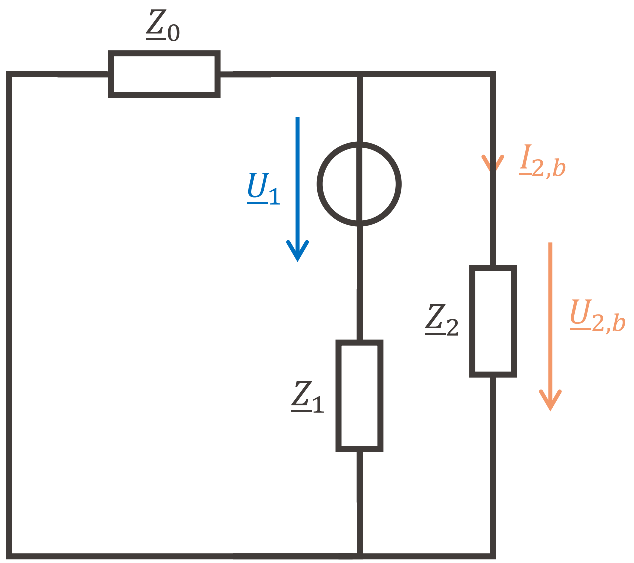


$$\underline{Z}_{p,a} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Principe de superposition– Exemple

Objectif: Calculer la tension aux bornes de $\underline{Z}_2$ et le courant correspondant

1. On éteint la source $\underline{U}_1$
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. **On éteint la source $\underline{U}_0$ et on allume $\underline{U}_1$**

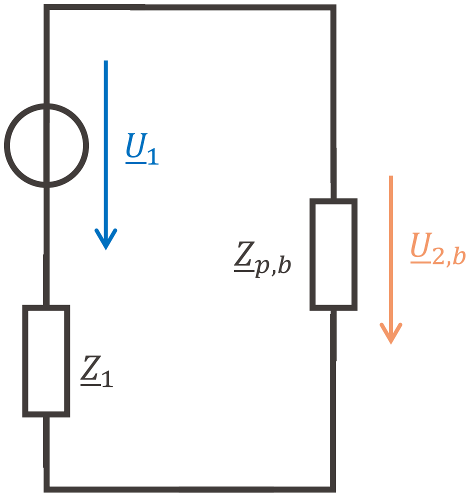


Principe de superposition– Exemple

C. Lafforgue

Objectif: Calculer la tension aux bornes de $\underline{Z}_2$ et le courant correspondant

1. On éteint la source $\underline{U}_1$
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. **On éteint la source $\underline{U}_0$ et on allume $\underline{U}_1$**

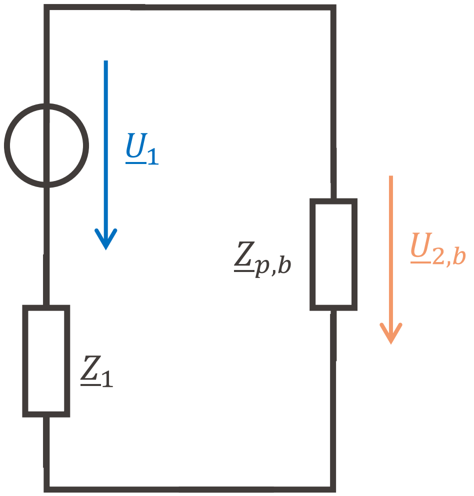


$$\underline{Z}_{p,b} = \frac{\underline{Z}_0 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2}$$

Principe de superposition– Exemple

Objectif: Calculer la tension aux bornes de $\underline{Z}_2$ et le courant correspondant

1. On éteint la source $\underline{U}_1$
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source $\underline{U}_0$ et on allume $\underline{U}_1$
4. **On détermine les grandeurs souhaitées**



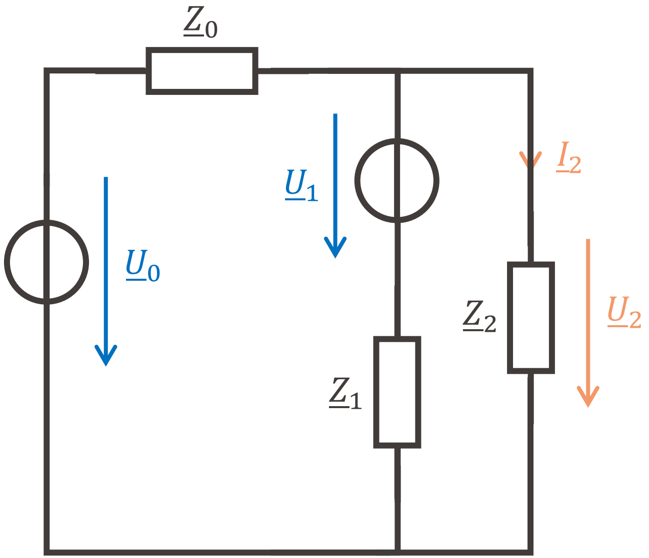
$$\underline{Z}_{p,b} = \frac{\underline{Z}_0\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2}$$

Principe de superposition– Exemple

C. Lafforgue

Objectif: Calculer la tension aux bornes de $\underline{Z}_2$ et le courant correspondant

1. On éteint la source $\underline{U}_1$
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source $\underline{U}_0$ et on allume $\underline{U}_1$
4. On détermine les grandeurs souhaitées
5. **On additionne les résultats**



Inconnues:

$\underline{U}_2 = \underline{U}_{2,a} + \underline{U}_{2,b}$

$\underline{I}_2 = \underline{I}_{2,a} + \underline{I}_{2,b}$

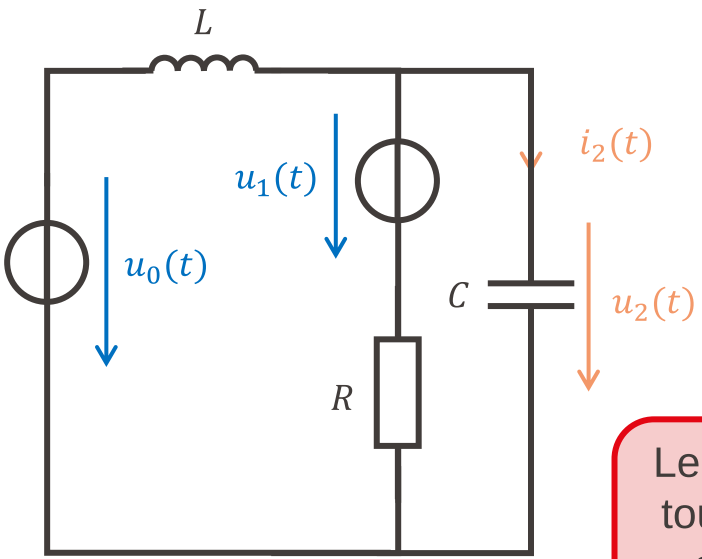
Principe de superposition– Exemple

Objectif: Calculer la tension aux bornes de C et le courant correspondant

Données:

$$u_0(t) = \hat{U}_0 \cos\left(\boldsymbol{\omega_0} t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$u_1(t) = -\hat{U}_1 \sin(\boldsymbol{\omega_1} t)$$



Inconnues:

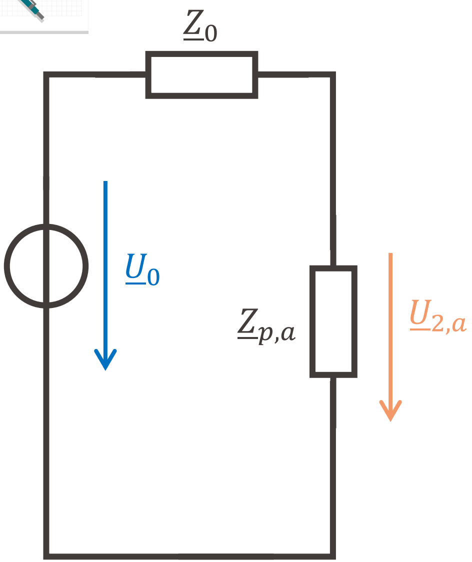
$u_2(t)$

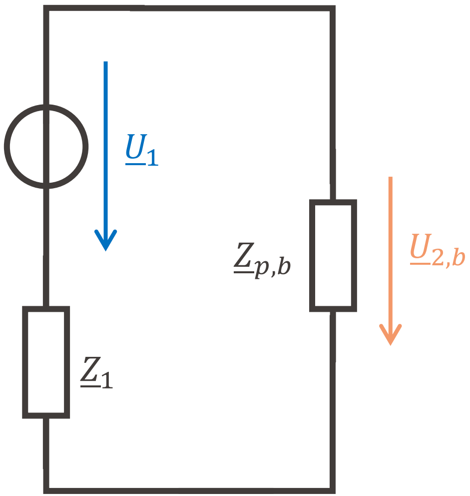
$i_2(t)$

Le principe de superposition est toujours valable, mais on fait la **somme sur les grandeurs temporelles**

Principe de superposition– Exemple

Objectif: Calculer la tension aux bornes de C et le courant correspondant

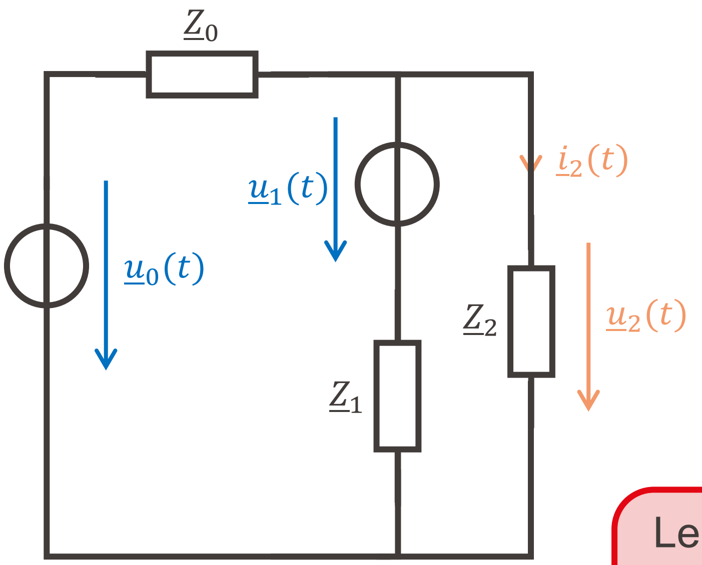




Principe de superposition– Exemple

Objectif: Calculer la tension aux bornes de $\underline{Z}_2$ et le courant correspondant

1. On éteint la source $\underline{u}_1$
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source $\underline{u}_0$ et on allume $\underline{u}_1$
4. On détermine les grandeurs souhaitées
5. **On additionne les résultats**



Inconnues:

$\underline{u}_2(t) = \underline{u}_{2,a}(t) + \underline{u}_{2,b}(t)$

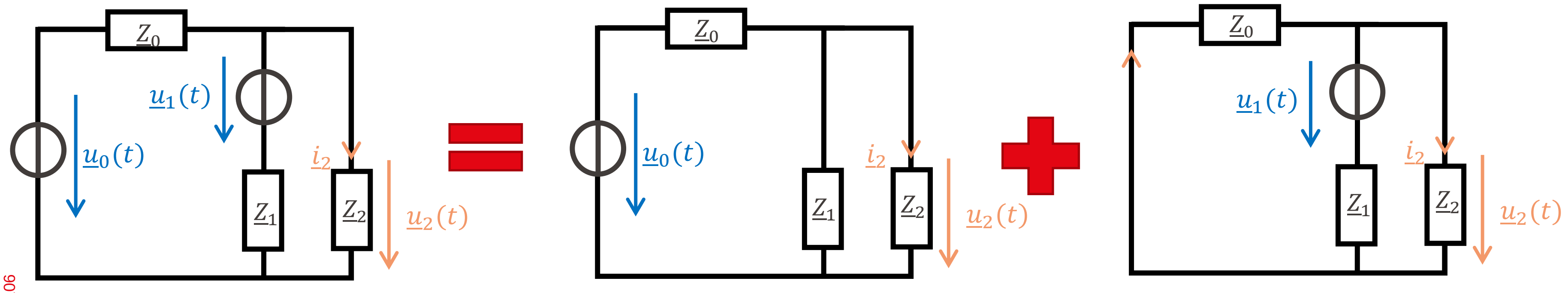
$\underline{i}_2(t) = \underline{i}_{2,a}(t) + \underline{i}_{2,b}(t)$

Le principe de superposition est toujours valable, mais on fait la **somme sur les grandeurs temporelles**

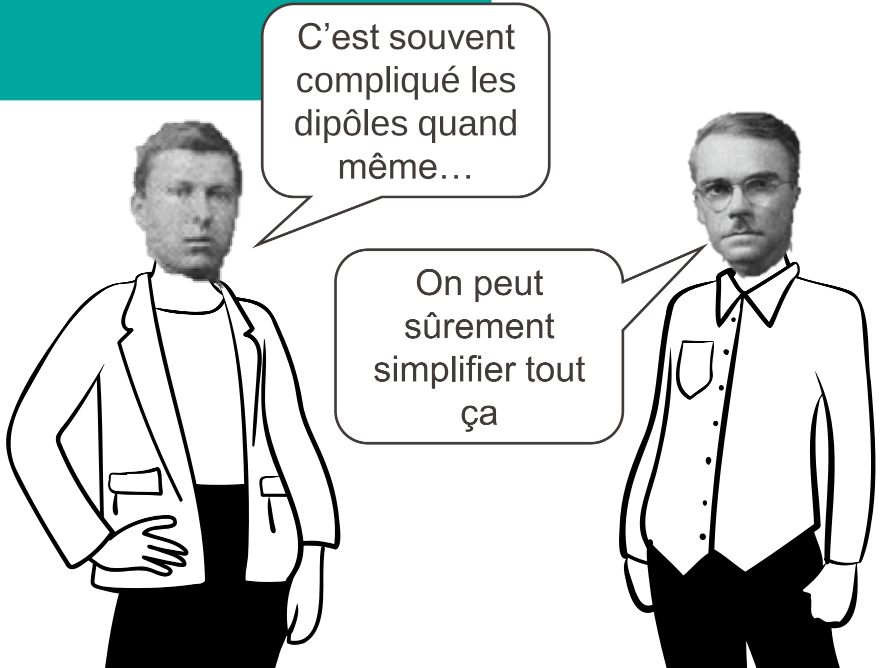
C. Lafforgue

Points clés

- Le principe de superposition permet de séparer un problème à N sources en N problèmes à une source
  - Particulièrement utile pour résoudre les systèmes à plusieurs sources
- Une source de tension éteinte est un « court-circuit »
- Une source de courant éteinte est un « circuit ouvert »



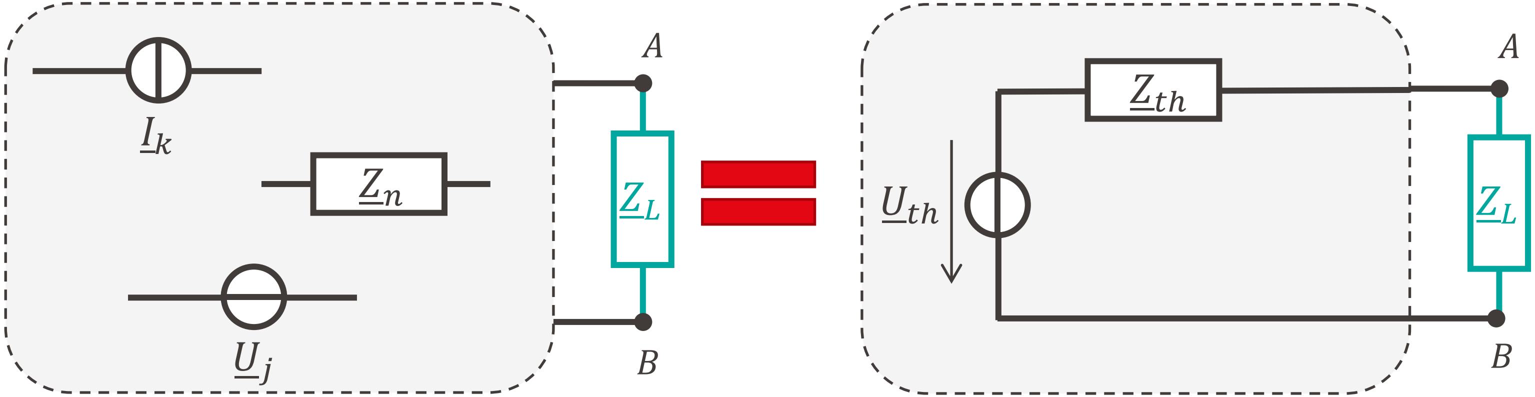
Théorème de Thévenin / théorème de Norton



C. Lafforgue

Théorème de Thévenin

- **Objectif:** Remplacer un circuit (à une fréquence donnée) par une source de tension et une impédance en série

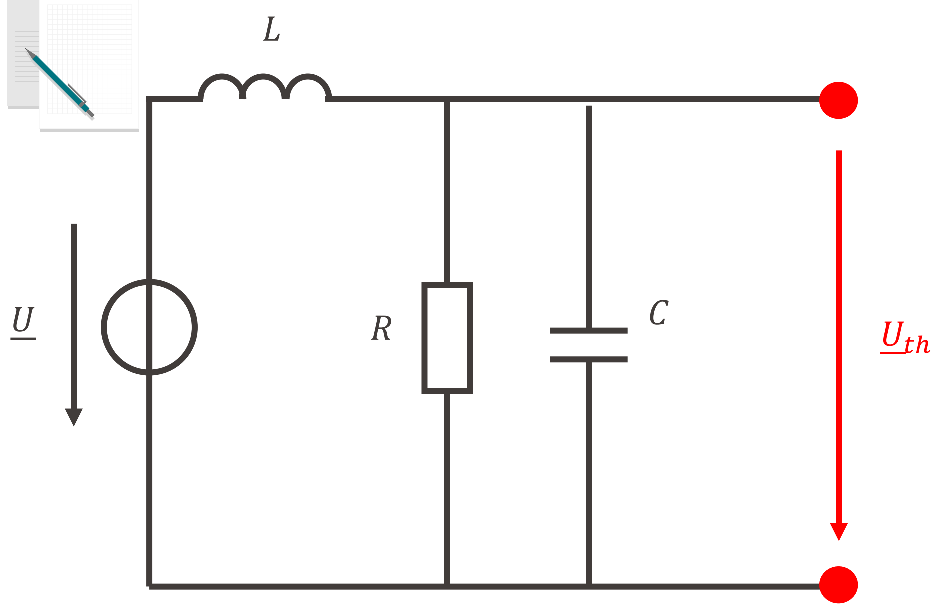


Théorème de Thévenin

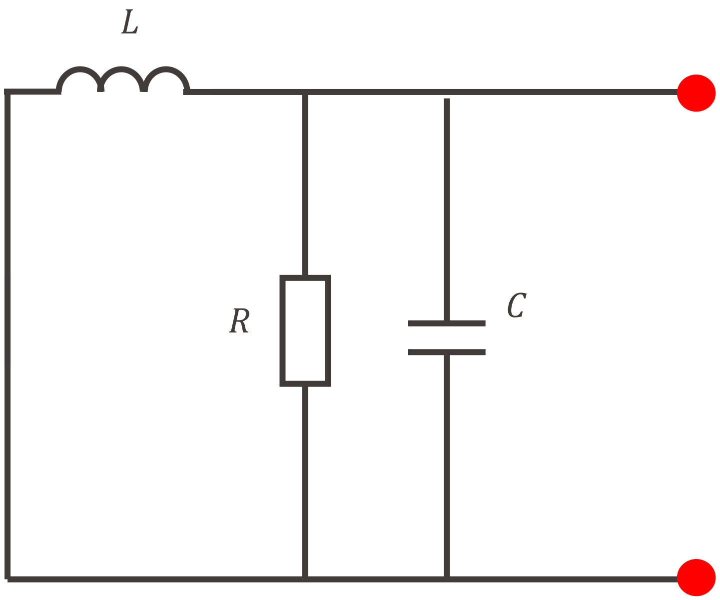
- **Objectif:** Remplacer un circuit (à une fréquence donnée) par une source de tension et une impédance en série

- **Procédure:**
  - Identifier clairement les bornes de sortie du circuit à remplacer
  - Calculer ou mesurer la **tension à vide** (tensions entre A et B **sans charge**)
  - Calculer ou mesurer l'impédance **vue par les bornes A et B** (en éteignant toutes les sources)

Théorème de Thévenin - Exemple

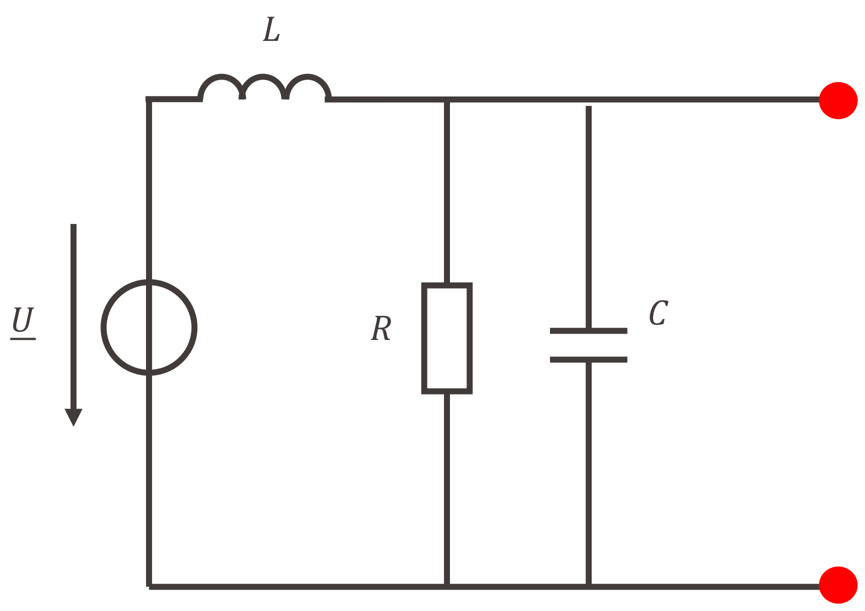


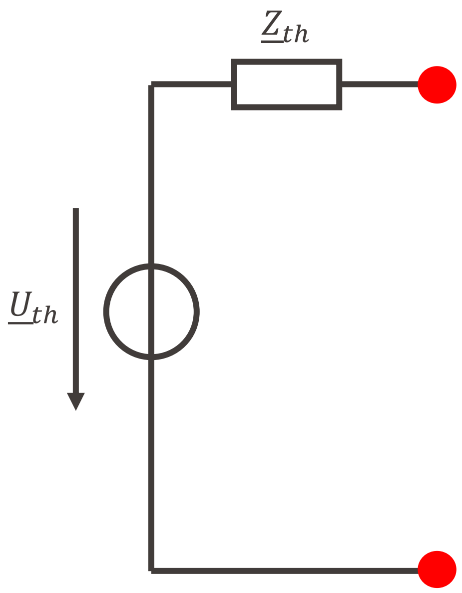
Théorème de Thévenin - Exemple



C. Lafforgue

Théorème de Thévenin - Exemple





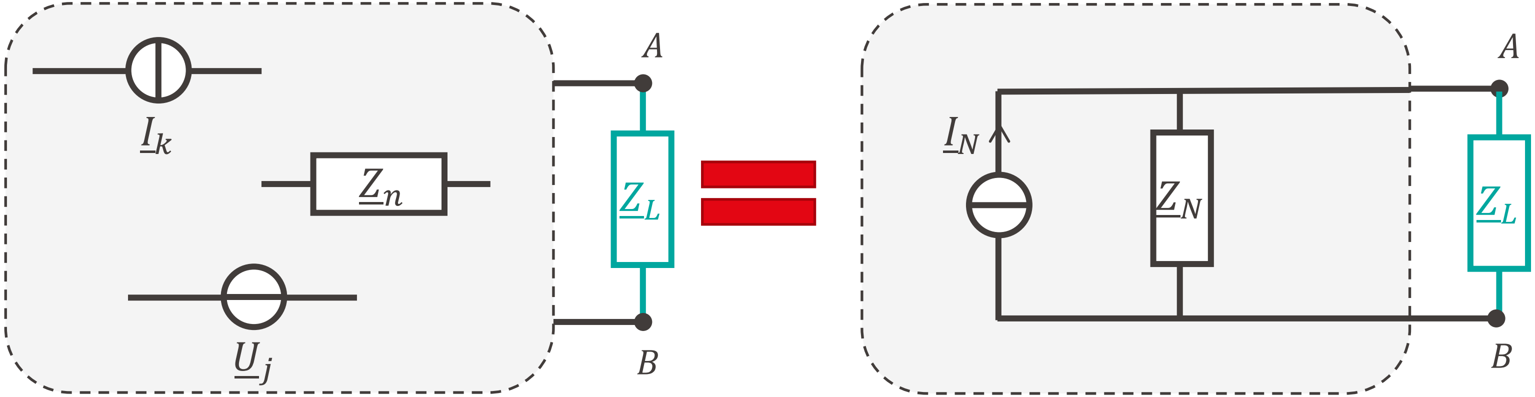
$$\underline{U}_{th} = \frac{R}{R + jL\omega - RLC\omega^2}\underline{U}$$

$$\underline{Z}_{th} = \frac{jLR\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$$

Théorème de Norton

C. Lafforgue

- **Objectif:** Remplacer un circuit (à une fréquence donnée) par une source de courant et une impédance en parallèle

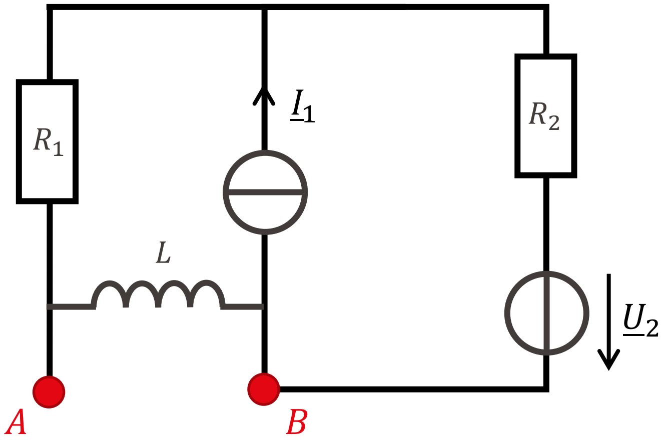


Théorème de Norton

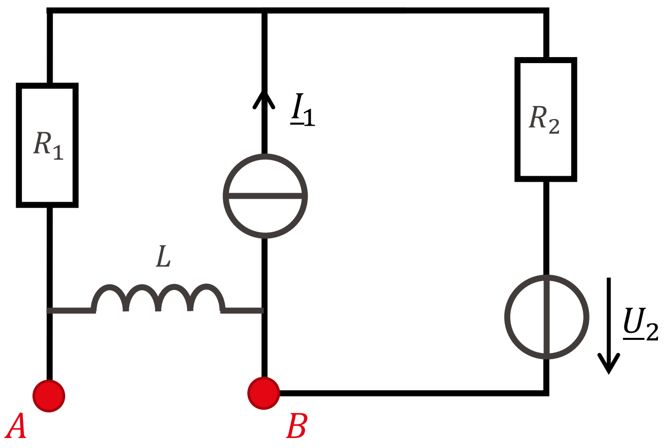
- **Objectif:** Remplacer un circuit (à une fréquence donnée) par une source de courant et une impédance en parallèle

- **Procédure:**
  - Identifier clairement les bornes de sortie du circuit à remplacer
  - Calculer ou mesurer le **courant de court-circuit** (courant dans la branche AB pour une **charge nulle**)
  - Calculer ou mesurer l'impédance **vue par les bornes A et B** (en éteignant toutes les sources)

Théorème de Norton – Exemple



Quelle est l'impédance équivalente de Norton?



$R_1 = 150\ \Omega$
$R_2 = 220\ \Omega$
$L = 5\ \text{mH}$
$f = 50\ \text{Hz}$

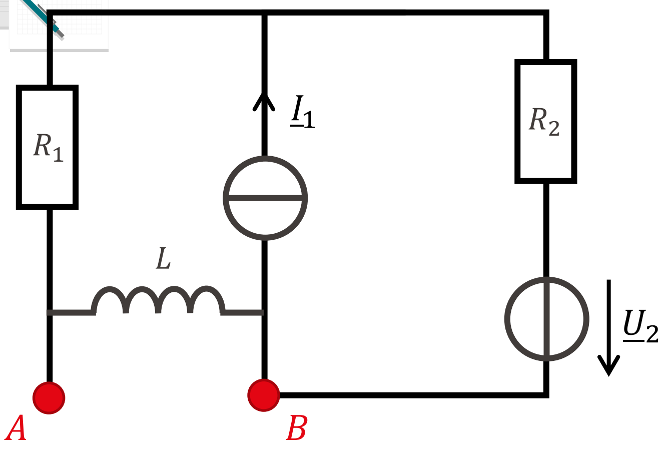
A. $\underline{Z}_N = 150 + j5 \cdot 10^{-3}$
B. $\underline{Z}_N = 150 + j250 \cdot 10^{-3}$
C. $\underline{Z}_N = 370 + j250 \cdot 10^{-3}$
D. $\underline{Z}_N = 370 + j5 \cdot 10^{-3}$
E. $\underline{Z}_N = 89{,}2 + j5 \cdot 10^{-3}$
F. $\underline{Z}_N = 89{,}2 + j1{,}57$
G. $\underline{Z}_N = 370 + j1{,}57$

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

C. Lafforgue

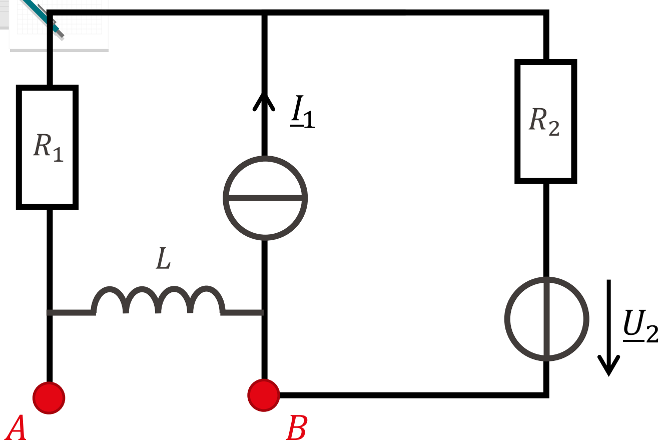
Théorème de Norton – Exemple

C. Lafforgue



Théorème de Norton – Exemple

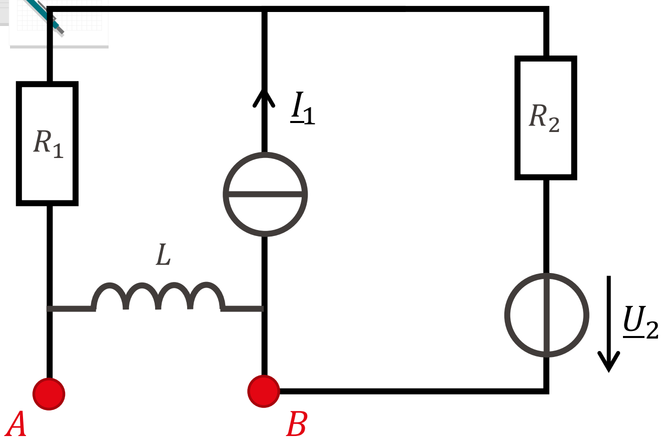
Théorème de Norton – Exemple



Théorème de Norton – Exemple

Théorème de Norton – Exemple

Théorème de Norton – Exemple



Les modèles de Thévenin et de Norton sont équivalents

A. Vrai

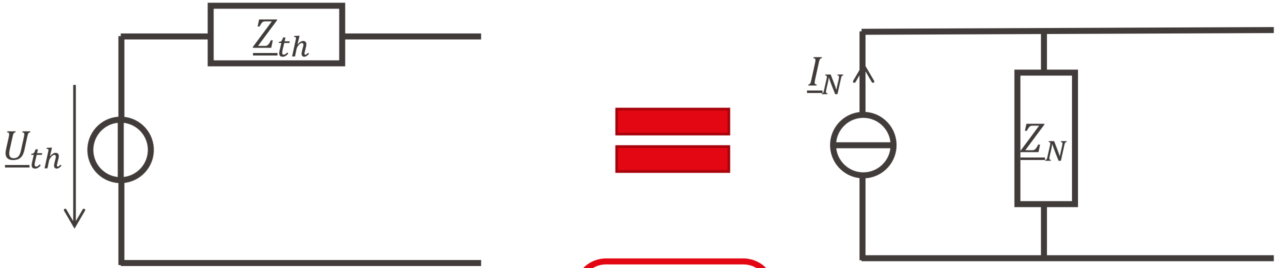
B. Faux

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Equivalence de sources

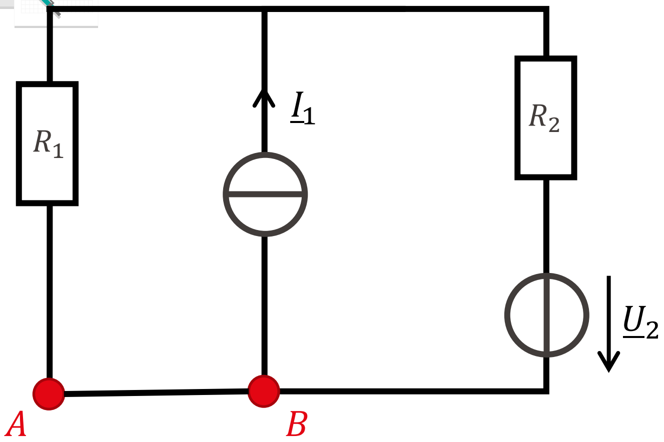
C. Lafforgue

- Il est possible de modéliser une source de tension réelle par une source de courant réelle équivalente et vice-versa
  - Utile pour modifier un schéma en fonction de ce que l'on cherche
- Conséquence: les circuits équivalents de Thévenin et de Norton sont interchangeables!



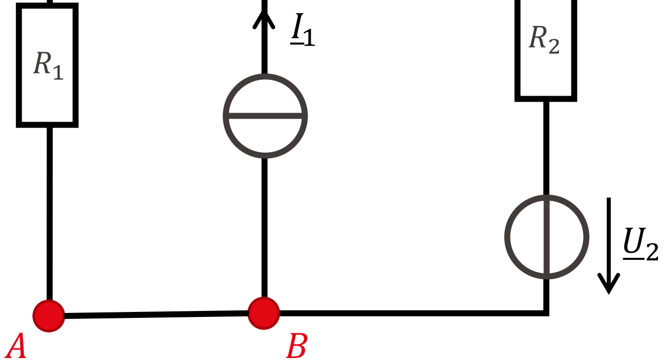
$$\boxed{\begin{gathered}\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{th}}{\underline{Z}_{th}} \\ \underline{Z}_N = \underline{Z}_{th}\end{gathered}}$$

Equivalence de sources



Retrouvons le résultat du courant de court-circuit de la source équivalente de Norton par transformation de source:

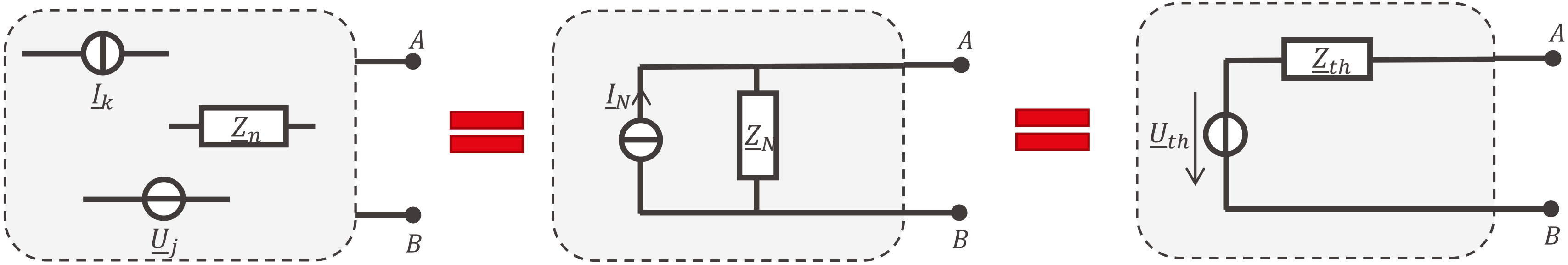
Equivalence de sources



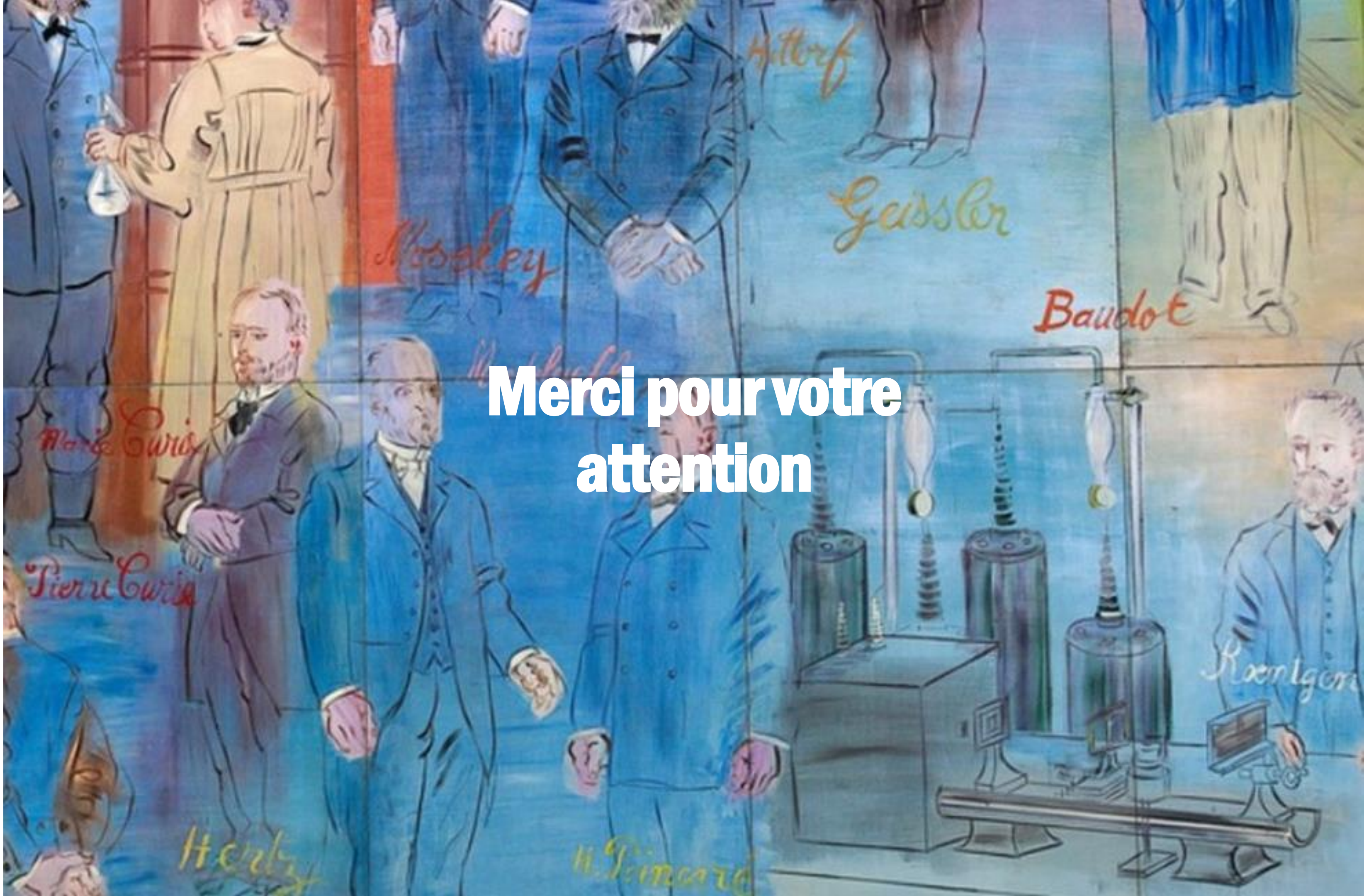
Retrouvons le résultat du courant de court-circuit de la source équivalente de Norton par transformation de source:

Points clés

- Les théorèmes de Thévenin et de Norton permettent de transformer des circuits linéaires compliqués en sources équivalentes
  - Le théorème de Thévenin donne un e source de tension en série avec une impédance
  - Le théorème de Norton donne une source de courant en parallèle avec une impédance
- Les deux modèles sont interchangeables (équivalence entre les sources de courant et de tension)



Merci pour votre attention



R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris