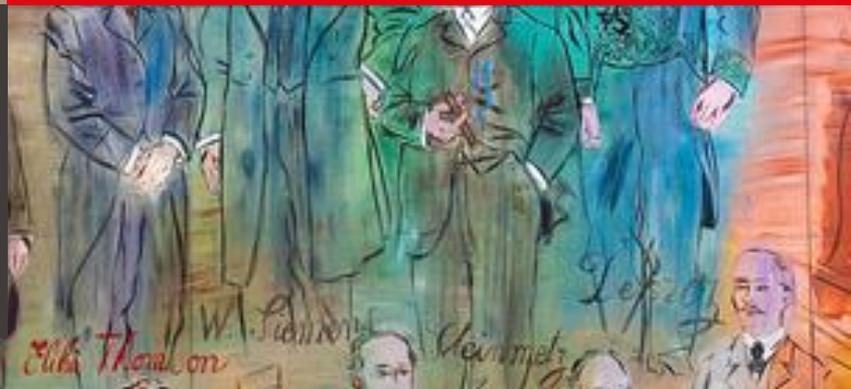




R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

Cours 8: Régime permanent sinusoïdal, impédance

EE 106 – Sciences et
technologies de
l'électricité
Automne 2024



Rappels



- En grandeur réelle:

$$s(t) = \hat{A} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

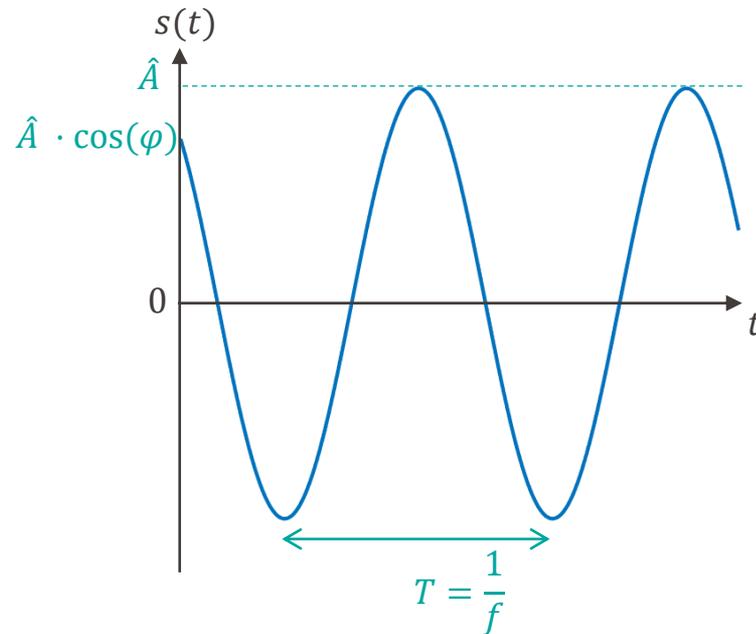
Amplitude (crête) \hat{A}

Pulsation ($= 2\pi f$) ω

Phase φ

- En grandeur complexe:

$$\underline{s}(t) = \hat{A} e^{j(\omega t + \varphi)}$$



Rappels sur les nombres complexes

- Forme algébrique

$$\underline{z} = x + jy$$

- Forme trigonométrique

$$\underline{z} = \rho(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$$

- Forme exponentielle

$$\underline{z} = \rho e^{j\theta}$$

- $\operatorname{Re}(\underline{z}) = x = \rho \cdot \cos(\theta)$; $\operatorname{Im}(\underline{z}) = y = \rho \cdot \sin(\theta)$

$$|\underline{z}| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \arg(\underline{z}) = \theta$$

- $\cos(\theta) = \frac{x}{\rho}$; $\sin(\theta) = \frac{y}{\rho}$; $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$

Voire fiche de
rappel sur Moodle

$$\square \operatorname{Re}(\underline{z}_1 + \underline{z}_2) = \operatorname{Re}(\underline{z}_1) + \operatorname{Re}(\underline{z}_2)$$

$$\square \operatorname{Im}(\underline{z}_1 + \underline{z}_2) = \operatorname{Im}(\underline{z}_1) + \operatorname{Im}(\underline{z}_2)$$

$$\square |\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2| = |\underline{z}_1| \cdot |\underline{z}_2|$$

$$\square (\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2)^* = \underline{z}_1^* \cdot \underline{z}_2^*$$

$$\square \arg(\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2)$$

$$\square \left| \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} \right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}$$

Voire fiche de
rappel sur Moodle

$$\square \arg\left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) = \arg(\underline{z}_1) - \arg(\underline{z}_2)$$

$$\square |\underline{z}^n| = |\underline{z}|^n$$

$$\square \arg(\underline{z}^n) = n \cdot \arg(\underline{z})$$

Nombres complexes – Exemples



- Rappels - Quel est le module de \underline{x} ?

$$\underline{x} = 1 + j\sqrt{3}$$



- Rappels - Quel est l'argument de \underline{x} (en degrés)?

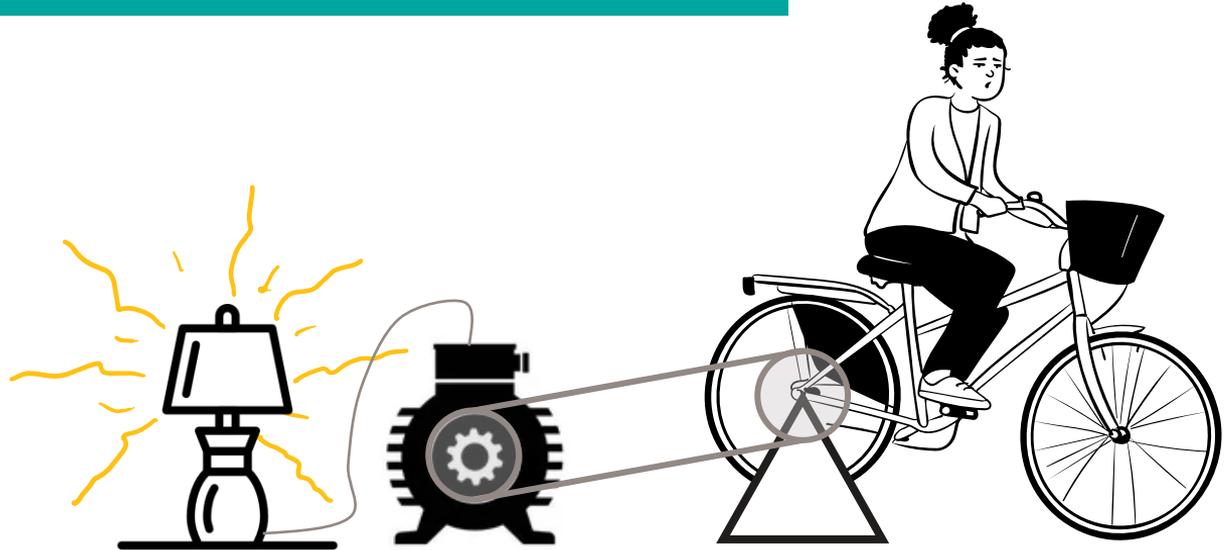
$$\underline{x} = 1 + j\sqrt{3}$$

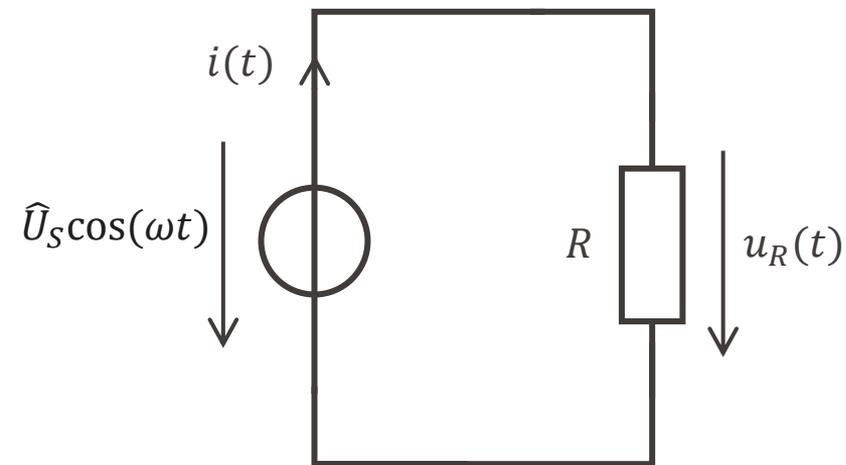


- Rappels - Quel est l'argument de \underline{x} (en degrés)?

$$\underline{x} = \frac{1}{1 + j\sqrt{3}}$$

Régime sinusoïdal permanent





Loi des mailles:

$$u_r(t) = \hat{U}_s \cos(\omega t)$$

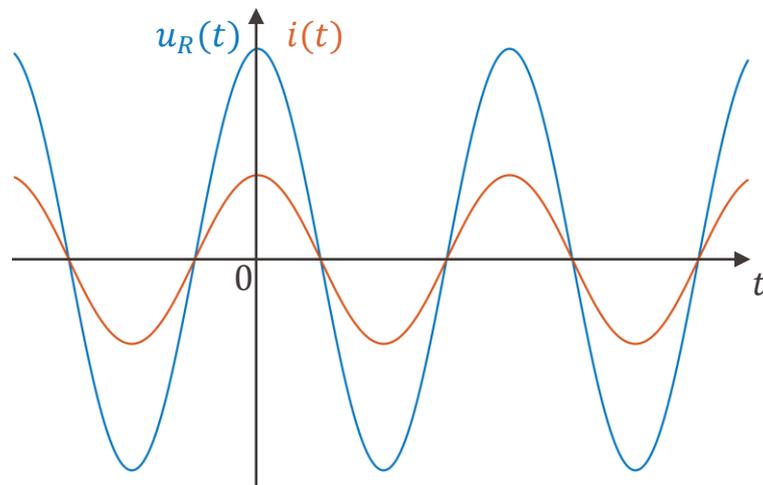
Loi d'Ohm:

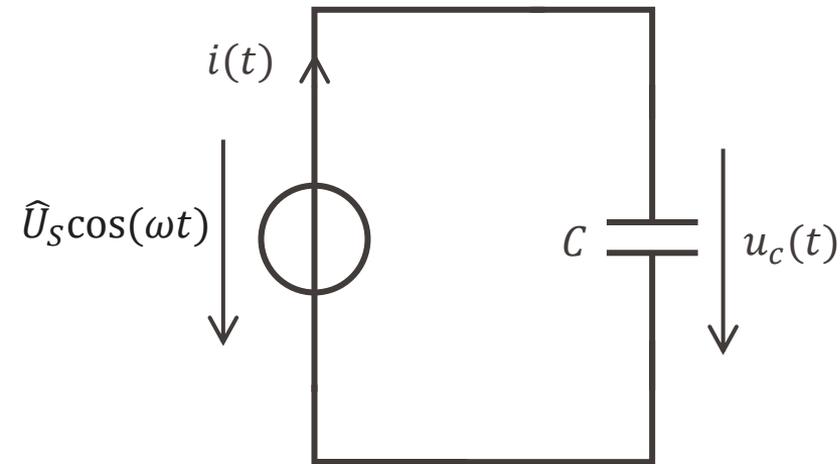
$$u_R(t) = Ri(t)$$

Donc:

$$i(t) = \frac{\hat{U}_s}{R} \cos(\omega t)$$

$\varphi = 0$ rad: courant et tension sont **en phase**





Loi des mailles:

$$u_c(t) = \hat{U}_s \cos(\omega t)$$

Condensateur:

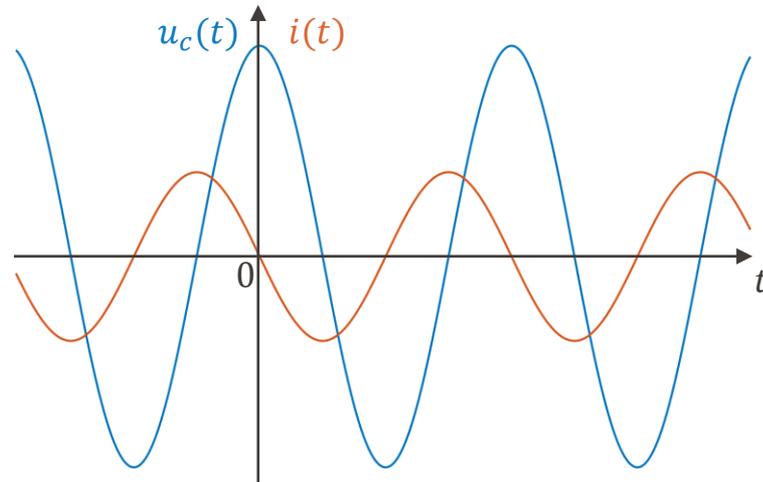
$$i(t) = C \frac{du_c}{dt}$$

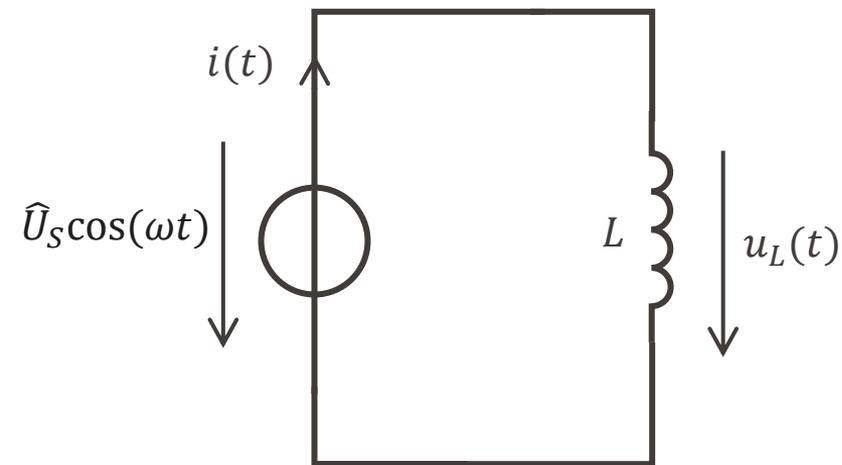
Donc:

$$i(t) = -C\omega \hat{U}_s \sin(\omega t)$$

$$i(t) = C\omega \hat{U}_s \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad: le courant est en **avance de phase** sur la tension





Loi des mailles:

$$u_L(t) = \hat{U}_s \cos(\omega t)$$

Inductance:

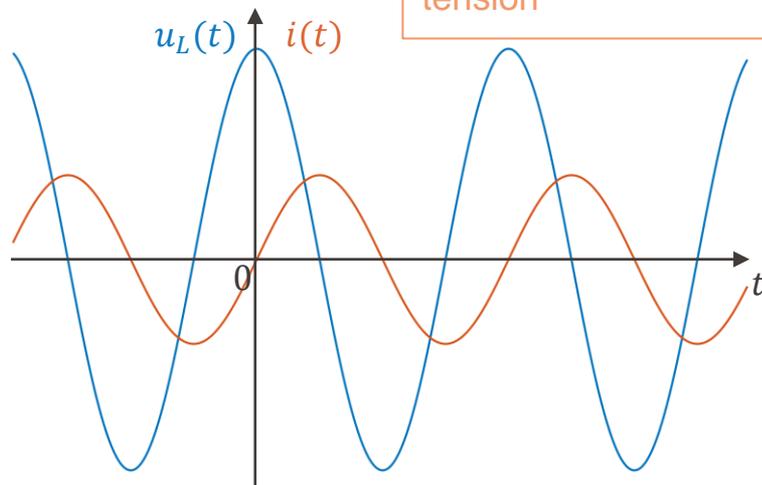
$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

Donc:

$$i(t) = \frac{\hat{U}_s}{L\omega} \sin(\omega t)$$

$$i(t) = \frac{\hat{U}_s}{L\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad: le courant est en **retard de phase** sur la tension



- Exemple:

- $u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi)$

- On définit une tension complexe associée:

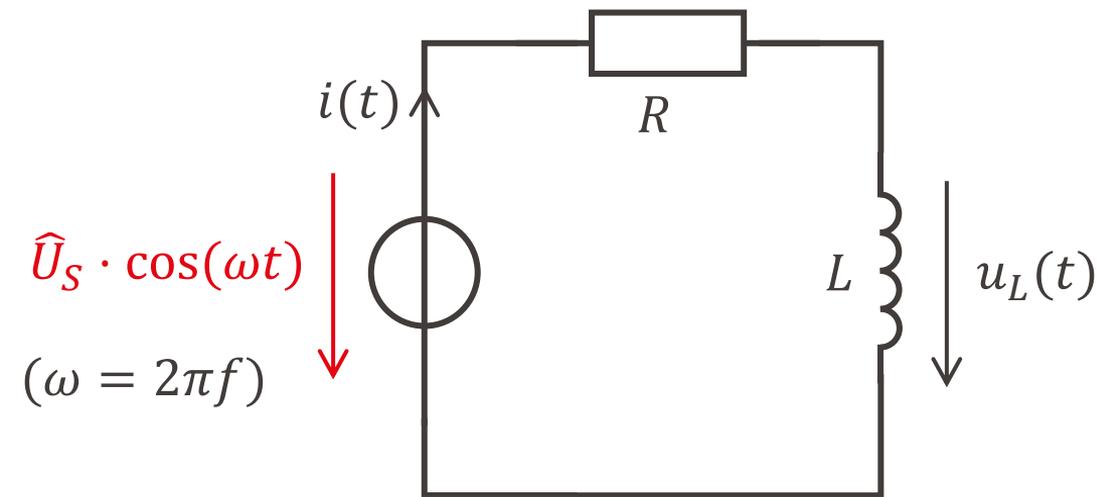
$$\underline{u}(t) = \hat{U} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- On a alors:

$$u(t) = \text{Re}[\underline{u}(t)]$$

- On peut alors étudier les circuits avec les grandeurs sous forme complexe, et on prend la partie réelle du résultat.

- On modélise un circuit dépendant du temps t :

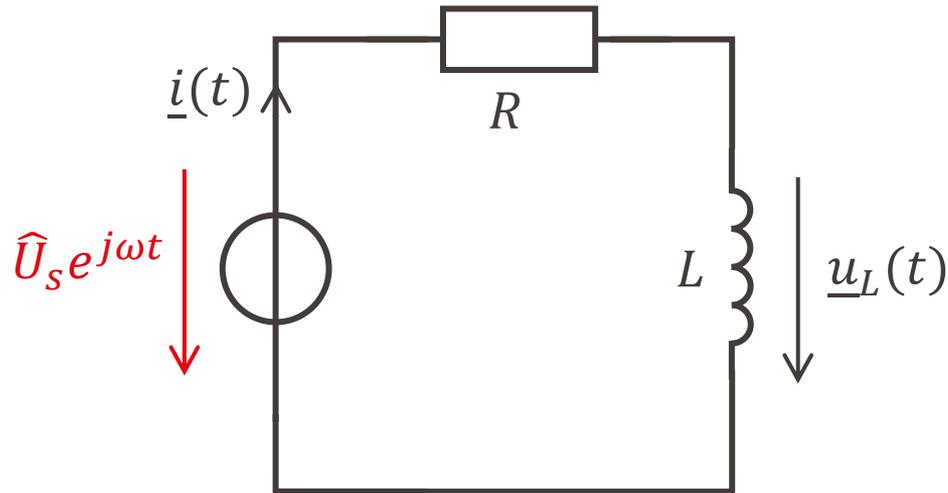


La résolution peut être compliquée.

La solution dépend de la fréquence.

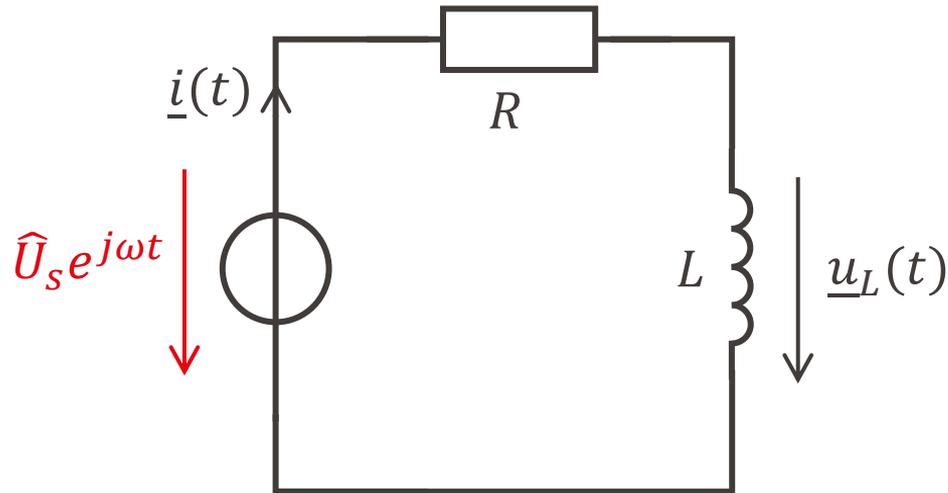
$$\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}\hat{U}_S \cdot \cos(\omega t)$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



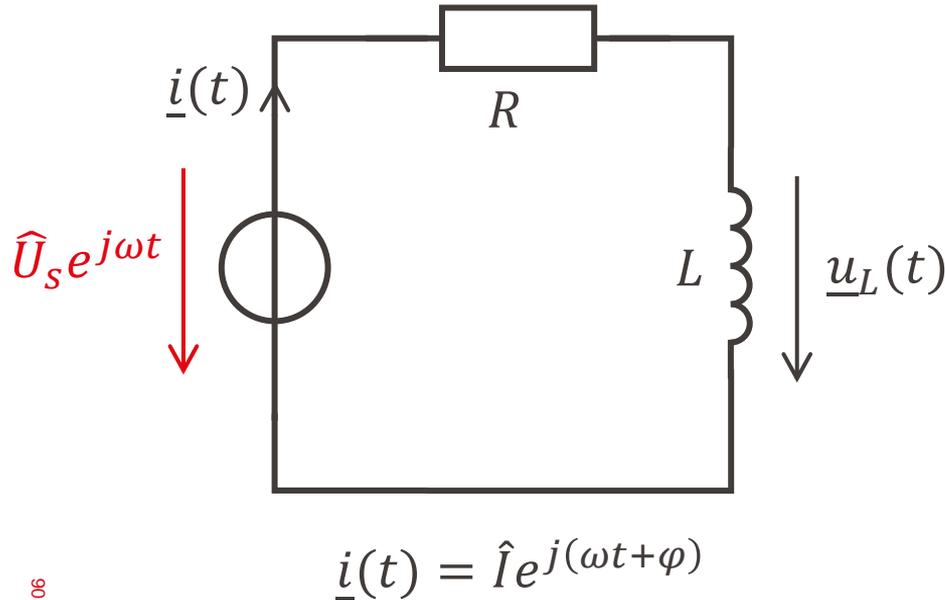
$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



Loi de mailles:

$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R \underline{i}(t) + \underline{u}_L(t)$$

Inductance:

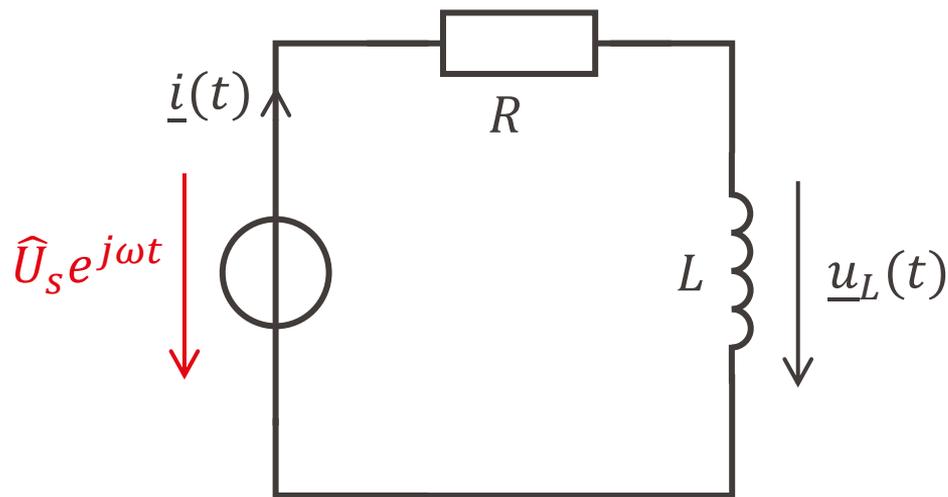
$$\underline{u}_L(t) = L \frac{di}{dt}(t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{u}_L(t) &= L(j\omega \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}) \\ \Rightarrow \underline{u}_L(t) &= jL\omega \underline{i}(t) \end{aligned}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \hat{U}_s e^{j\omega t} &= R \underline{i}(t) + jL\omega \underline{i}(t) \\ \Rightarrow \hat{U}_s e^{j\omega t} &= (R + jL\omega) \underline{i}(t) \end{aligned}$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \hat{U}_s e^{j\omega t} &= R \underline{i}(t) + jL\omega \underline{i}(t) \\ \Rightarrow \hat{U}_s e^{j\omega t} &= (R + jL\omega) \underline{i}(t) \end{aligned}$$

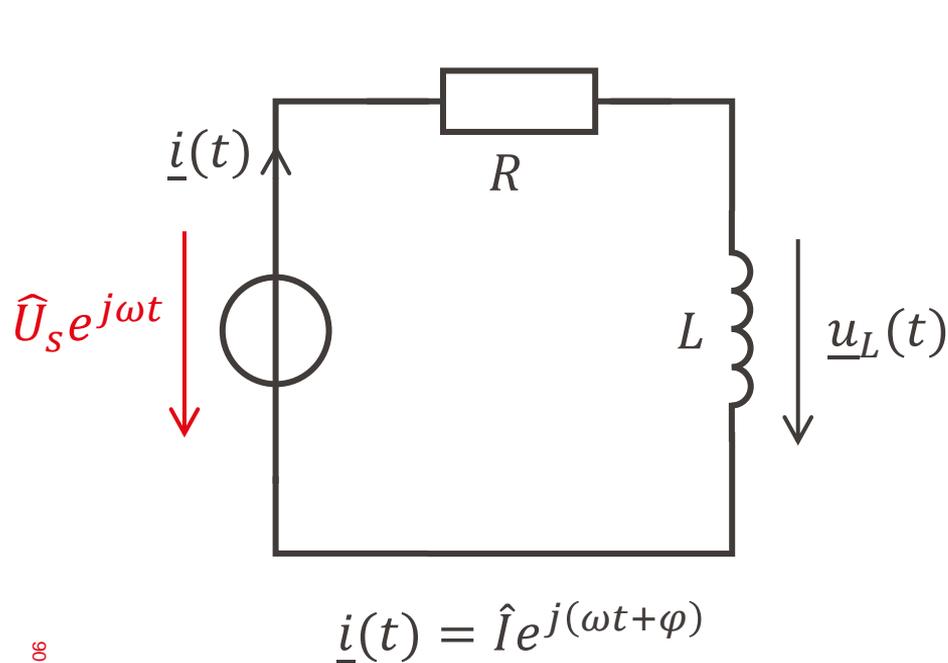
$$\Rightarrow \underline{i}(t) = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} = \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} = \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}$$

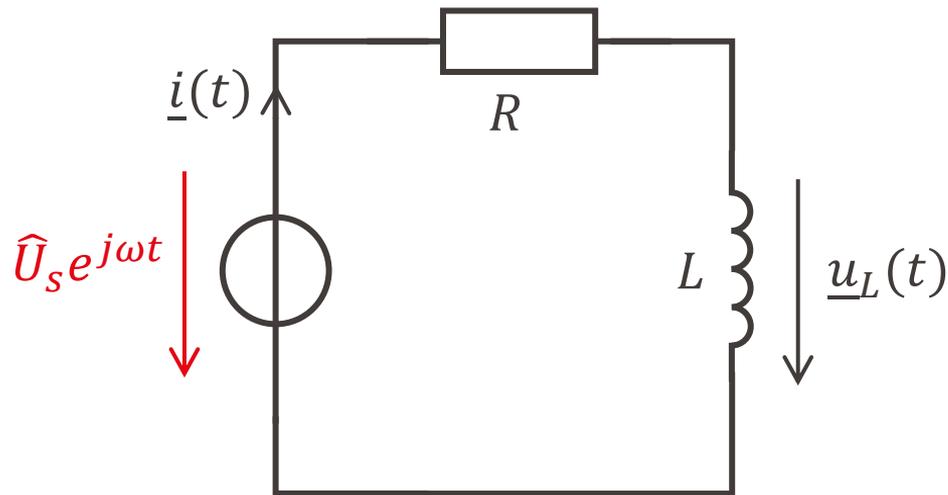
$$\hat{I} = \left| \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega} \right| = \frac{\hat{U}_s}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_s}{R \sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}} = \frac{\hat{U}_s}{R \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}\right) = -\arg(R + jL\omega)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\arctan(\omega\tau)$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



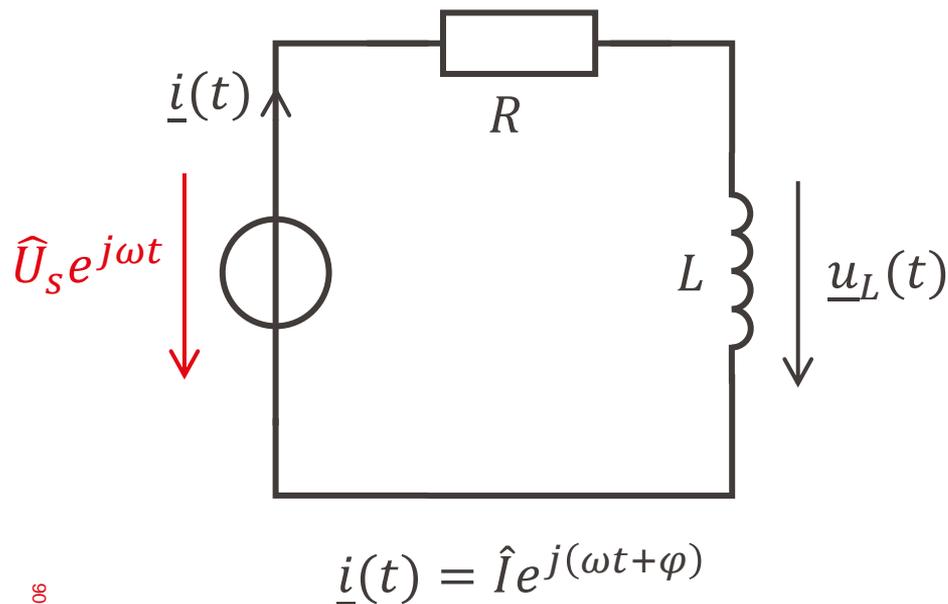
$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\Rightarrow i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_s}{R \sqrt{1 + \left(\frac{L}{R} \omega\right)^2}} = \frac{\hat{U}_s}{R \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\arctan(\omega\tau)$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



On peut trouver la solution sans résoudre d'équation différentielle!

- 
- On voit qu'en régime permanent sinusoïdal il y a deux grandeurs à déterminer:
 - L'amplitude \hat{X}
 - La phase φ

 - On définit alors les **phaseurs**:
 - $\underline{\hat{X}} = \hat{X}e^{j\varphi}$ (phaseur crête)

 - $\underline{X} = Xe^{j\varphi}$ (phaseur efficace)

*Charles Proteus Steinmetz
1865-1923
Ingénieur et mathématicien
américain*





Points clés

- Les signaux en régime permanent sinusoïdal sont déterminés par:
 - L'amplitude \hat{X} (ou la valeur efficace, $X = \hat{X}/\sqrt{2}$)
 - La fréquence f (ou la pulsation, $\omega = 2\pi f$)
 - La phase φ
- Un signal sinusoïdal peut être représenté sous forme de nombre complexe
 - On utilise les phaseurs

Phaseur instantané:

$$\underline{x}(t) = \hat{X}e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Phaseur crête:

$$\underline{\hat{X}} = \hat{X}e^{j\varphi}$$

Phaseur efficace:

$$\underline{X} = Xe^{j\varphi}$$



Lois de Kirchhoff en régime sinusoïdal



-
- Les lois de Kirchhoff fonctionnent exactement de la même manière en formalisme complexes

- La loi des nœuds exprime mathématiquement la conservation de la matière
 - Ici, conservation de la matière \Leftrightarrow conservation du courant

La somme des courants passants par un nœud est nulle.

N branches

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0$$

Courant dans la
branche k

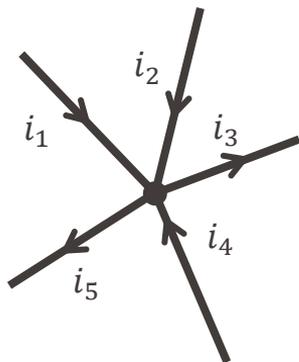
La somme des courants passants par un nœud est nulle.

N branches

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0$$

Courant dans la
branche k

- Attention au signe des courants
 - Courant qui va « vers » le nœud s'ajoute (+)
 - Courant qui va « hors » du nœud se soustrait (-)

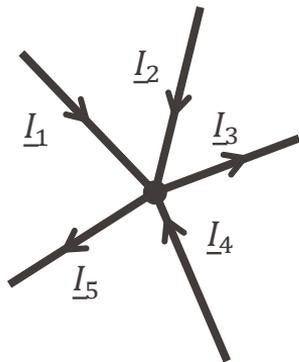


$$i_1 + i_2 + i_4 - i_3 - i_5 = 0$$

« Vers » le nœud « Hors » du nœud

$$i_1 + i_2 + i_4 = i_3 + i_5$$

Courant entrant Courant sortant



$$\underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_4} - \underline{I_3} - \underline{I_5} = 0$$

« Vers » le nœud « Hors » du nœud

$$\underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_4} = \underline{I_3} + \underline{I_5}$$

Courant entrant Courant sortant

- La loi des mailles exprime mathématiquement la conservation de l'énergie
 - Ici, conservation de l'énergie \Leftrightarrow Pas de différence de potentiel en un point unique

La somme des tensions le long d'une maille est nulle.

N dipôles dans la maille

$$\sum_{k=1}^N \underline{U}_k = 0$$

Tension aux bornes du dipôle k

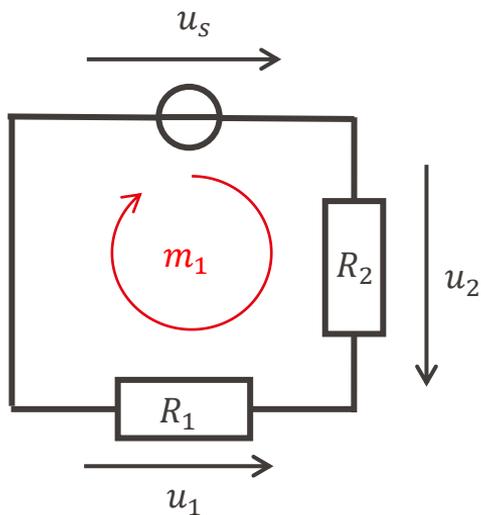
La somme des tensions le long d'une maille est nulle.

N dipôles dans la maille

$$\sum_{k=1}^N \underline{U}_k = 0$$

Tension aux bornes du dipôle k

- Attention au signe des tensions
 - Il faut définir un sens de lecture de la maille
 - Tension dans le sens de lecture s'ajoute (+)
 - Tension dans le sens opposé de la lecture se soustrait (-)



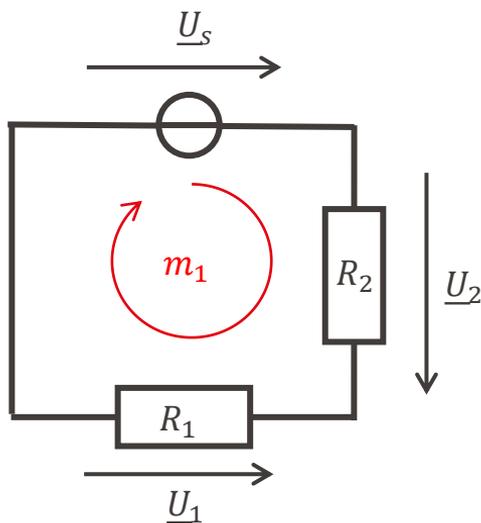
Loi des mailles dans m_1 :

$$u_s + u_2 - u_1 = 0$$

Dans le
sens de m_1

Dans le sens
opposé à m_1

Astuce: fonctionnement similaire à la relation de Chasles. On part d'un point et on suit les « vecteurs » de tensions jusqu'à revenir au point de départ



Loi des mailles dans m_1 :

$$\underline{U}_s + \underline{U}_2 - \underline{U}_1 = 0$$

Dans le
sens de m_1

Dans le sens
opposé à m_1

Astuce: fonctionnement similaire à la relation de Chasles. On part d'un point et on suit les « vecteurs » de tensions jusqu'à revenir au point de départ

- Les lois de Kirchhoff s'appliquent de la même manière sur les phaseurs complexes
 - Loi des nœuds
 - Loi des mailles

N branches

$$\sum_{k=1}^N \underline{I}_k = 0$$

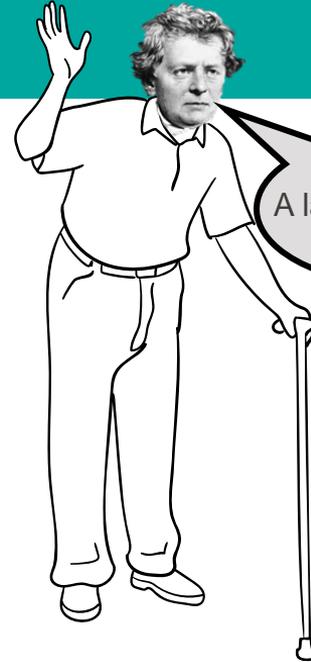
Courant dans la
branche k

N dipôles dans la
maille

$$\sum_{k=1}^N \underline{U}_k = 0$$

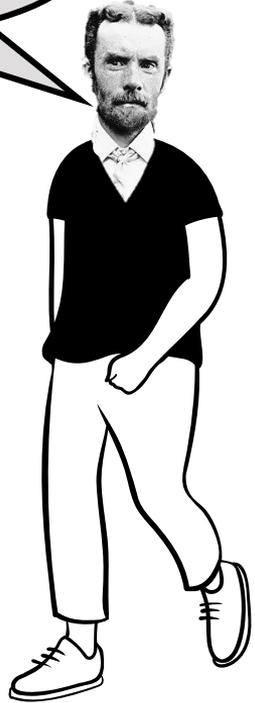
Tension aux bornes
du dipôle k

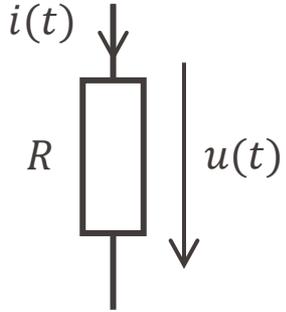
Loi d'Ohm en régime sinusoïdal: Impédance

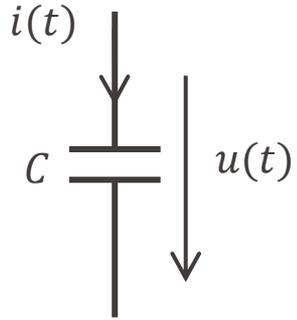


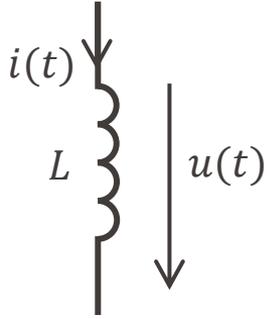
A la bonne heure!

Georg, ta formule marche aussi
pour \underline{m} et $\text{---}||\text{---}$!!!









- On remarque que dans tous les cas, tension et courant **sous leur forme de phaseur** sont proportionnels

- En formalisme complexe, on obtient aussi une forme de loi d'Ohm!
- Cette loi s'écrit $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$

- \underline{Z} est appelée **impédance**

- Pour une résistance:

$$\underline{Z} = R$$

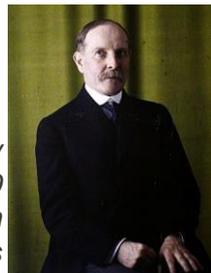
- Pour un condensateur:

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$$

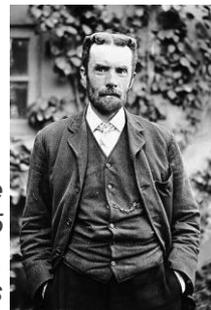
- Pour une inductance:

$$\underline{Z} = jL\omega$$

Arthur Edwin Kennelly
1861-1939
Ingénieur, mathématicien
irlandais



Oliver Heaviside
1850-1925
Ingénieur, physicien,
mathématicien anglais



- Propriétés
 - L'impédance \underline{Z} **est un nombre complexe**
 - Elle depend de la pulsation (et donc de la fréquence)
 - Elle est homogène à des ohms (Ω)
- Exemples
 - Un condensateur de capacité $C = 20 \mu\text{F}$ à une pulsation $\omega = 250 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
 - Une inductance $L = 30 \mu\text{H}$ à une pulsation $\omega = 250 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

- Grandeurs associées:

- On peut aussi écrire

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

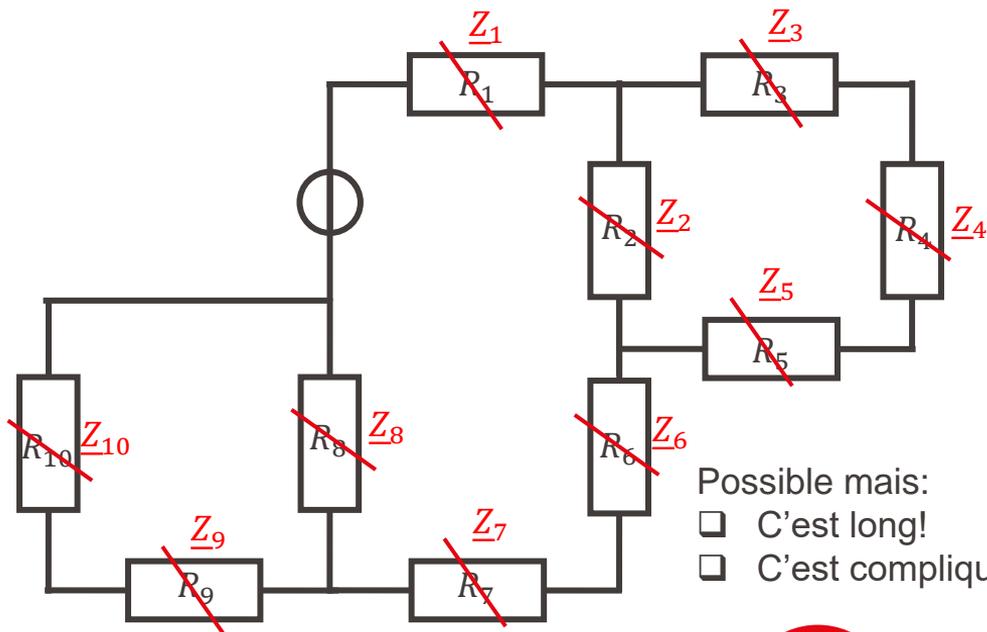
- \underline{Y} est appelée **admittance**
- L'impédance \underline{Z} peut avoir une partie réelle et/ou une partie imaginaire

$$\underline{Z} = R + jX$$

- La partie réelle R est appelée **résistance**
- La partie imaginaire X est appelée **réactance**

Composant	Loi	\underline{Z}	$ \underline{Z} $	$\arg(\underline{Z})$
Résistance  R	$u(t) = Ri(t)$	R	R	0
Condensateur  C	$i(t) = C \frac{du}{dt}(t)$	$\frac{1}{jC\omega}$	$\frac{1}{C\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$
Inductance  L	$u(t) = L \frac{di}{dt}(t)$	$jL\omega$	$L\omega$	$\frac{\pi}{2}$

Agencements de résistances



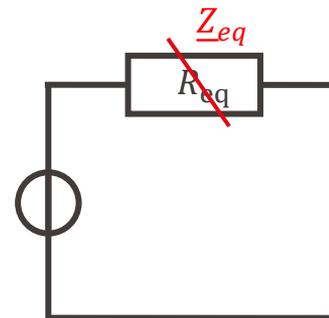
Possible mais:

- C'est long!
- C'est compliqué!



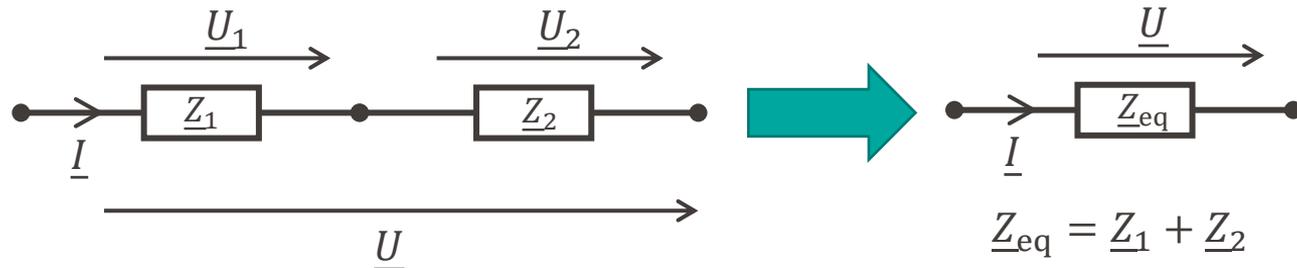
Circuit équivalent:

Beaucoup plus facile!

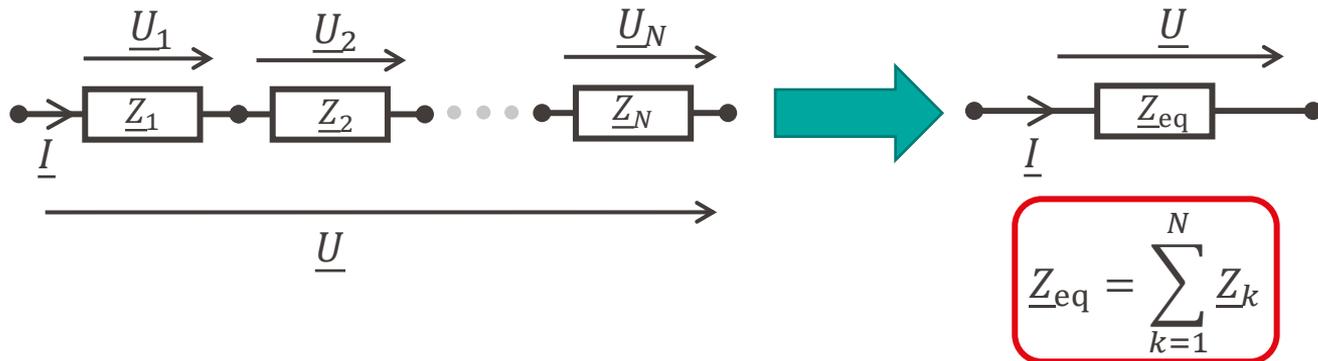


Agencement en série

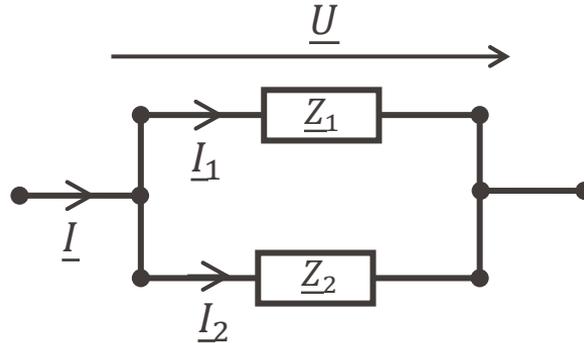
- Deux résistances en série s'additionnent:



- Plus généralement:



- Deux résistances en parallèle: les conductances s'ajoutent



$$\underline{U} = \underline{Z}_{\text{eq}} \underline{I}$$

$$\underline{I} = \underline{Y}_{\text{eq}} \underline{U}$$

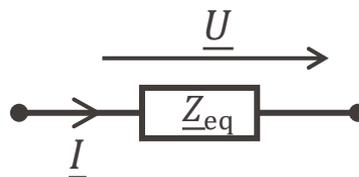
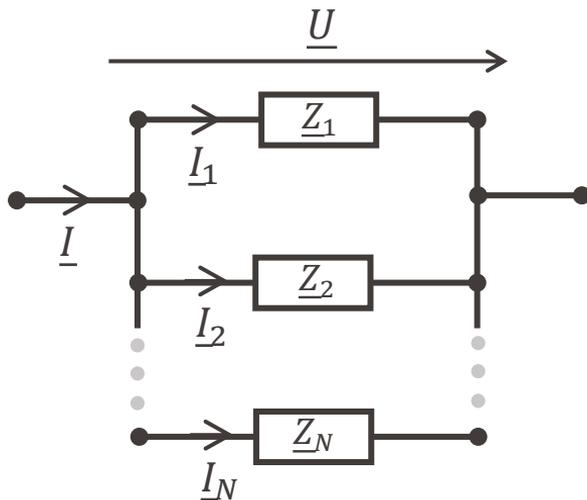
$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

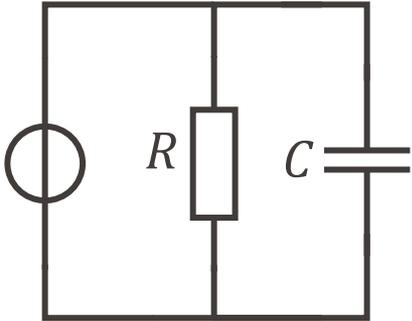
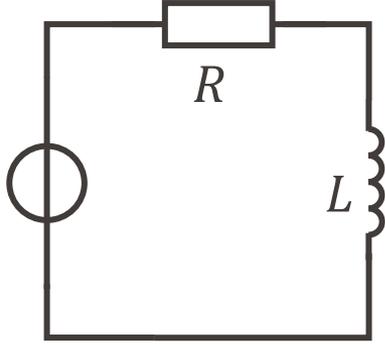
Agencement en parallèle

- Plus généralement:



$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\underline{Z}_k} \quad / \quad \underline{Y}_{eq} = \sum_{k=1}^N \underline{Y}_k$$

Exemples



- La loi d'Ohm s'applique sur les phaseurs complexes
 - La résistance devient l'impédance
 - L'impédance est un nombre complexe et est une fonction de la fréquence

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

$$|\underline{Z}| = \frac{U}{I}$$

$$\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I})$$

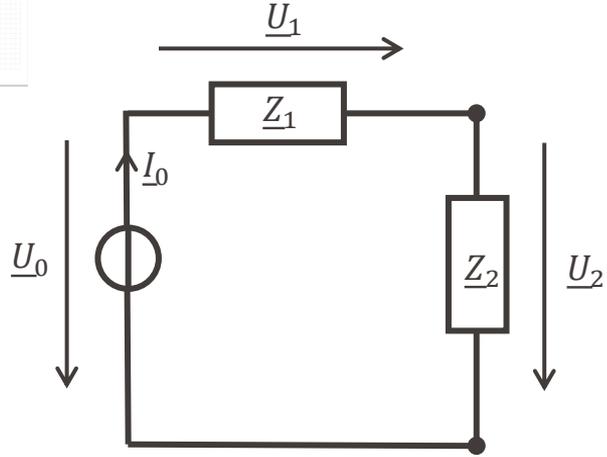
- Les agencements d'impédances suivent les mêmes règles que les résistances

En série:

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^N \underline{Z}_k$$

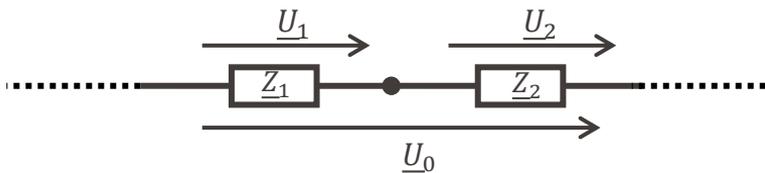
En parallèle:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\underline{Z}_k} \quad / \quad \underline{Y}_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^N \underline{Y}_k$$



- Comme les lois de Kirchhoff et d'Ohm marchent avec les phaseurs:
 - La formule du diviseur de tension est valide
 - La formule du diviseur de courant est valide

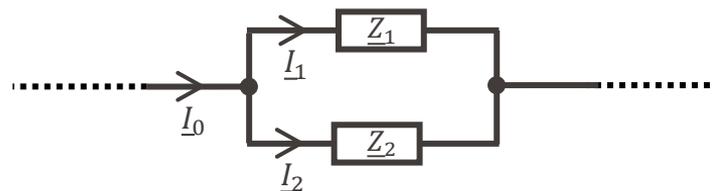
En série:



$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_0$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_0$$

En parallèle:



$$I_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} I_0$$

$$I_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} I_0$$

R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris



Merci pour votre
attention

Edis Thomson

W. Siemens

Heinrich

Leprieux

Edis