EPFL

R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

Cours 3: Puissance, agencements, diviseurs de tension et de courant

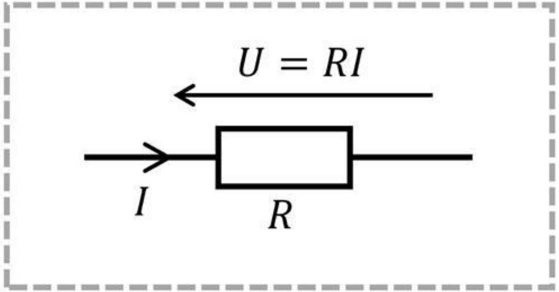
EE 106 – Sciences et technologies de l'électricité

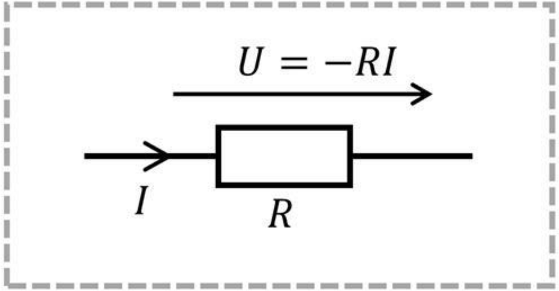
Automne 2024

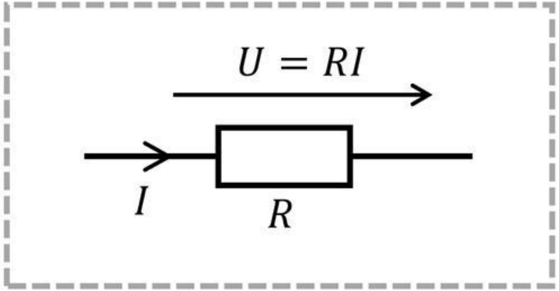
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

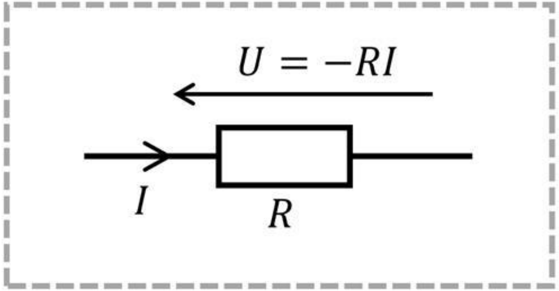
Dr. Christian Lafforgue – christian.lafforgue@epfl.ch

- Rappels –
Quelles sont les bonnes réponses?









Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels –
Quelle est l'unite de la résistivité ρ?

A. $\Omega \cdot \mathrm{m}^{-1}$

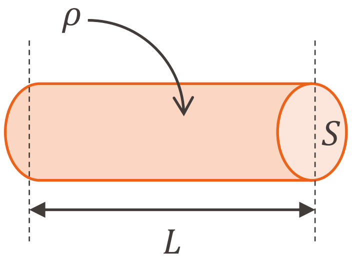
B. $\Omega \cdot \mathrm{m}^{-2}$

C. $\Omega \cdot \mathrm{m}$

D. $\Omega \cdot \mathrm{m}^{3}$

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels –
Quelles expressions sont correctes?



A. $R = \frac{\rho L}{S}$

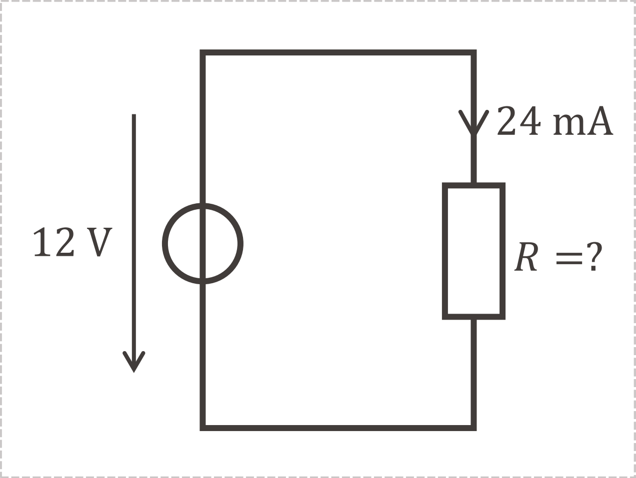
B. $R = \frac{\rho S}{L}$

C. $G = \frac{\rho S}{L}$

D. $G = \frac{S}{\rho L}$

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels –
Que vaut la resistance R (en Ω)?



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

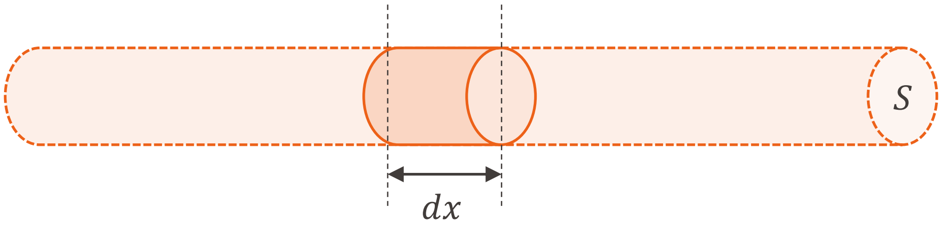
C. Lafforgue

Approximation des régimes quasi-stationnaires

C. Lafforgue

Approximation du régime quasi-stationnaire

- Courant électrique: $I = \frac{dq}{dt}$



- Quantité de charges dans le volume: $dq = neS \cdot dx$

Concentration d'électrons libres (m^{-3})

- Donc: $I = neS \cdot \frac{dx}{dt} = neS \cdot v_d$

- Vitesse de dérive: $v_d = \frac{I}{neS}$

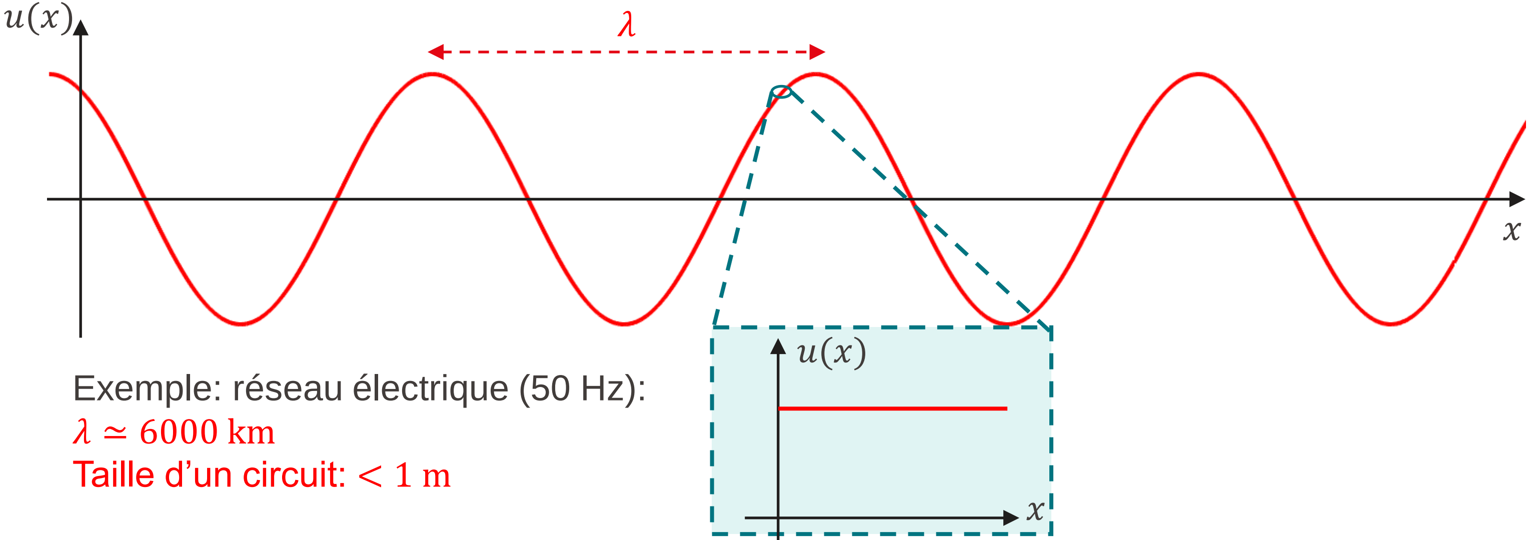
Exemple: câble en cuivre:

$$\begin{cases} n = 8.47 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3} \\ S = 10\ \mathrm{mm}^2 \\ I = 1\ \mathrm{A} \end{cases} \Rightarrow v_d = 7.3\ \mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

Approximation du régime quasi-stationnaire

- En réalité, courant et tension se propagent sous forme d'ondes

- Les ondes ont une période spatiale: la longueur d'onde

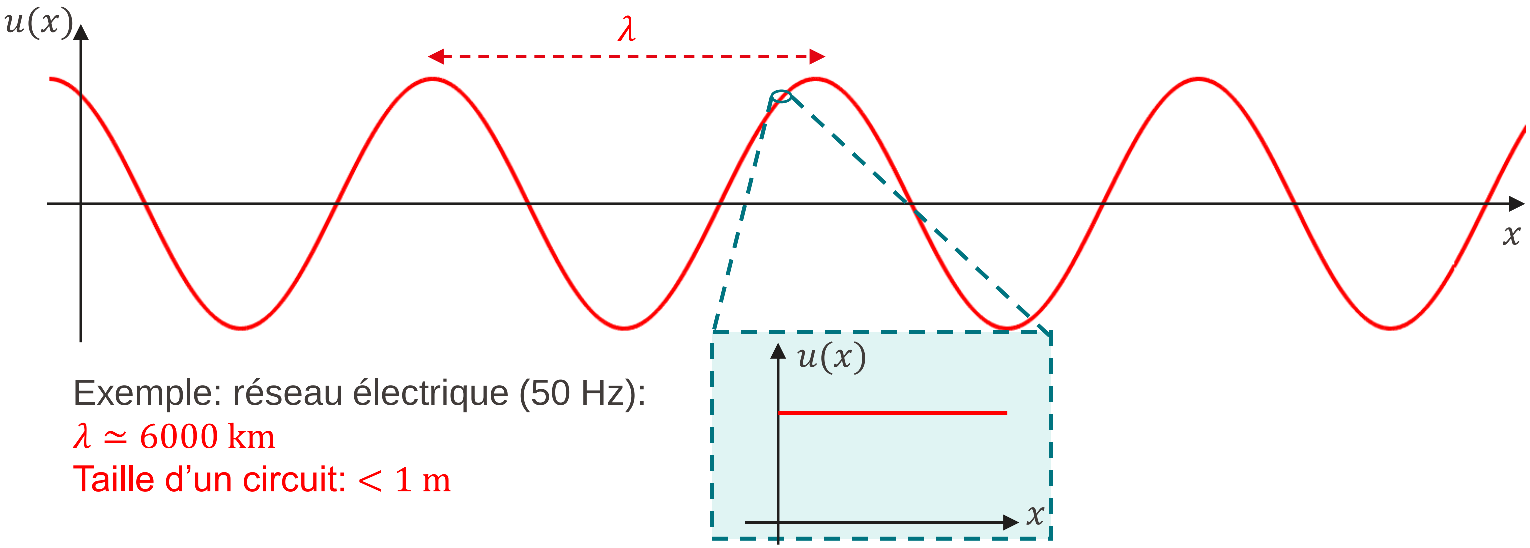


Exemple: réseau électrique (50 Hz):
$\lambda \simeq 6000\ \mathrm{km}$
Taille d'un circuit: $< 1\ \mathrm{m}$

C. Lafforgue

Approximation du régime quasi-stationnaire

- Les ondes ont une période spatiale: la longueur d'onde



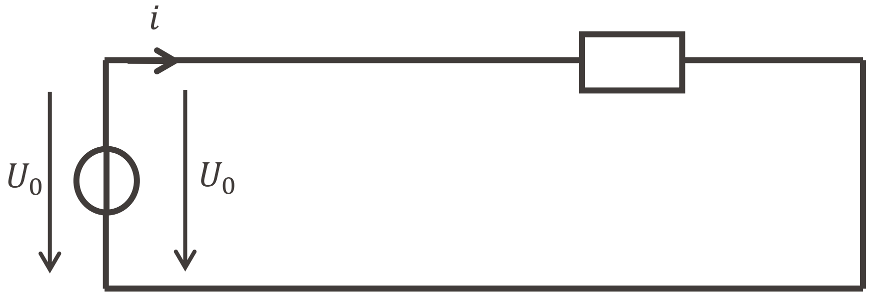
Exemple: réseau électrique (50 Hz):
$\lambda \simeq 6000 \text{ km}$
Taille d'un circuit: $< 1 \text{ m}$

Dans ce cours, on considère les grandeurs électriques constantes dans l'espace le long des circuits (variation instantanée entre deux points distants).

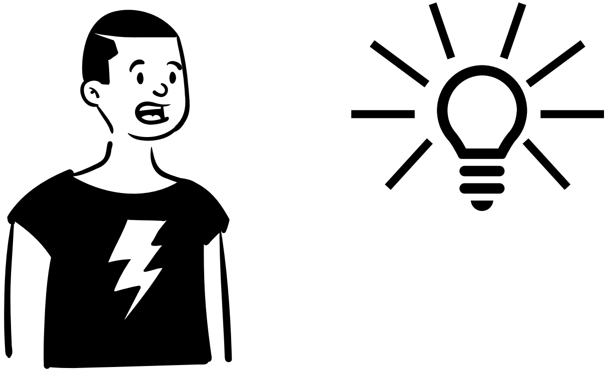
Il s'agit de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

Approximation du régime quasi-stationnaire

Le courant et la tension restent les mêmes tout le long du fil:



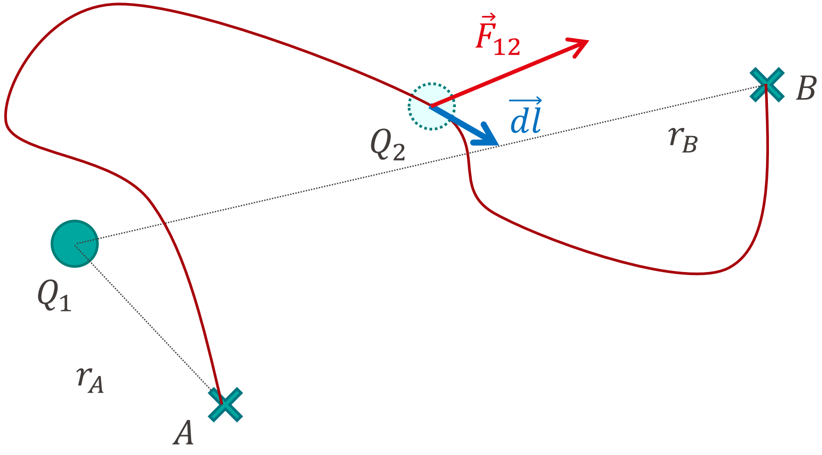
Puissance électrique



Puissance électrique

C. Lafforgue

- Rappel: travail mécanique



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot \overrightarrow{dl} = qU$$

Le travail fourni correspond à la variation d'énergie électrique $\Delta\mathcal{E}$.
En régime statique:

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta q \cdot U = I\Delta t \cdot U$$

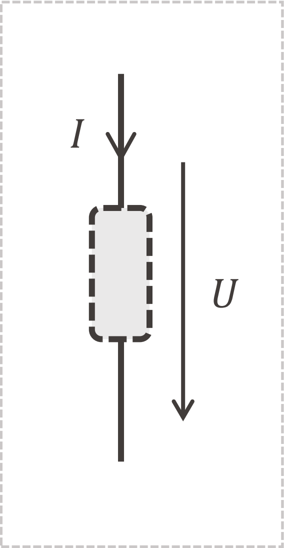
$$P = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t}$$

Unité: watt (W)

$$\Rightarrow P = UI$$

La puissance électrique est le produit de la tension et du courant:
$$\boldsymbol{P = UI}$$

Puissance électrique

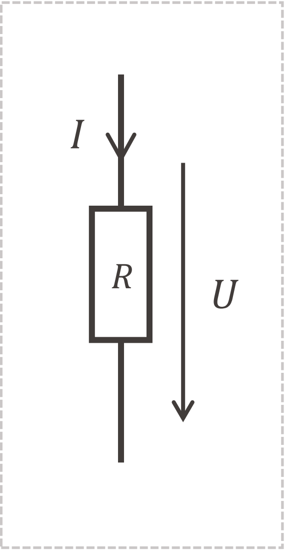


En suivant la convention des sens précédemment définie:

- Si $P = UI > 0$, la puissance est **absorbée** par l'élément
- Si $P = UI < 0$, la puissance est **fournie** par l'élément

Puissance électrique

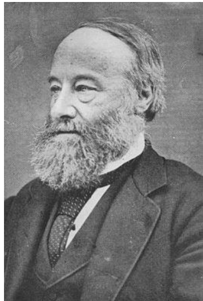
C. Lafforgue



Cas de la résistance:

- $U = RI \Rightarrow P = RI^2$
- La puissance est positive: la résistance consomme l’énergie électrique
- Une résistance convertie l’énergie électrique en énergie thermique: c’est **l’effet Joule**

$$\boxed{P = RI^2 = \frac{U^2}{R}}$$

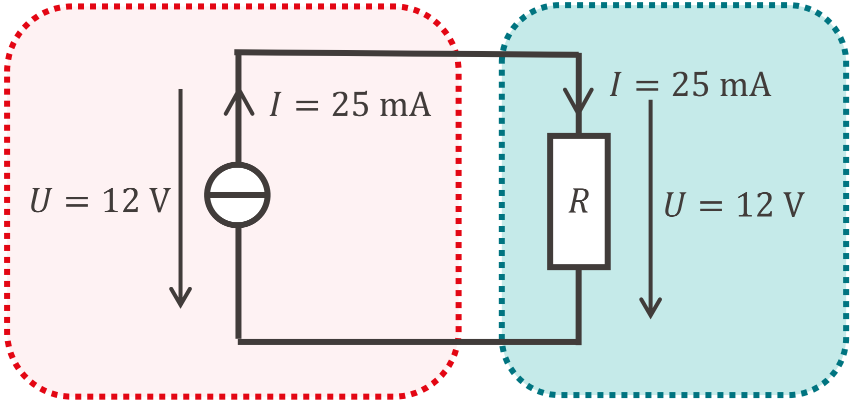


James Prescott Joule
1818-1889
Physicien anglais

Puissance électrique

C. Lafforgue

- Exemple 1:



$P_s = U(-I)$
$= 12 \times (-25 \cdot 10^{-3})$
$= -0.3$ W

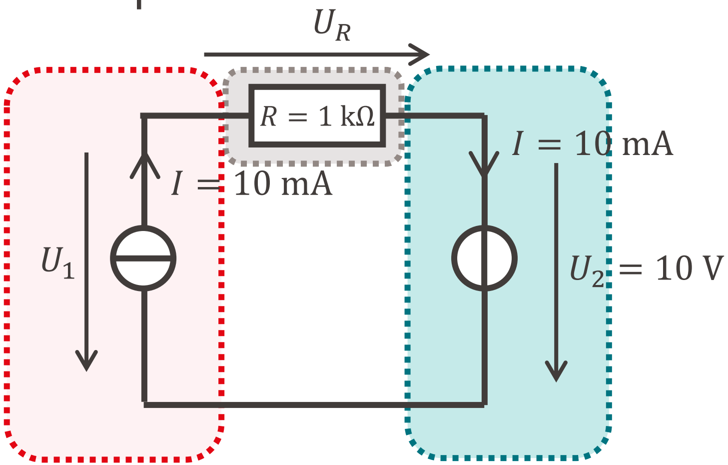
$P_R = UI$
$= 12 \times 25 \cdot 10^{-3}$
$= 0.3$ W

La résistance consomme ($P_R > 0$) l'énergie fournie ($P_s < 0$) par le générateur de courant

Puissance électrique

C. Lafforgue

- Exemple 2:



La source de courant fournit ($P_1 < 0$) l'énergie, la résistance consomme ($P_R > 0$), la source de tension consomme ($P_2 > 0$).

Remarque: $P_1 + P_2 + P_R = 0$
Il y a autant de puissance consommée que de puissance fournie

Loi d'Ohm:

$$U_R = RI$$
$$\Rightarrow U_R = 10\ \mathrm{V}$$

Loi des mailles:

$$U_1 = U_R + U_2$$
$$\Rightarrow U_1 = 20\ \mathrm{V}$$

Calcul de puissances:

$$P_1 = -U_1 I$$
$$\Rightarrow P_1 = -200\ \mathrm{mW}$$

$$P_2 = U_2 I$$
$$\Rightarrow P_2 = 100\ \mathrm{mW}$$

$$P_R = U_R I$$
$$\Rightarrow P_R = 100\ \mathrm{mW}$$

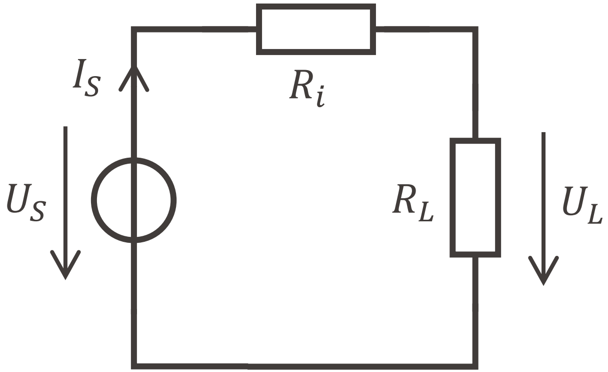
Puissance électrique

$$P_b = 2.2\ \mathrm{kW}$$
$$U_b = 230\ \mathrm{V}$$
$$\Delta t = 3\ \mathrm{min}$$

- Estimons la résistance d’une bouilloire commerciale et le courant qui la traverse

- Estimons la consommation énergétique pour faire bouillir 1 L d’eau

Puissance électrique

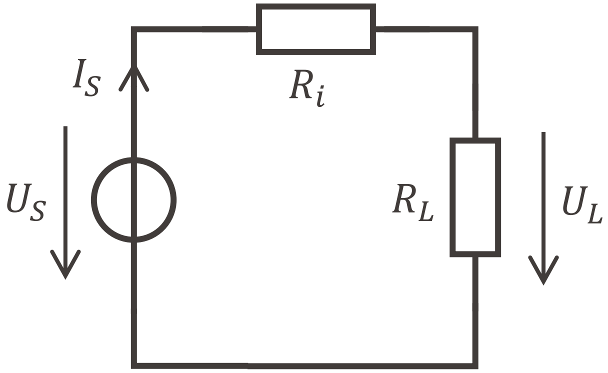


- Rendement:

$$\eta = \left|\frac{P_L}{P_s}\right|$$

Puissance électrique

C. Lafforgue



- Rendement:

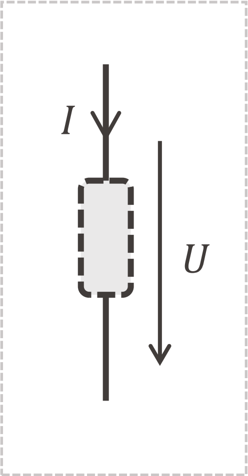
$$\eta = \left|\frac{P_L}{P_s}\right| = \frac{U_L}{U_S} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_L}}$$

- Maximisation du rendement: $R_L \gg R_i$

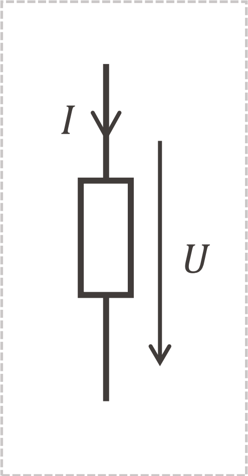
- Maximisation de puissance: $R_L = R_i$

Points clés

- La puissance traduit l’évolution de l’énergie dans le temps
- Toute la puissance fournie est consommée
- Le signe de la puissance indique si l’élément reçoit ou donne de l’énergie
- Une résistance convertit l’énergie reçue en chaleur par effet Joule

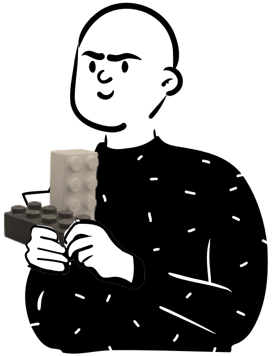


$$P = UI$$

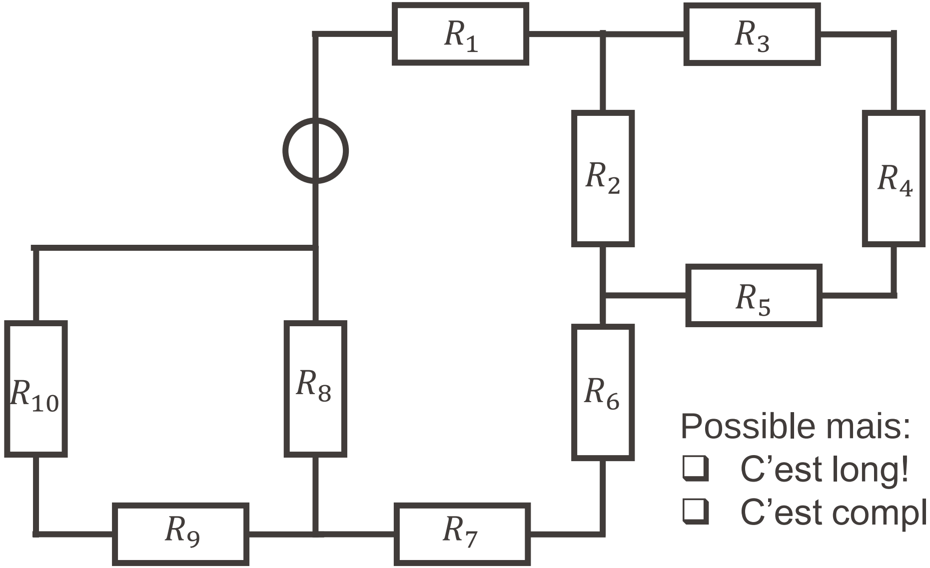


$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

Agencements de résistances

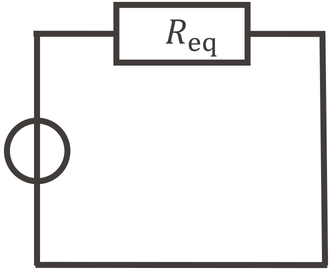


Agencements de résistances



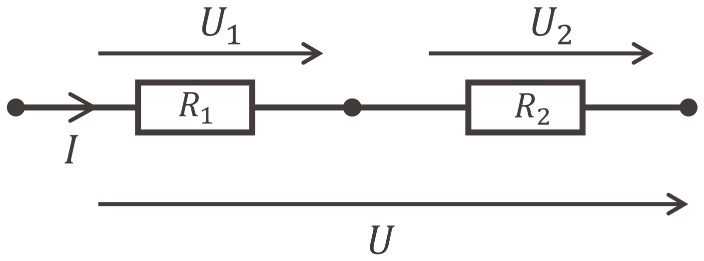
Possible mais:
- ❑ C’est long!
- ❑ C’est compliqué!

Circuit équivalent:
- ❑ Beaucoup plus facile!



Agencement en série

- Eléments en série: branchement l'un à la suite de l'autre



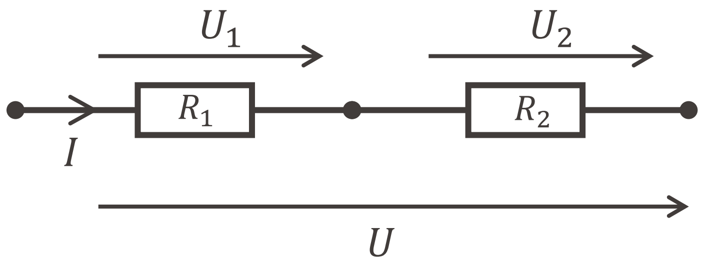
- **Objectif: exprimer U en fonction de I**

Que vaut U?

A. $U = U_2 - U_1$

B. $U = U_1 + U_2$

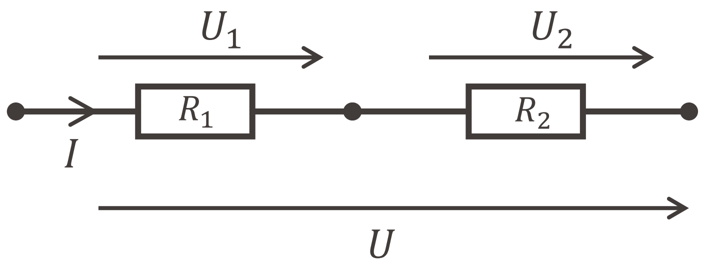
C. $U = U_1 - U_2$



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Agencement en série

- Eléments en série: branchement l'un à la suite de l'autre

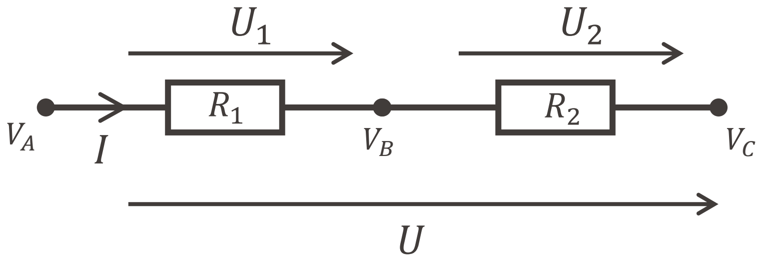


- **Objectif: exprimer U en fonction de I**
- Rappels:
  - Les éléments en série sont parcourus par le même courant
  - Les tensions en série s'additionnent

C. Lafforgue

Agencement en série

- Eléments en série: branchement l'un à la suite de l'autre



Tension totale:

$$U = V_A - V_C = (V_A - V_B) + (V_B - V_C)$$
$$\Rightarrow U = U_1 + U_2$$

Loi d'Ohm:

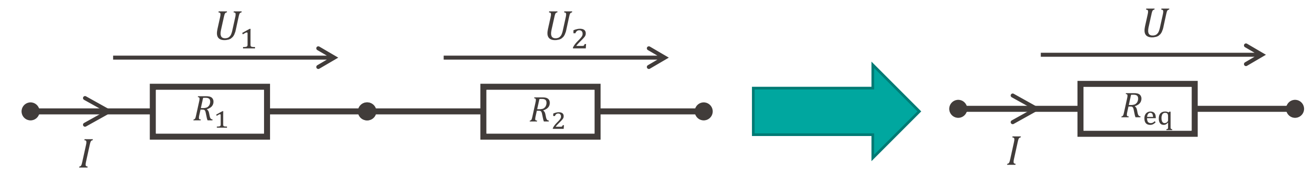
$$U_1 = R_1 I$$
$$U_2 = R_2 I$$

$$U = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$
$$\Rightarrow U = R_{\mathrm{eq}} I$$

Avec: $R_{\mathrm{eq}} = R_1 + R_2$

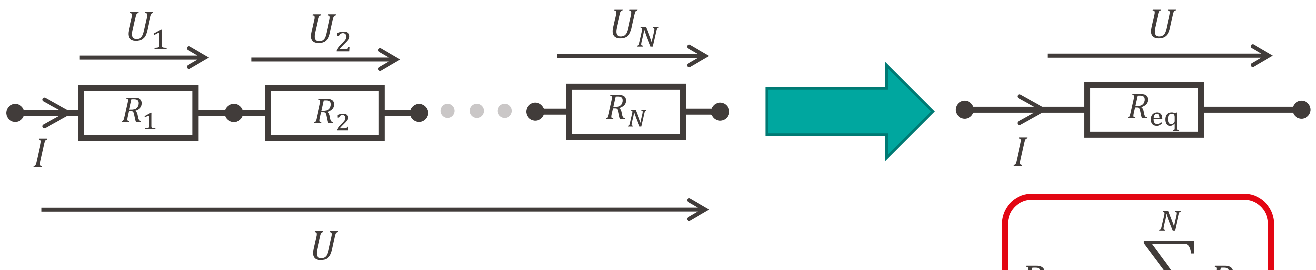
Agencement en série

- Deux résistances en série s'additionnent:



$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

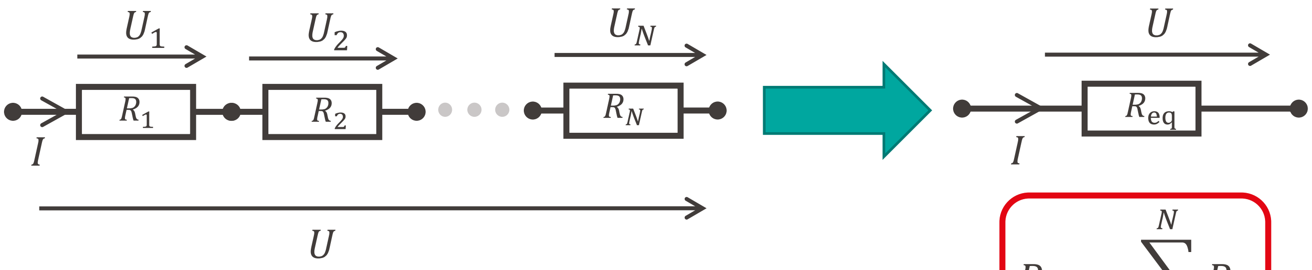
- Plus généralement:



$$\boxed{R_{eq} = \sum_{k=1}^{N} R_k}$$

Agencement en série

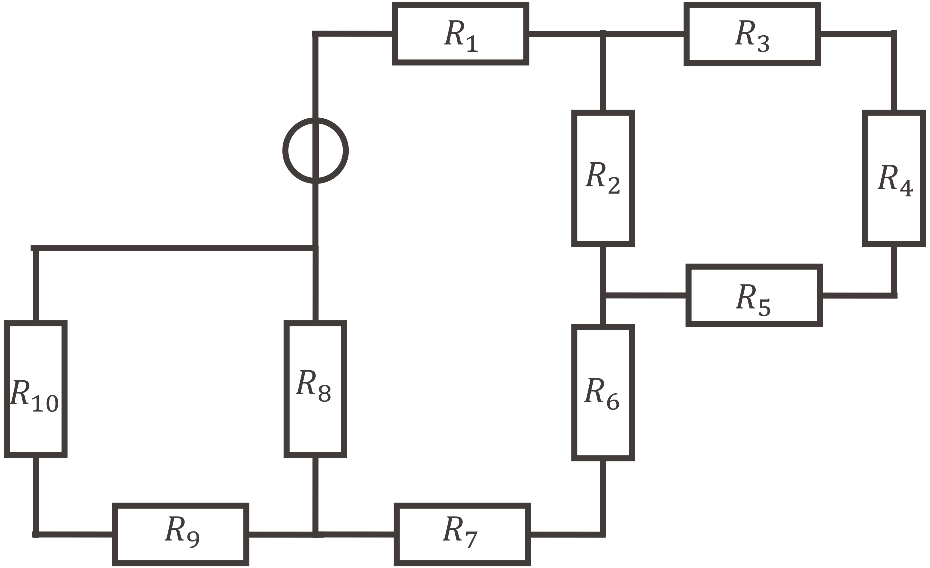
- Plus généralement:



$$\boxed{R_{eq} = \sum_{k=1}^{N} R_k}$$

- **Remarque:** la résistance équivalente est plus grande que la plus grande des résistances individuelles en série

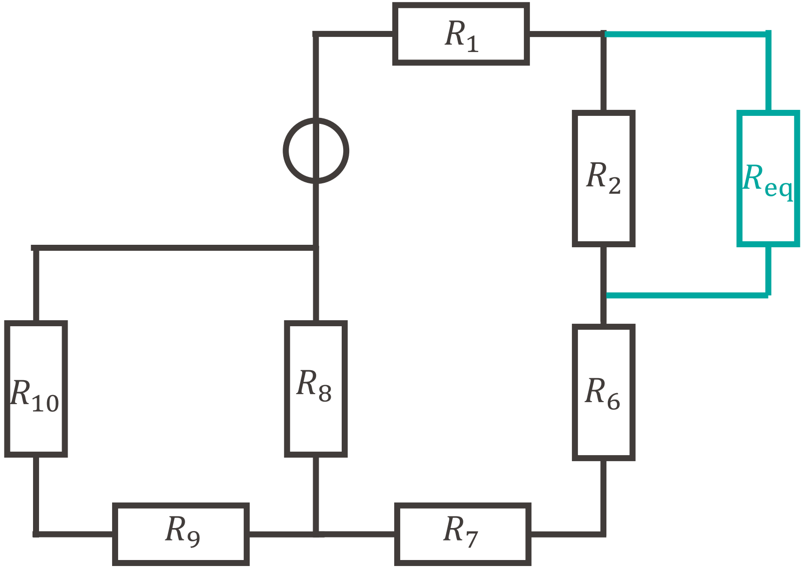
Agencement en série



- Exemple: R_3, R_4, R_5 sont en série (l'une après l'autre)

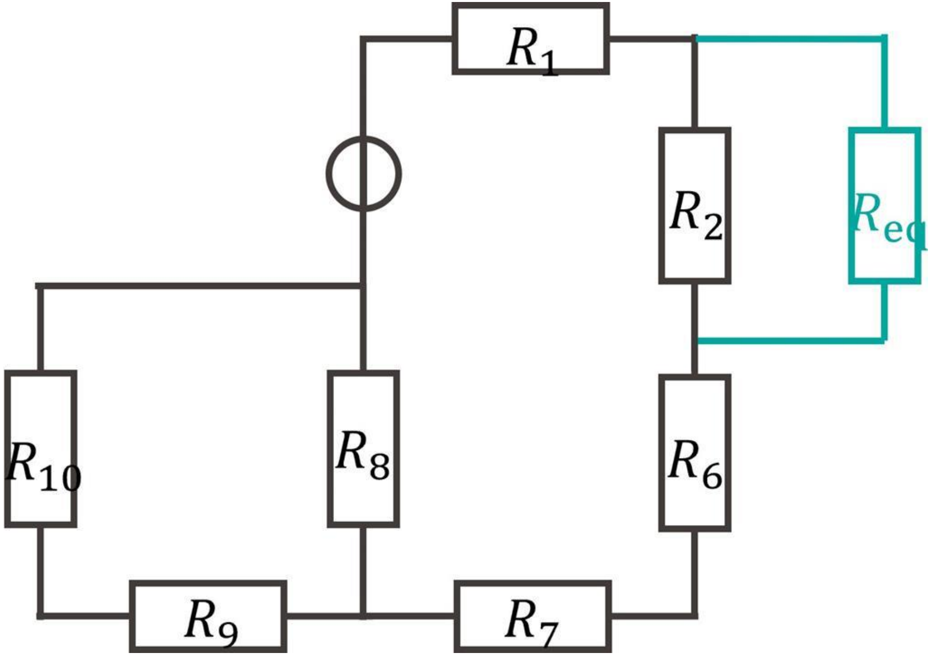
C. Lafforgue

Agencement en série



- Exemple: R_3, R_4, R_5 sont en série (l'une après l'autre)
- La branche les contenant peut être remplacée par une branche avec une résistance équivalente unique $R_{eq} = R_3 + R_4 + R_5$
- Si on a: $R_3 = 450\ \Omega$,
  $R_4 = 2.5\ \mathrm{k}\Omega$,
  $R_5 = 950\ \Omega$,
  alors la branche se comporte comme une résistance de $3.9\ \mathrm{k}\Omega$

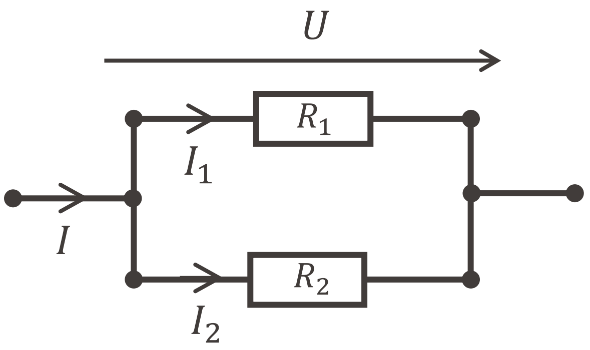
Cliquez sur un autre agencement en série



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Agencement en parallèle

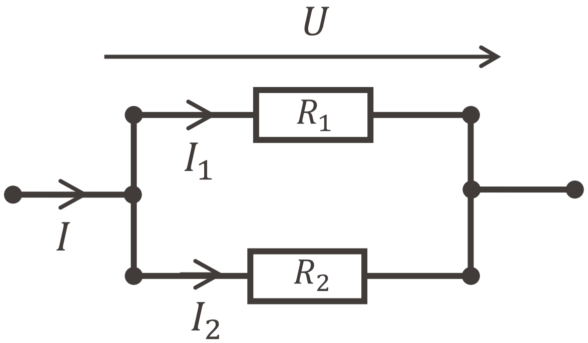
- Eléments en parallèle: branchement aux mêmes bornes



- **Objectif: exprimer U en fonction de I**

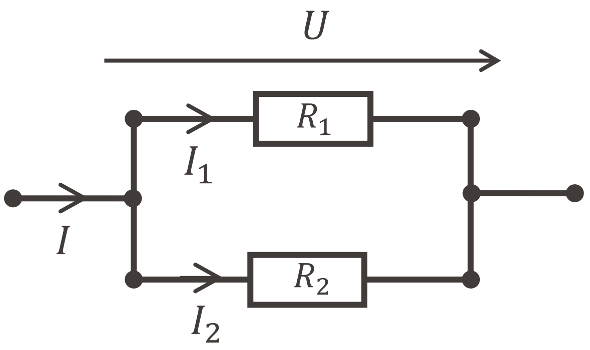
Agencement en parallèle

- Eléments en parallèle: branchement aux mêmes bornes



Agencement en parallèle

- Eléments en parallèle: branchement aux mêmes bornes



Loi des nœuds:

$$I = I_1 + I_2$$

Loi d'Ohm:

$$U = R_1 I_1$$
$$U = R_2 I_2$$

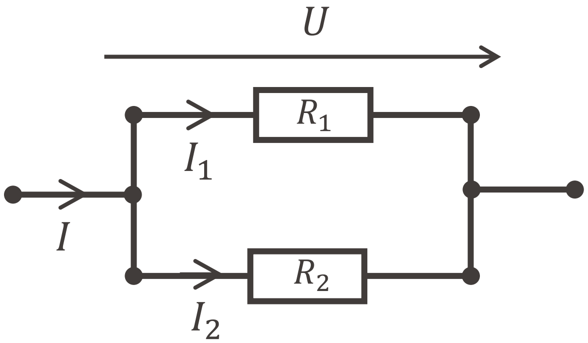
$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$
$$\Rightarrow I = \frac{1}{R_{\mathrm{eq}}} U$$

Avec:

$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Agencement en parallèle

- Deux résistances en parallèle: les conductances s'ajoutent

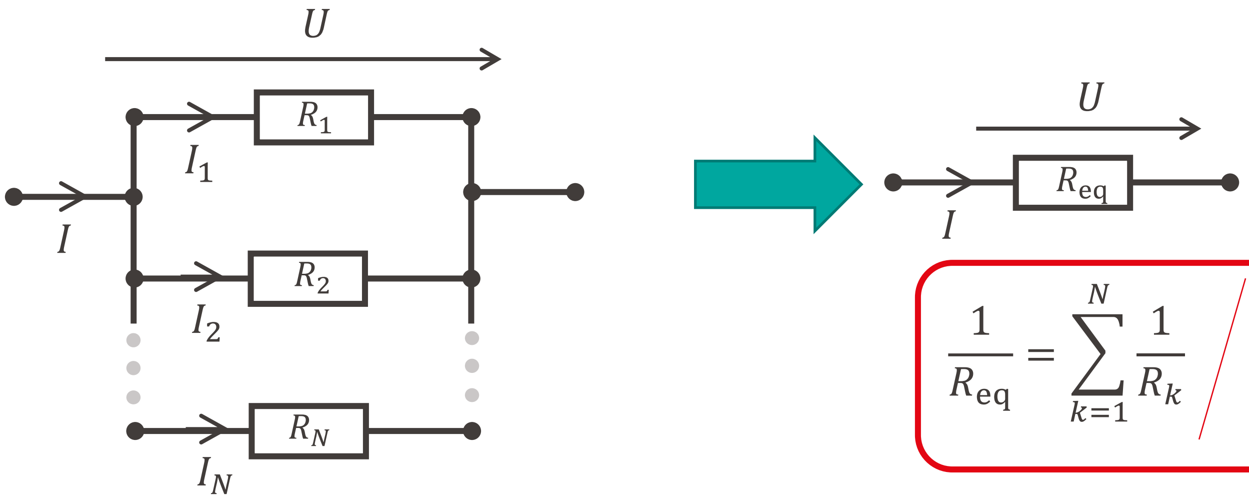


$$U = R_{eq} I \qquad I = G_{eq} U$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad G_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = G_1 + G_2 \qquad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Agencement en parallèle

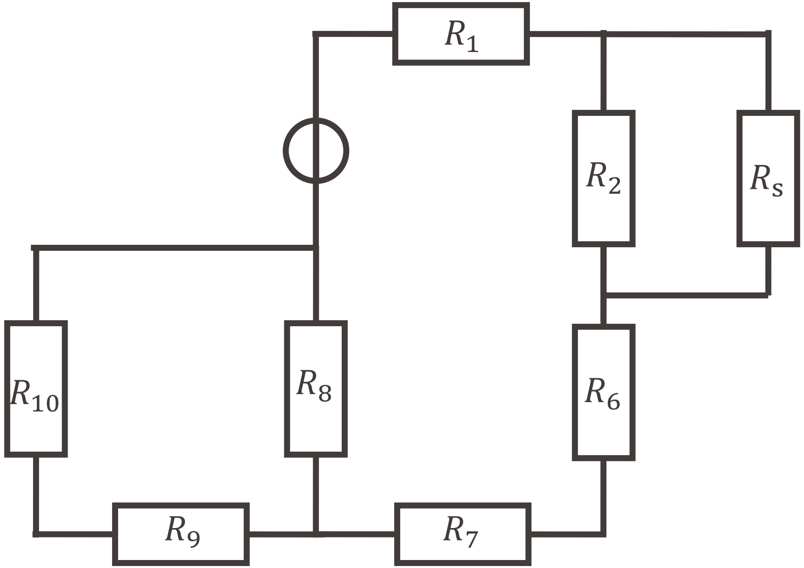
- Plus généralement:



$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k} \quad / \quad G_{eq} = \sum_{k=1}^{N} G_k$$

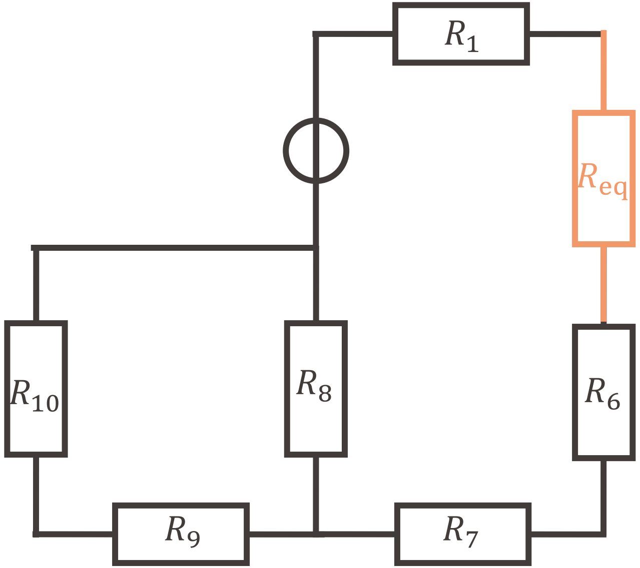
- **Remarque:** la résistance équivalente est plus petite que la plus petite des résistances individuelles en parallèle

Agencement en parallèle



- Exemple: R_2, R_s sont en parallèle (mêmes bornes)

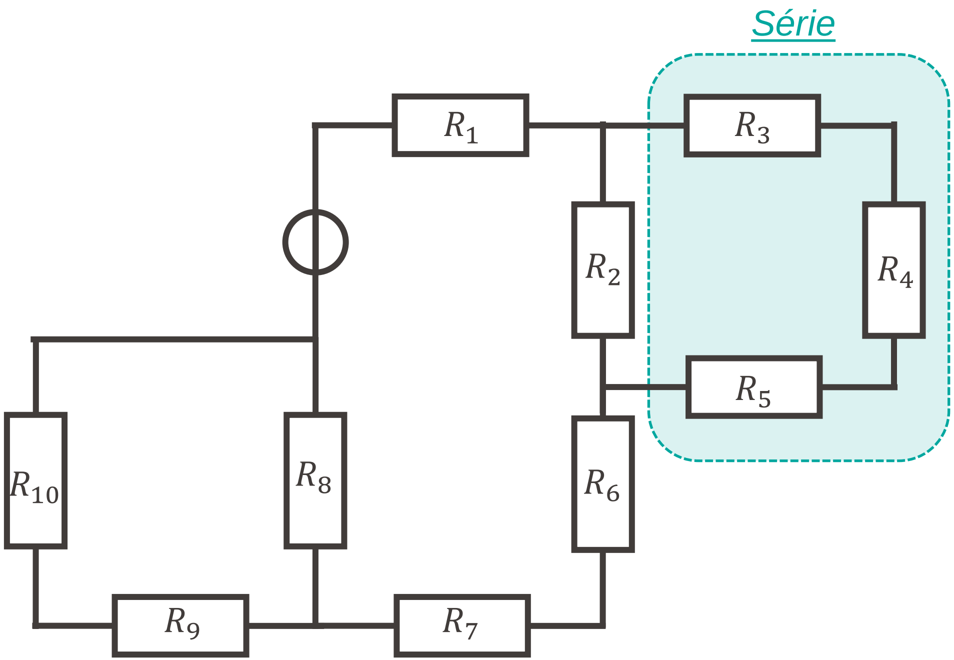
Agencement en parallèle



- Exemple: R_2, R_s sont en parallèle (mêmes bornes)
- La branche les contenant peut être remplacée par une branche avec une résistance équivalente unique telle que $1/R_{\text{eq}} = 1/R_2 + 1/R_s$
- Si on a: $R_2 = 200\ \Omega$, $R_s = 3.9\ \text{k}\Omega$, alors la branche se comporte comme une résistance de $190\ \Omega$

Agencements: simplification de schéma

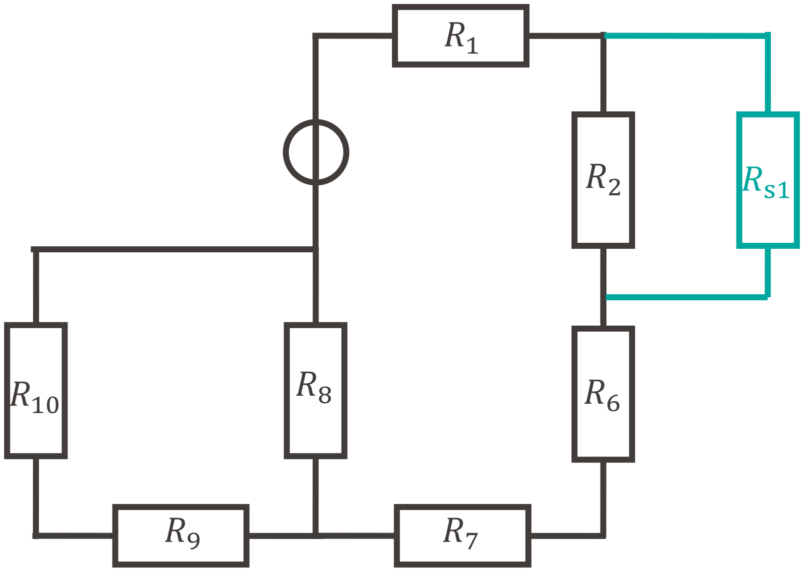
$R_1 = 100\ \Omega$
$R_2 = 200\ \Omega$
$R_3 = 450\ \Omega$
$R_4 = 2.5\ \mathrm{k}\Omega$
$R_5 = 950\ \Omega$
$R_6 = 200\ \Omega$
$R_7 = 450\ \Omega$
$R_8 = 1\ \mathrm{k}\Omega$
$R_9 = 350\ \Omega$
$R_{10} = 650\ \Omega$



Agencements: simplification de schéma

C. Lafforgue

$R_1 = 100\ \Omega$
$R_2 = 200\ \Omega$
$\cancel{R_3 = 450\ \Omega}$
$\cancel{R_4 = 2.5\ \mathrm{k}\Omega}$
$\cancel{R_5 = 950\ \Omega}$
$R_6 = 200\ \Omega$
$R_7 = 450\ \Omega$
$R_8 = 1\ \mathrm{k}\Omega$
$R_9 = 350\ \Omega$
$R_{10} = 650\ \Omega$

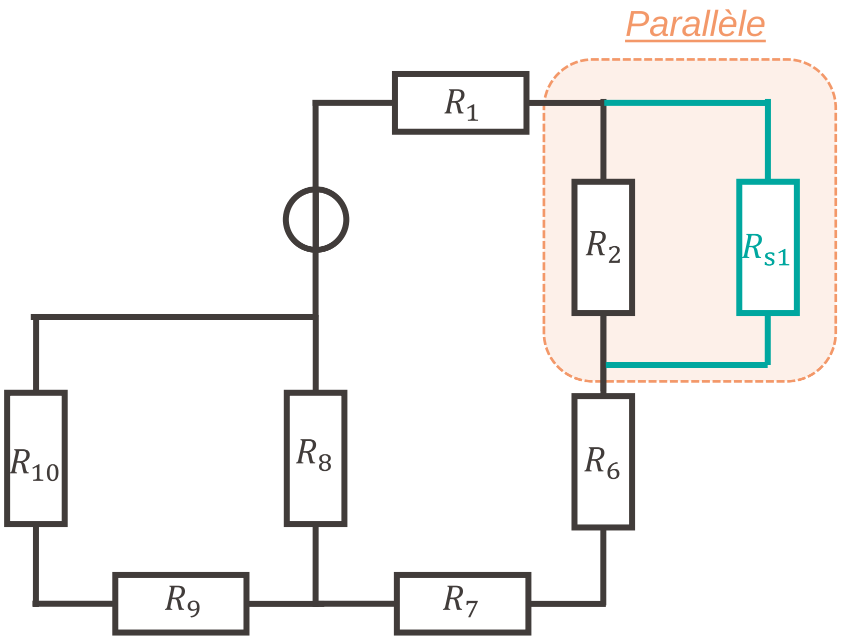


$R_{s1} = 450 + 2500 + 950 = 3.9\ \mathrm{k}\Omega$

Agencements: simplification de schéma

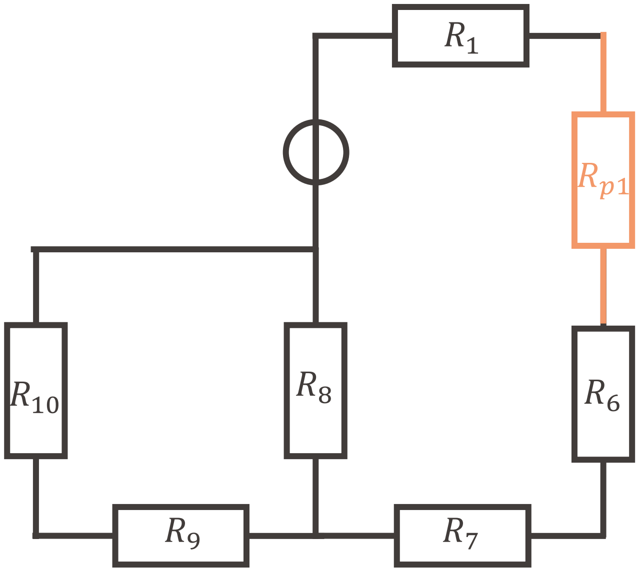
C. Lafforgue

$R_1 = 100\ \Omega$
$R_2 = 200\ \Omega$
$R_{s1} = 3.9\ \mathrm{k}\Omega$
$R_6 = 200\ \Omega$
$R_7 = 450\ \Omega$
$R_8 = 1\ \mathrm{k}\Omega$
$R_9 = 350\ \Omega$
$R_{10} = 650\ \Omega$



Agencements: simplification de schéma

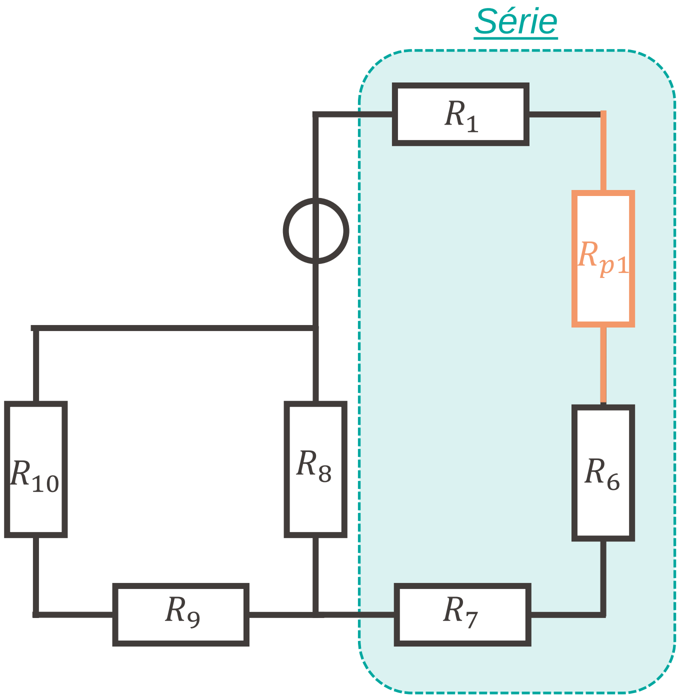
$R_1 = 100\ \Omega$
$\cancel{R_2 = 200\ \Omega}$
$\cancel{R_{s1} = 3.9\ \mathrm{k}\Omega}$
$R_6 = 200\ \Omega$
$R_7 = 450\ \Omega$
$R_8 = 1\ \mathrm{k}\Omega$
$R_9 = 350\ \Omega$
$R_{10} = 650\ \Omega$



$$R_{p1} = \frac{3900 \times 200}{3900 + 200} = 190\ \Omega$$

Agencements: simplification de schéma

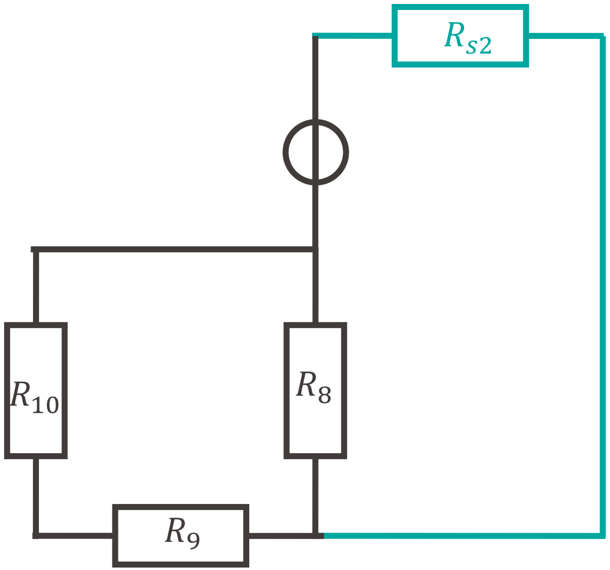
$R_1 = 100\ \Omega$
$R_{p1} = 190\ \Omega$
$R_6 = 200\ \Omega$
$R_7 = 450\ \Omega$
$R_8 = 1\ \mathrm{k}\Omega$
$R_9 = 350\ \Omega$
$R_{10} = 650\ \Omega$



Agencements: simplification de schéma

C. Lafforgue

$\cancel{R_1 = 100\ \Omega}$
$\cancel{R_{p1} = 190\ \Omega}$
$\cancel{R_6 = 200\ \Omega}$
$\cancel{R_7 = 450\ \Omega}$
$R_8 = 1\ \mathrm{k}\Omega$
$R_9 = 350\ \Omega$
$R_{10} = 650\ \Omega$

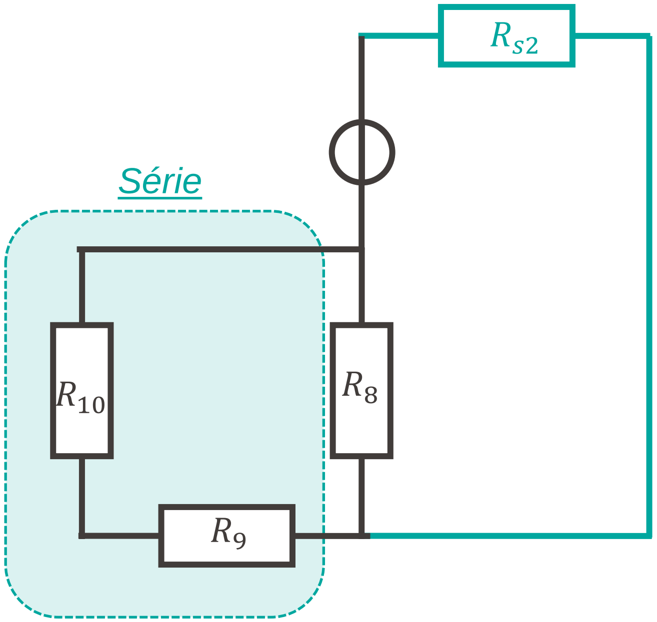


$R_{s2} = 100 + 190 + 200 + 450 = 940\ \Omega$

Agencements: simplification de schéma

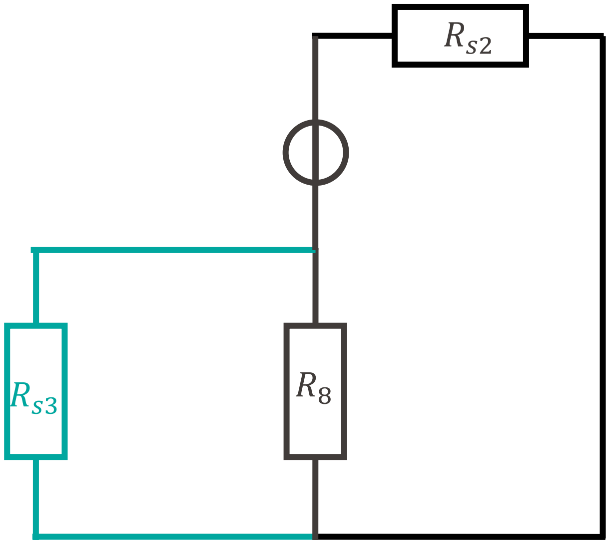
C. Lafforgue

$R_{s2} = 940\ \Omega$
$R_8 = 1\ \mathrm{k}\Omega$
$R_9 = 350\ \Omega$
$R_{10} = 650\ \Omega$



Agencements: simplification de schéma

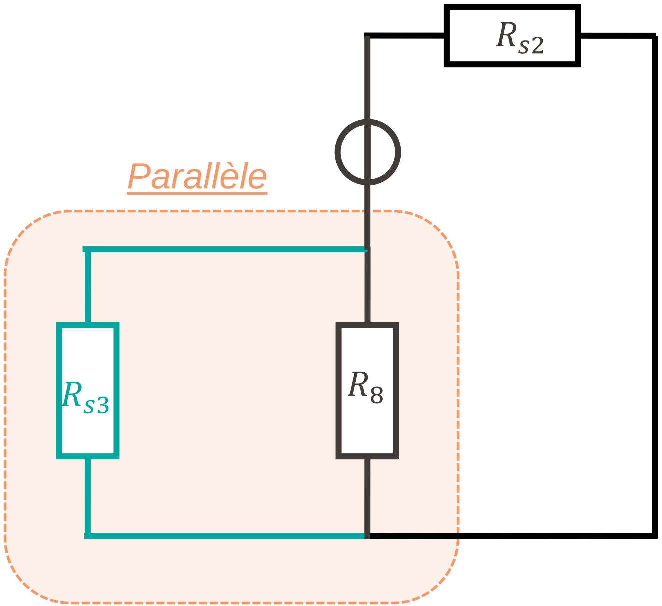
$R_{s2} = 940\ \Omega$
$R_8 = 1\ \mathrm{k}\Omega$
$\cancel{R_9 = 350\ \Omega}$
$\cancel{R_{10} = 650\ \Omega}$



$R_{s3} = 350 + 650 = 1\ \mathrm{k}\Omega$

Agencements: simplification de schéma

$R_{s2} = 940\ \Omega$
$R_8 = 1\ \mathrm{k}\Omega$
$R_{s3} = 1\ \mathrm{k}\Omega$



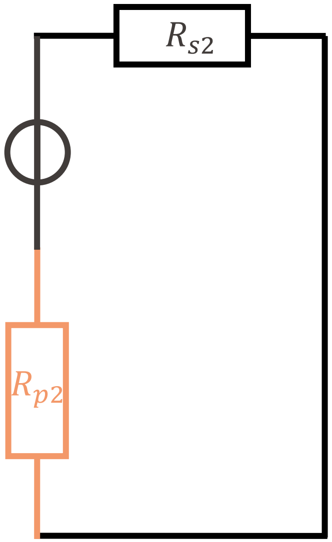
Agencements: simplification de schéma

$R_{s2} = 940\ \Omega$

$\cancel{R_g = 1\ \mathrm{k}\Omega}$

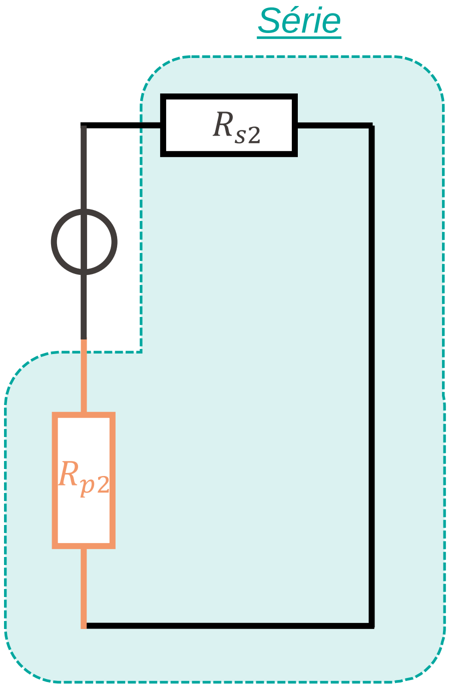
$\cancel{R_{s3} = 1\ \mathrm{k}\Omega}$

$$R_{p2} = \frac{1000 \times 1000}{1000 + 1000} = 500\ \Omega$$



Agencements: simplification de schéma

$R_{s2} = 940\ \Omega$
$R_{p2} = 500\ \Omega$

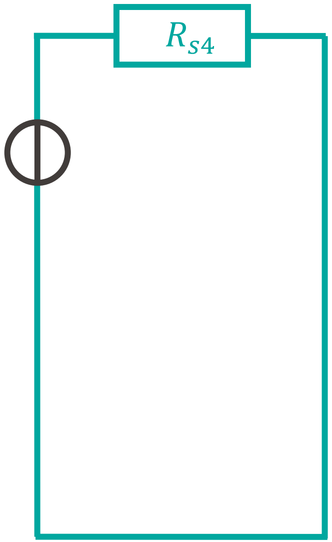


Agencements: simplification de schéma

C. Lafforgue

$\cancel{R_{s2} = 940\ \Omega}$

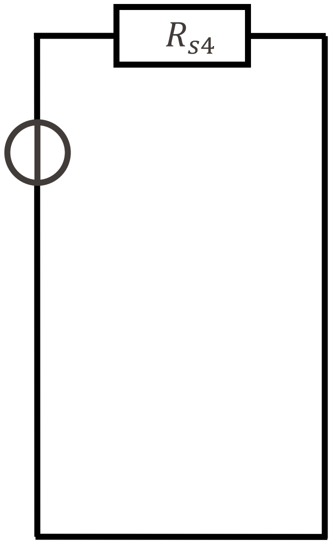
$\cancel{R_{p2} = 500\ \Omega}$



$R_{s4} = 940 + 500 = 1.44\ \text{k}\Omega$

Agencements: simplification de schéma

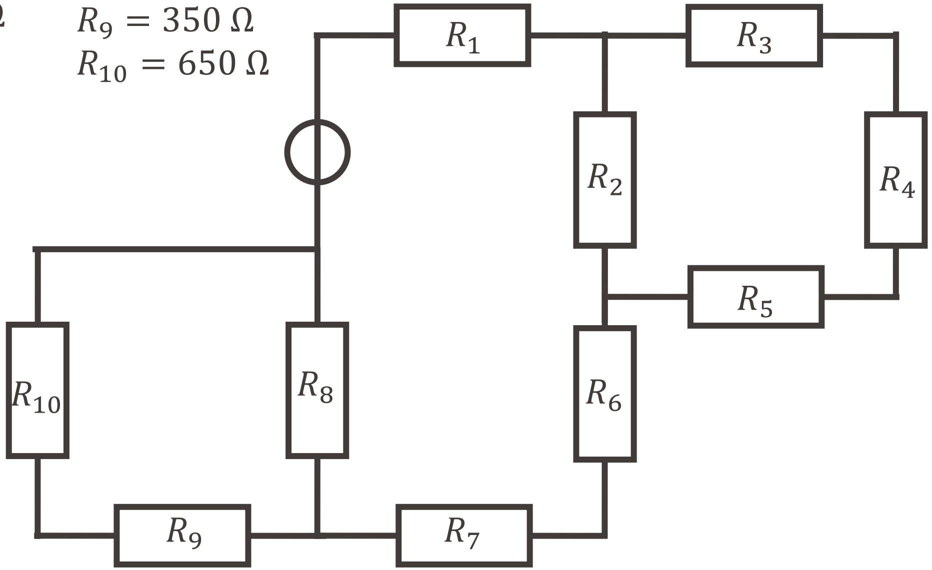
$R_{s4} = 1.44\ \mathrm{k\Omega}$



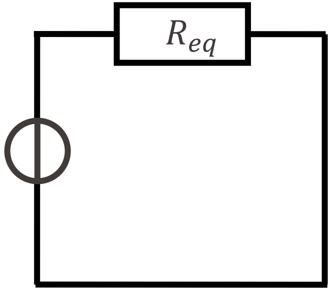
Agencements: simplification de schéma

$R_1 = 100\ \Omega$
$R_2 = 200\ \Omega$
$R_3 = 450\ \Omega$
$R_4 = 2.5\ \mathrm{k}\Omega$
$R_5 = 950\ \Omega$

$R_6 = 200\ \Omega$
$R_7 = 450\ \Omega$
$R_8 = 1\ \mathrm{k}\Omega$
$R_9 = 350\ \Omega$
$R_{10} = 650\ \Omega$

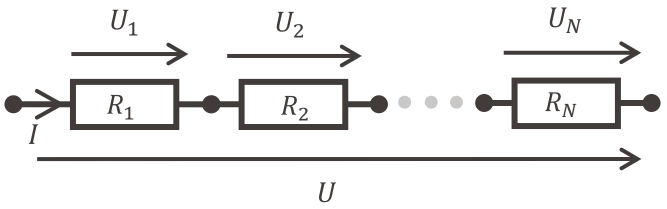


$R_{eq} = 1.44\ \mathrm{k}\Omega$

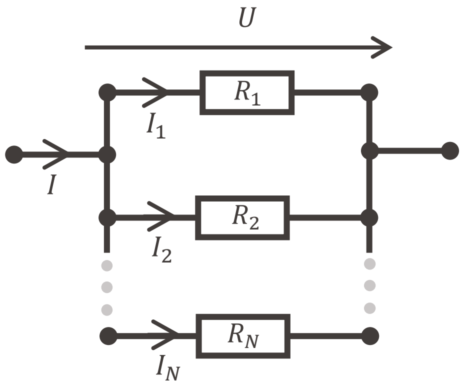


Points clés

- L'identification des agencements série/parallèles des résistances permet de grandement simplifier les schémas électriques et les calculs
- Des résistances en série s'ajoutent
  - Des résistances en série ont une résistance équivalente plus grande
- Pour des résistances en parallèles, les conductances s'ajoutent
  - Des résistances en parallèle ont une résistance équivalente plus petite

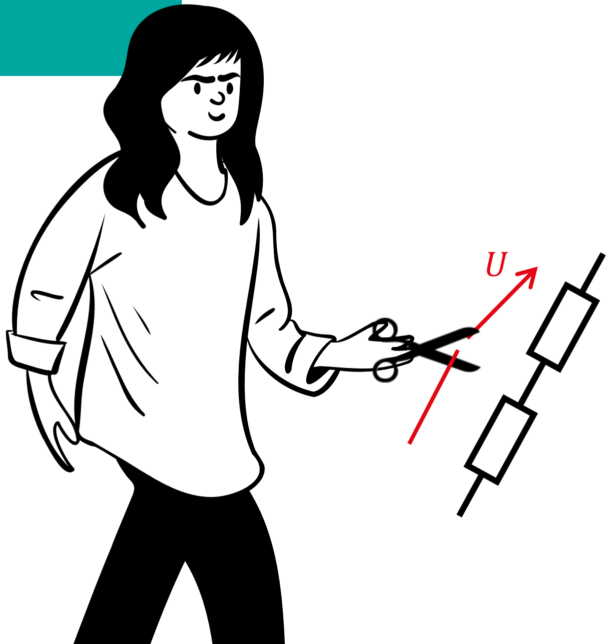


$$\boxed{R_{\mathrm{eq}} = \sum_{k=1}^{N} R_k}$$



$$\boxed{\frac{1}{R_{\mathrm{eq}}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k} \quad / \quad G_{\mathrm{eq}} = \sum_{k=1}^{N} G_k}$$

Diviseurs de tension et de courant

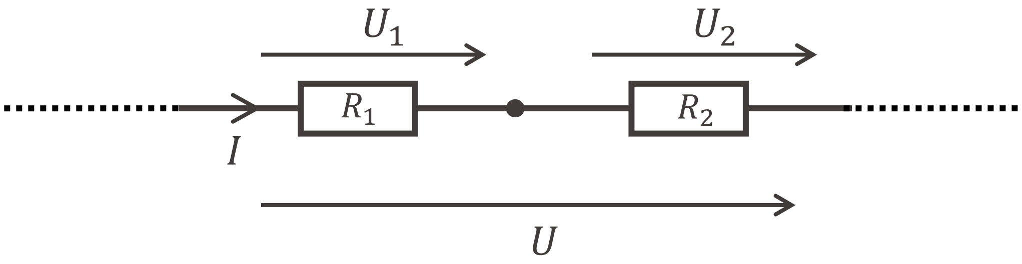


Diviseurs de tension et de courant

- **Objectif:** établir des méthodes simplifiant et accélérant l'analyse des circuits

Diviseurs de tension

- Un diviseur de tension est un agencement en série permettant d'extraire une tension plus faible que la tension totale

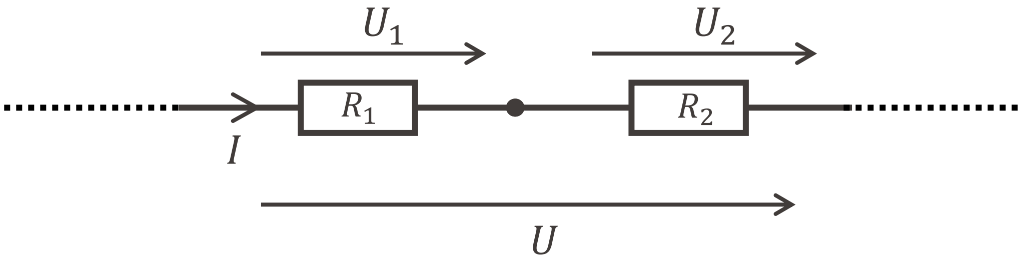


- On fixe U. Que valent U_1 et U_2?

C. Lafforgue

Diviseurs de tension

- On fixe U. Que valent U_1 et U_2?



Loi des mailles:

$$U = U_1 + U_2$$

Loi d'Ohm:

$$U_1 = R_1 I$$
$$U_2 = R_2 I$$

Résistance équivalente:

$$U = (R_1 + R_2)I$$
$$\Rightarrow I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

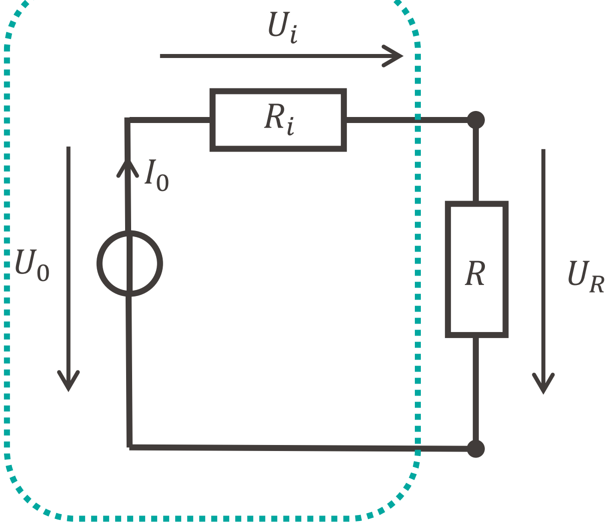
En substituant:

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

Diviseurs de tension

- Exemple: source réelle de tension



Méthode 1:

On applique les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm:

$$U_0 = U_i + U_R$$
$$U_i = R_i I_0$$
$$U_R = R I_0$$

On en déduit:

$$U_0 = (R + R_i) I_0$$

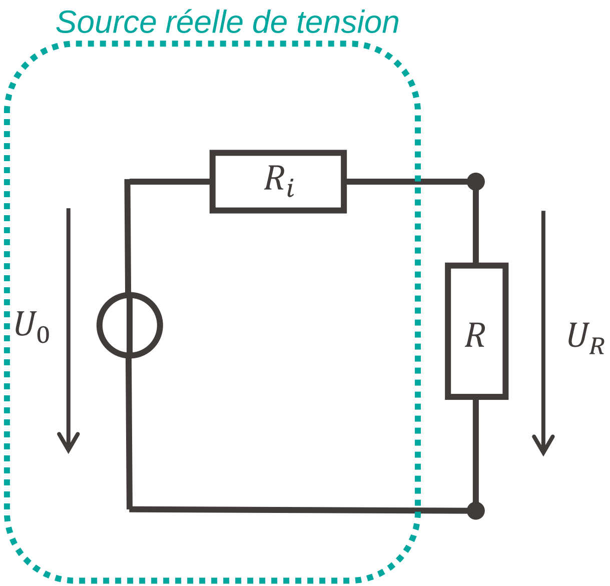
Et finalement:

$$U_R = \frac{R}{R_i + R} U_0$$

Cette méthode marchera toujours!
Mais elle peut être longue et fastidieuse

Diviseurs de tension

- Exemple: source réelle de tension



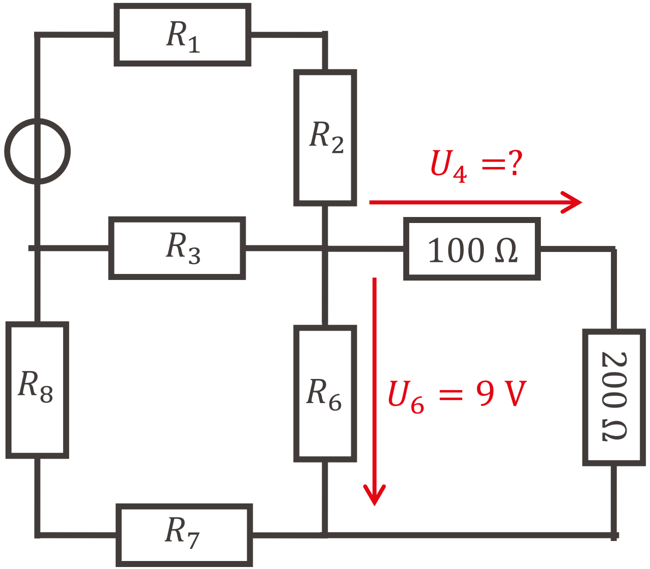
Méthode 2:

On applique le diviseur de tension:

$$U_R = \frac{R}{R_i + R} U_0$$

Que vaut U_4?

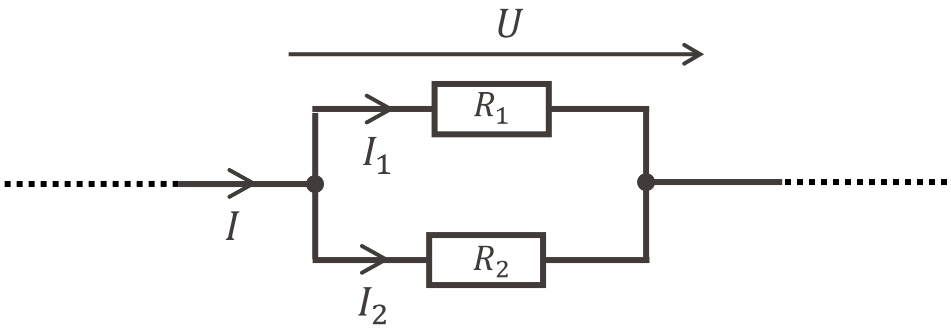
C. Lafforgue



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Diviseurs de courant

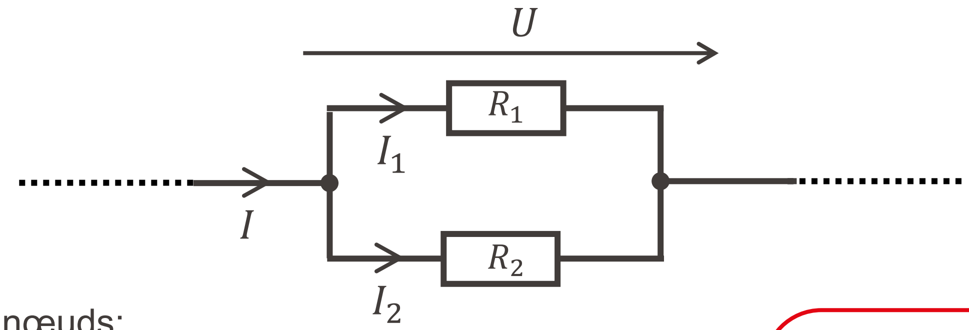
- Un diviseur de courant est un agencement en parallèle permettant d'extraire un courant plus faible que le courant total



- On fixe I. Que valent I_1 et I_2?

Diviseurs de courant

- On fixe I. Que valent I_1 et I_2?



Loi des nœuds:

$$I = I_1 + I_2$$

Loi d'Ohm:

$$U = R_1 I_1$$
$$U = R_2 I_2$$

Résistance équivalente:

$$U = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I$$

En substituant:

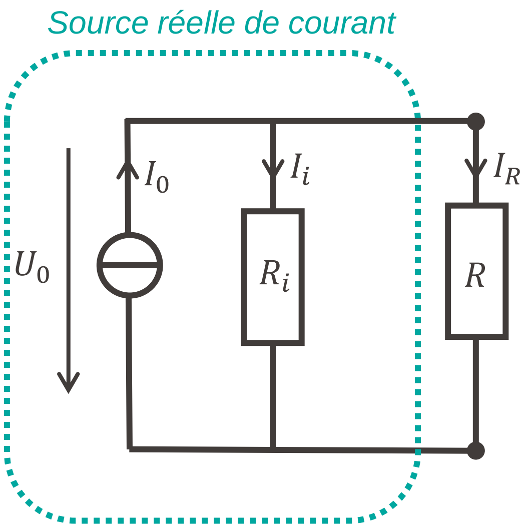
$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

Diviseurs de courant

C. Lafforgue

- Exemple: source réelle de courant



Méthode 1:

On applique les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm:

$$I_0 = I_i + I_R$$
$$U_0 = R_i I_i$$
$$U_0 = R I_R$$

On en déduit:

$$I_i = \frac{R}{R_i} I_R$$

Et finalement:

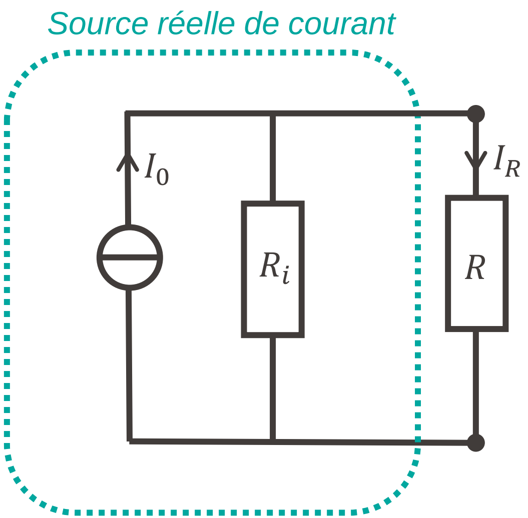
$$I_R = \frac{R_i}{R_i + R} I_0$$

Cette méthode marchera toujours!
Mais elle peut être longue et fastidieuse

C. Lafforgue

Diviseurs de courant

- Exemple: source réelle de courant

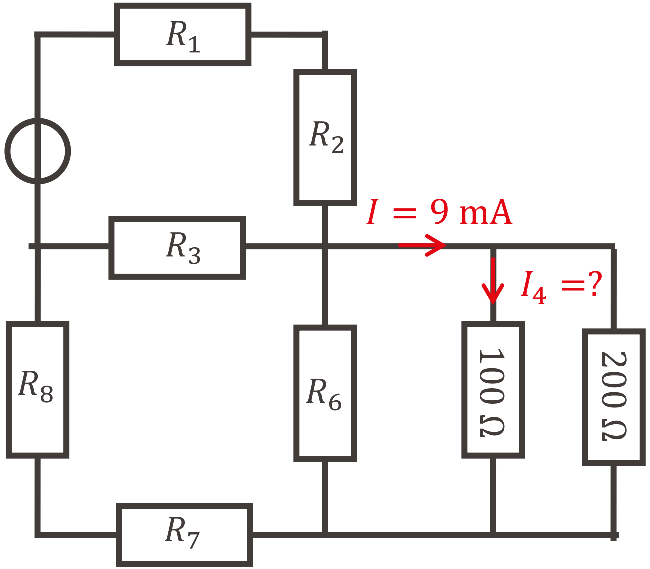


Méthode 2:

On applique le diviseur de courant:

$$I_R = \frac{R_i}{R_i + R} I_0$$

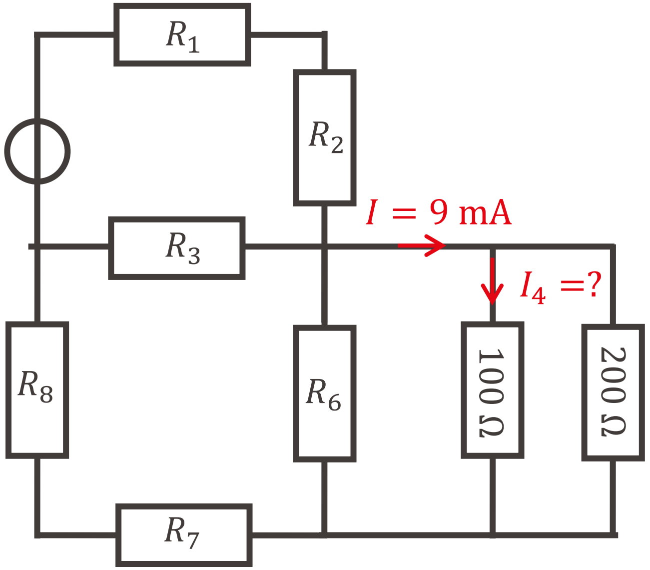
Que vaut I_4 ?



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

C. Lafforgue

Que vaut I_4?



Les résistances de $100\ \Omega$ et $200\ \Omega$ sont en parallèle: **on peut appliquer le diviseur de courant**

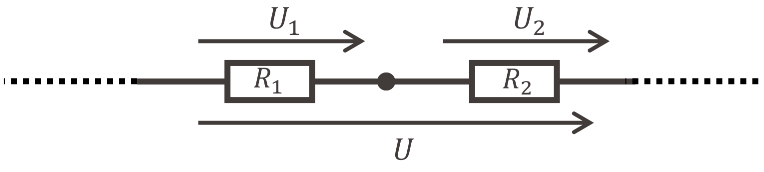
$$I_4 = \frac{200}{200 + 100} \times 9 = \frac{2}{3} \times 9$$

$$\Rightarrow I_4 = 6\ \mathrm{mA}$$

C. Lafforgue

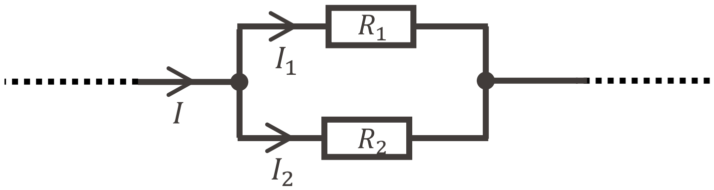
Points clés

- Savoir repérer des diviseurs de courant ou tension peut simplifier l'analyse
- Cette méthode n'est pas nécessaire, c'est un outil pour aller plus vite
  - En cas de doute: appliquer les lois de Kirchhoff sur le circuit complet
- Le diviseur de tension s'applique sur des résistances en série
- Le diviseur de courant s'applique sur des résistances en parallèle



$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U$$

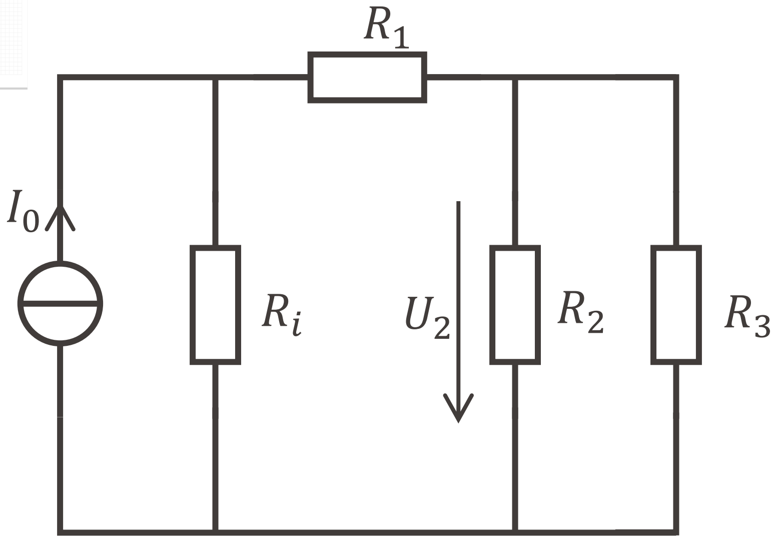
$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$



$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

Exemple

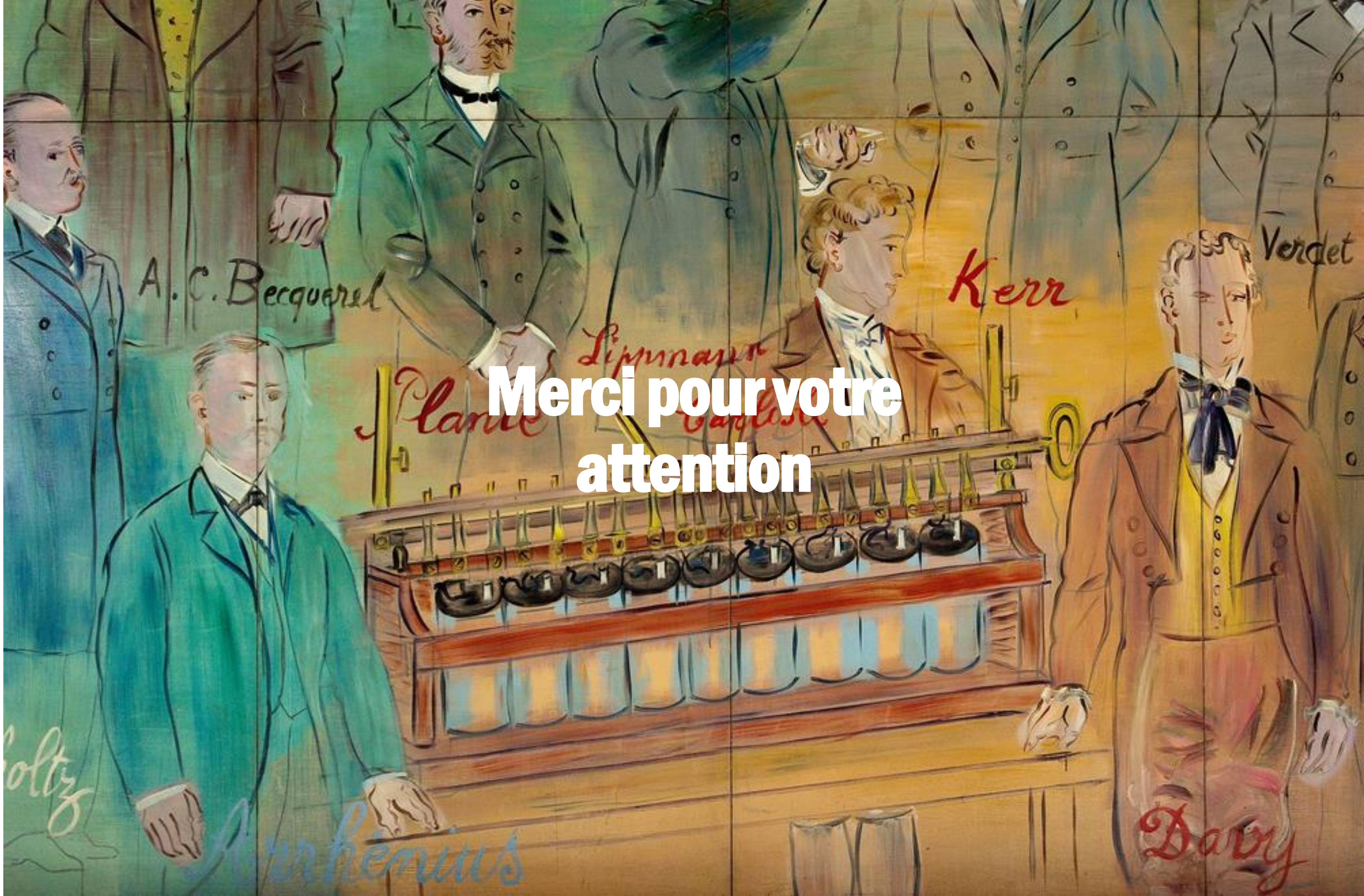


$I_0 = 110\ \mu\text{A}$
$R_i = 100\ \text{k}\Omega$
$R_1 = 1.25\ \text{k}\Omega$
$R_2 = 10\ \text{k}\Omega$
$R_3 = 10\ \text{k}\Omega$

Pour aller plus loin

- Pour des signaux à haute fréquence (typiquement autour des GHz), l’ARQS n’est plus valable
- La modélisation se base sur la propagation d’ondes
  - Les lois vues en régime statique ne sont valables que localement
- On parle d’électronique hyper-fréquence (RF) ou d’électronique rapide
- Exemple: systèmes de transmission

Merci pour votre attention



R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d’art moderne, Paris