

The background of the slide is an abstract painting by Robert Dufy. It features a complex grid of thin, dark lines in black and blue, overlaid with thicker, expressive brushstrokes in shades of blue, red, and yellow. A prominent blue square with a white circle inside is visible in the lower-left quadrant. The overall style is characteristic of mid-20th-century abstract art.

Cours 11: Diagramme de Bode, puissance

EE 106 – Sciences et
technologies de
l'électricité

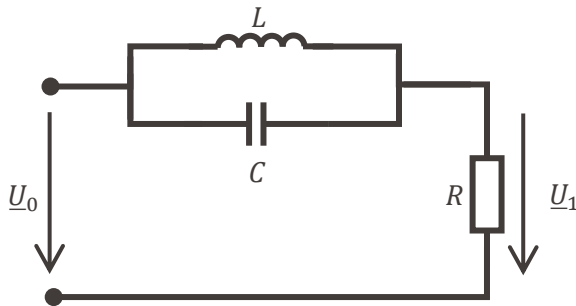
Automne 2024

R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

Rappels



- Les grandeurs dans le circuit dépendent de la fréquence



$$\underline{U}_1 = \frac{R(1 - LC\omega^2)}{R + jL\omega - RLC\omega^2} \underline{U}_0$$

- Cette propriété est utilisée pour réaliser des filtres
 - Systèmes qui permettent de sélectionner/rejeter des signaux en fonction de leur fréquence

- L'étude des filtres consiste en:

- Définir sa fonction de transfert

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{sortie}}(\omega)}{\underline{U}_{\text{entrée}}(\omega)}$$

- Etudier et tracer l'évolution de $|\underline{H}(\omega)|$ et $\arg(\underline{H}(\omega))$ en fonction de la fréquence du signal d'entrée

- On a vu 4 familles de filtres:

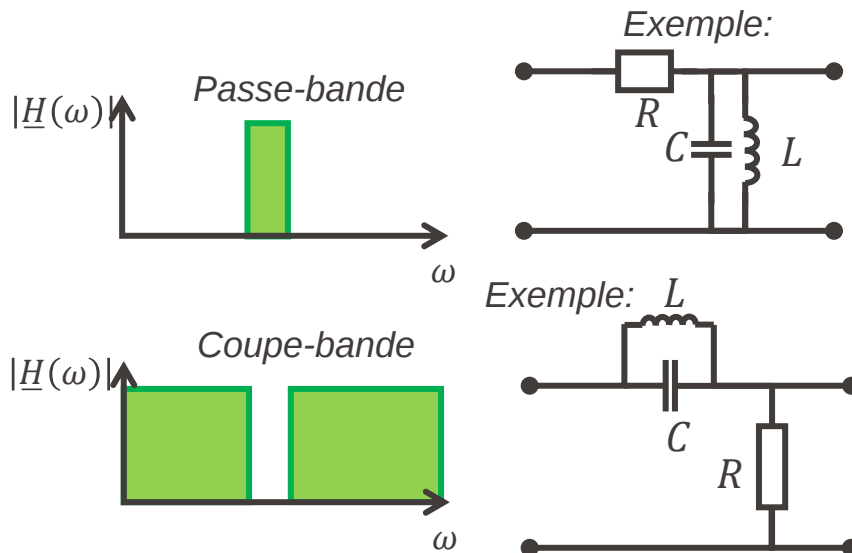
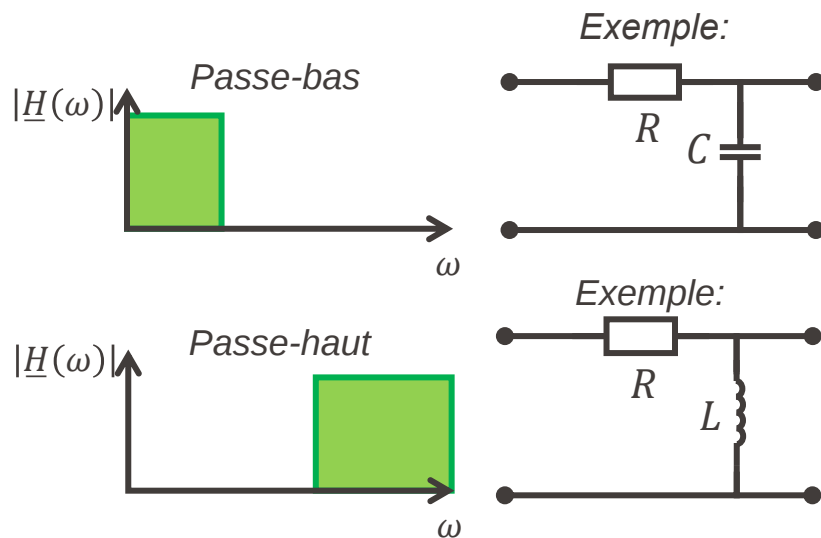
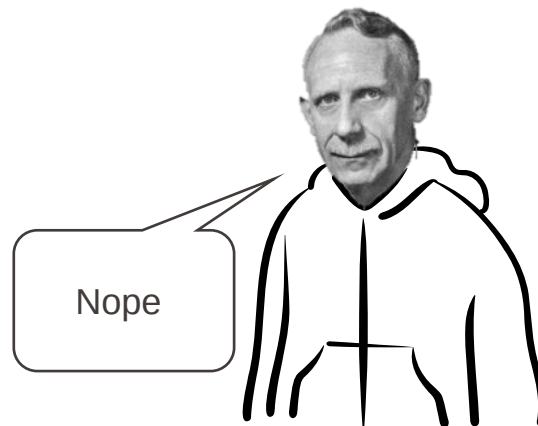


Diagramme de Bode

$$\underline{H}(\omega) = \frac{0.56(1 + j723\omega)^2(52.7 + j63\omega)(13 + j563\omega)}{(1 + j85.5\omega)(-78.6 - j41\omega)(j\omega)^4}$$



Tu veux bien tracer $|\underline{H}(\omega)|$?



Nope

- Les fonctions de transfert peuvent rapidement être compliquées
- Le diagramme de Bode est un moyen de représenter le comportement fréquentiel d'un système
 - Il permet une résolution graphique simplifiée
 - Il sert à visualiser rapidement le gain et la phase en fonction de la fréquence
 - Il se trace en échelle logarithmique

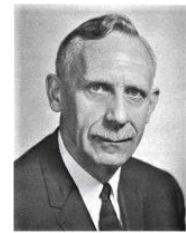


Diagramme de Bode



- Les fonctions de transfert peuvent rapidement être compliquées

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\omega}{1 + j2\omega}$$

- Résolution « classique »
- Résolution en logarithme

Rappels sur les logarithmes:

- $\log_k(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(k)}$
- $\log_k(a \cdot b) = \log_k(a) + \log_k(b)$
- $\log_k(a^n) = n \cdot \log_k(a)$
- $\log_k\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_k(x)$
- $\log_k(1) = 0$
- $\log_k(k) = 1$

- Les fonctions de transfert peuvent rapidement être compliquées
- Il est plus aisé et rapide d'étudier les fonctions de transfert en échelle logarithmique
 - On définit une nouvelle unité: le décibel (dB)
 - Il est défini sur le gain: $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log_{10}(|\underline{H}(\omega)|)$

Diagramme de Bode – Tracé en échelle logarithmique

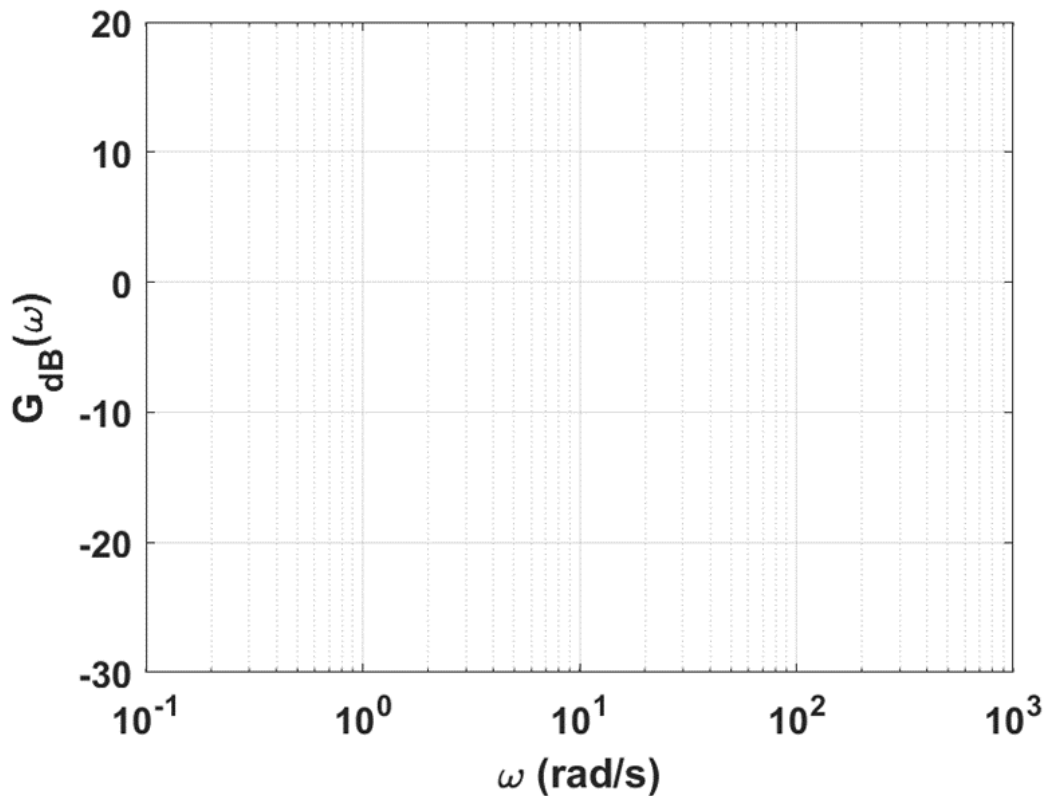
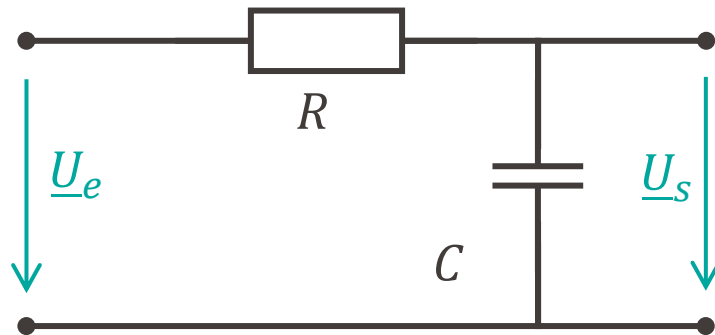


Diagramme de Bode - Exemple



$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan(RC\omega) \end{cases}$$

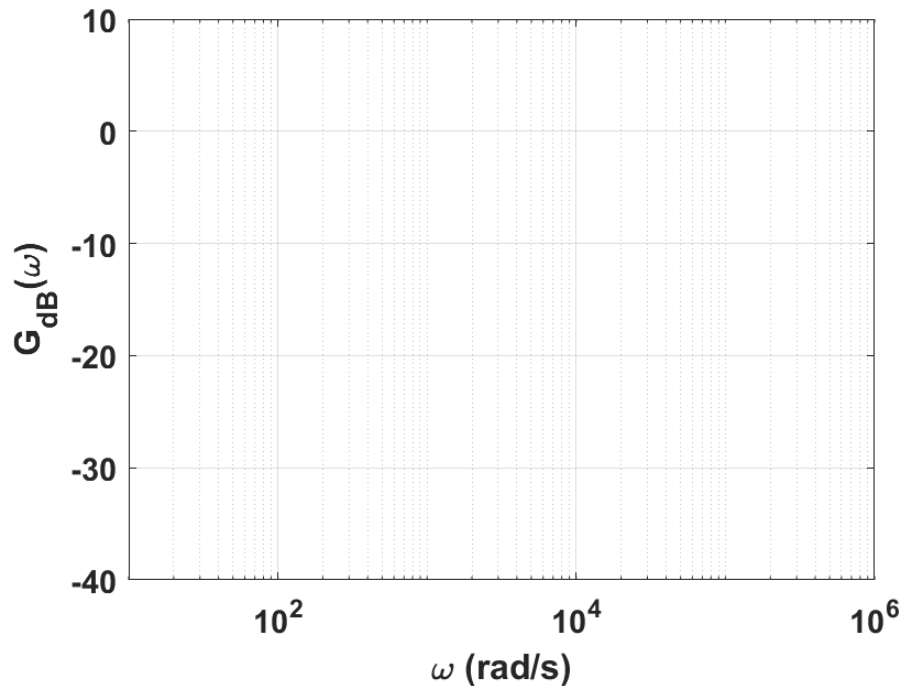
Diagramme de Bode - Exemple



$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan(RC\omega) \end{cases}$$

■ Cas limites:

- $\omega \rightarrow 0$
- $\omega \rightarrow +\infty$



Que vaut la limite pour $\omega \rightarrow 0$?

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \right)$$

- A. 0 dB
- B. 1 dB
- C. $+\infty$ dB
- D. $-\infty$ dB
- E. 20 dB
- F. -20 dB

Diagramme de Bode - Exemple

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan(RC\omega) \end{cases}$$

Diagramme réel

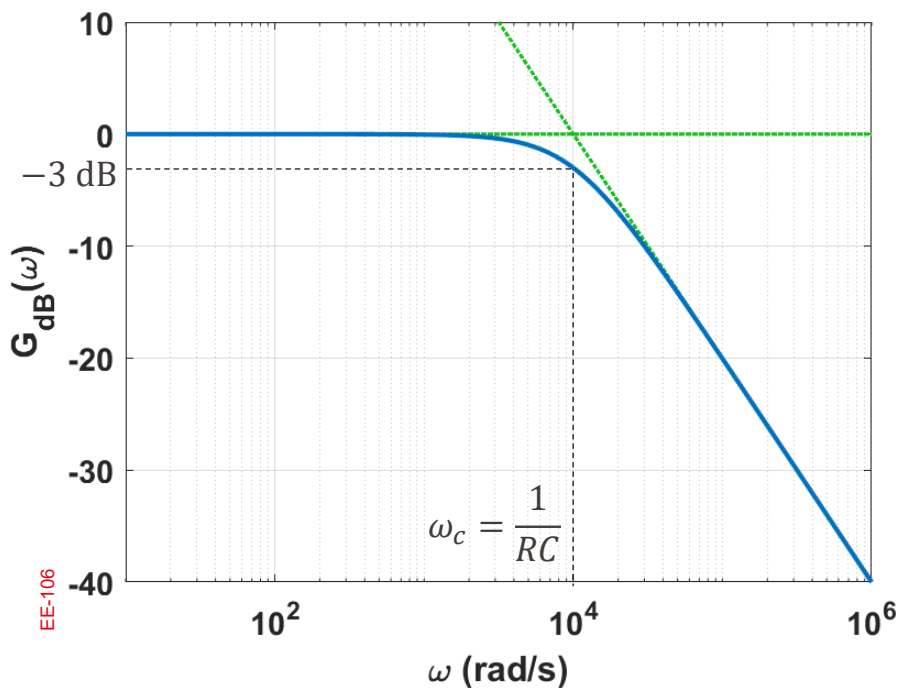
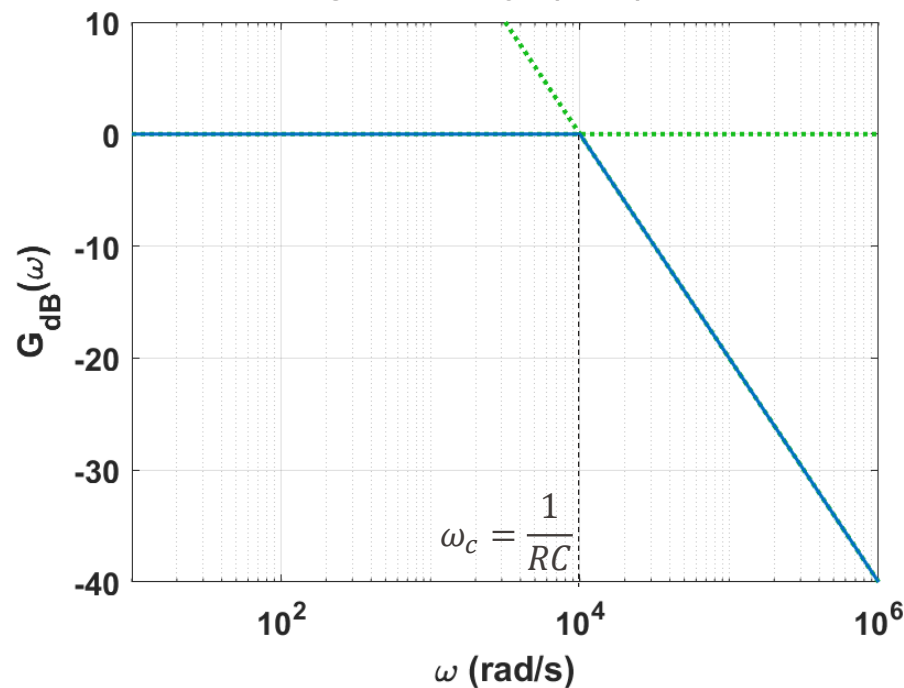


Diagramme asymptotique



- On s'intéresse ici aux fonctions de transfert de la forme:

$$\underline{H}(\omega) = K \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right) \dots \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_n}\right)}{(j\omega)^L \left(1 + j \frac{\omega}{\omega'_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega'_2}\right) \dots \left(1 + j \frac{\omega}{\omega'_n}\right)}$$

- Pour tracer le gain de ces fonctions, il suffit de connaître quelques formes simples:

$$K ; \frac{1}{(j\omega)^L} ; \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right) ; \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Diagramme de Bode – Constante K

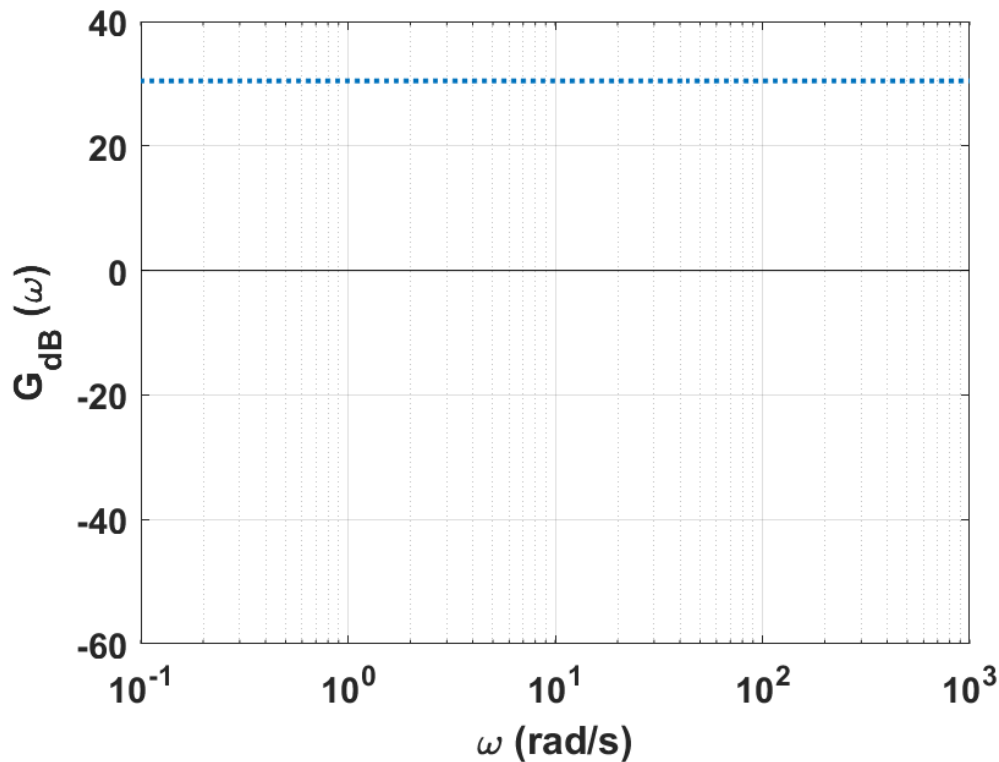


Diagramme de Bode –

Terme $\frac{1}{(j\omega)^L}$ avec $L > 0$

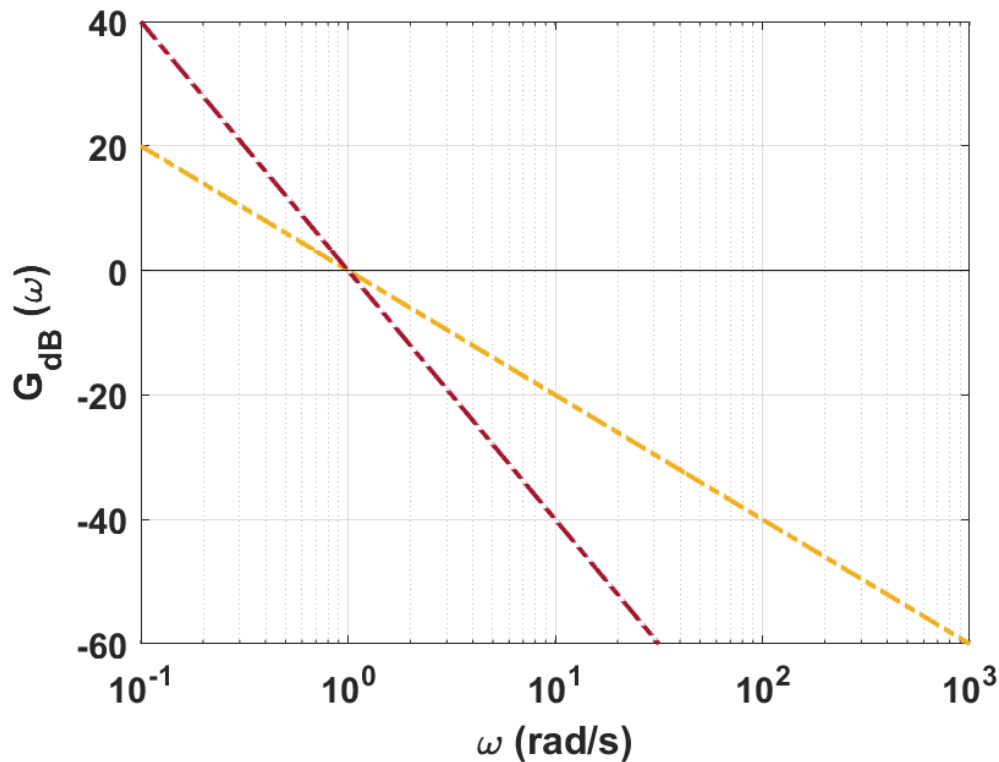


Diagramme de Bode –

Terme $\frac{1}{(j\omega)^L}$ avec $L < 0$

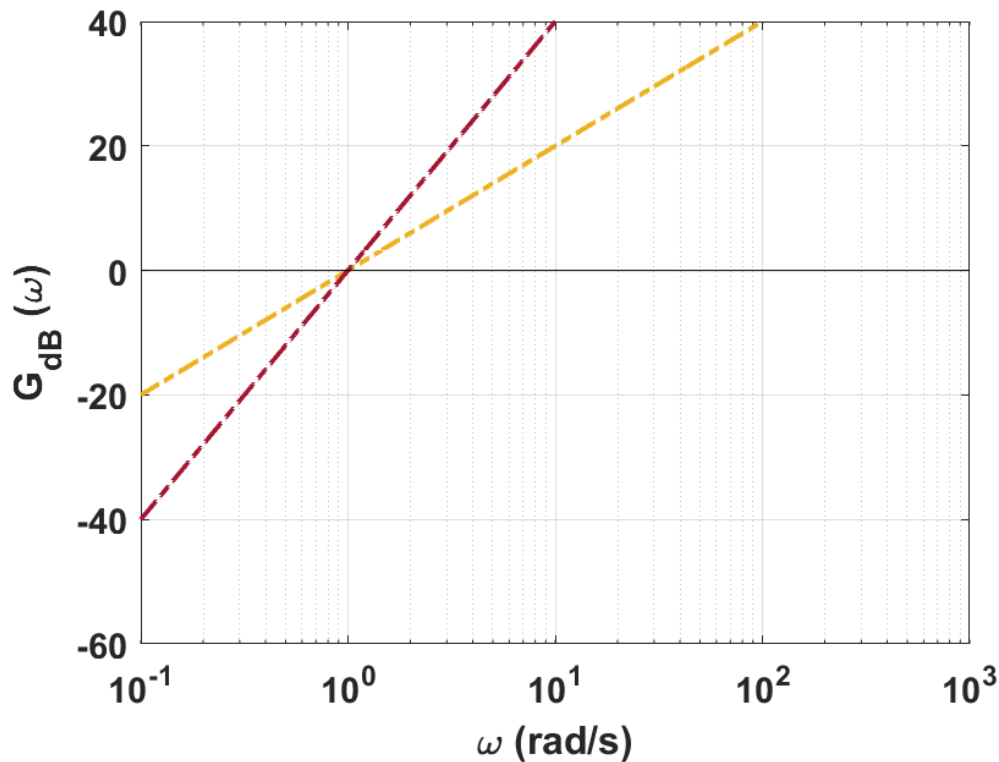


Diagramme de Bode –

Terme $1 + j \frac{\omega}{\omega_0}$

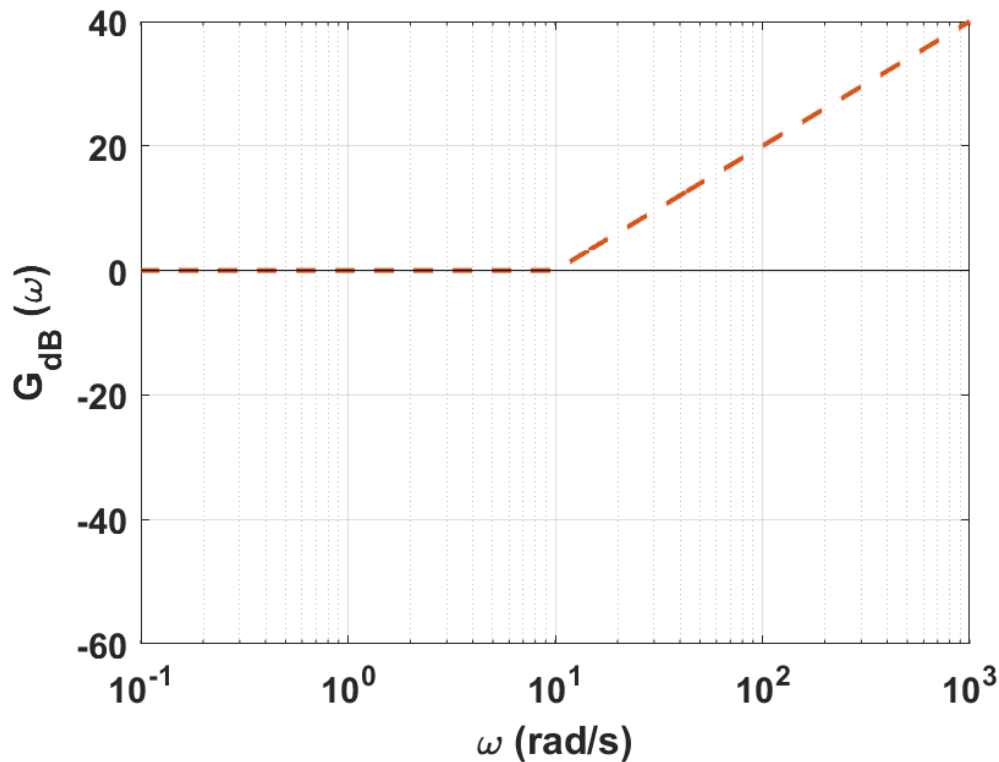
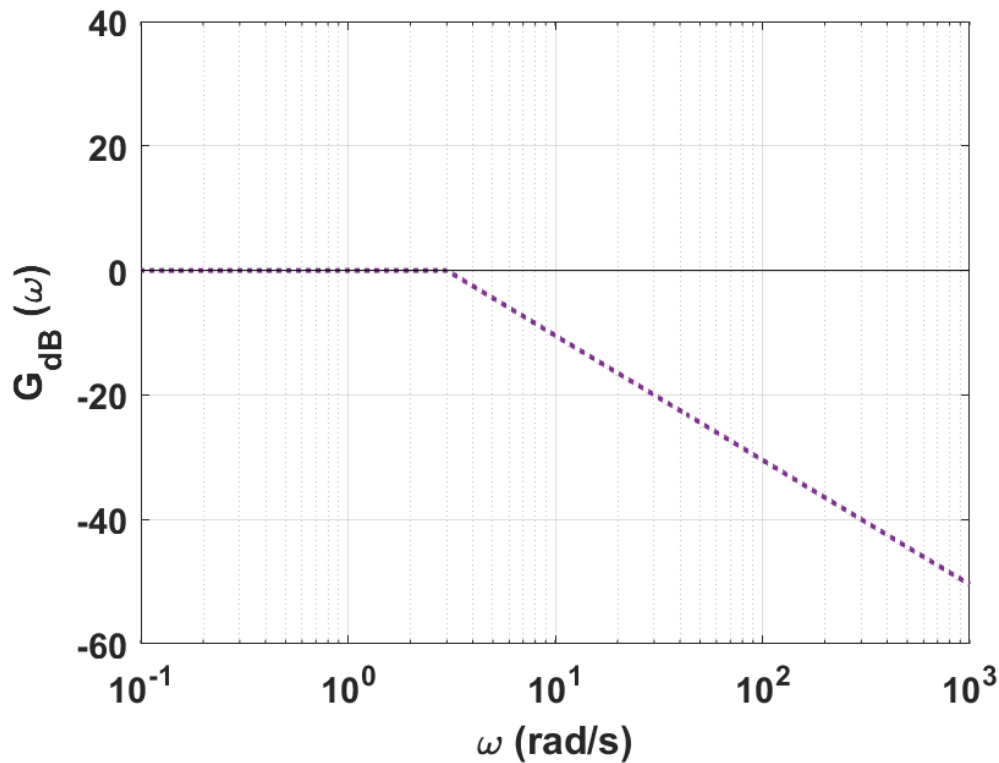
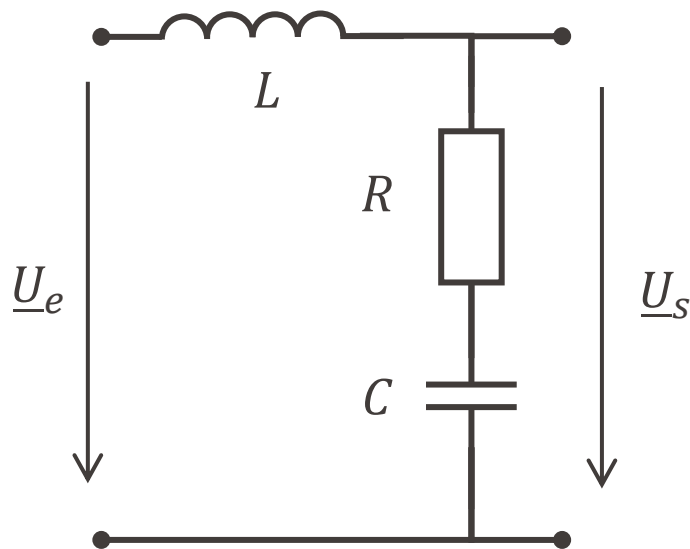


Diagramme de Bode –

Terme $\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$



Exemple



$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

$$R = 10 \, \Omega$$

$$C = 100 \, \text{mF}$$

$$L = 200 \, \text{mH}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + j\omega}{1 + j\omega - 0.02\omega^2}$$

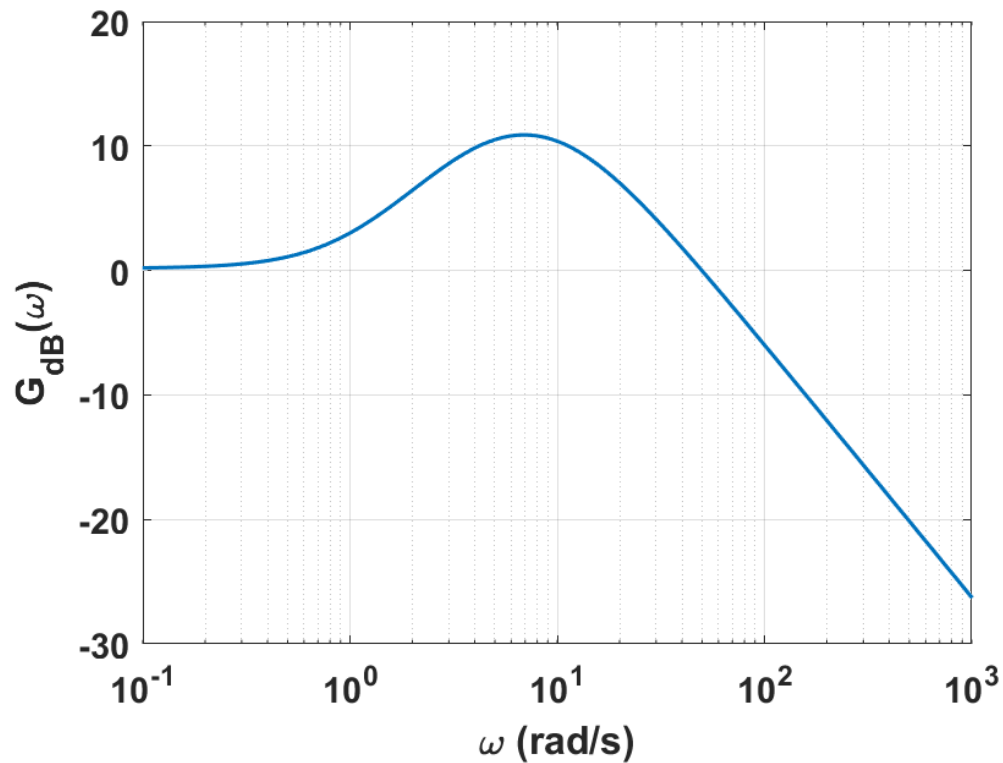
$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{1}}{\left(1 + j\frac{\omega}{5}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)}$$

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} \left(\left| 1 + j\frac{\omega}{1} \right| \right) \\ + 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\left| 1 + j\frac{\omega}{5} \right|} \right) \\ + 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\left| 1 + j\frac{\omega}{10} \right|} \right)$$

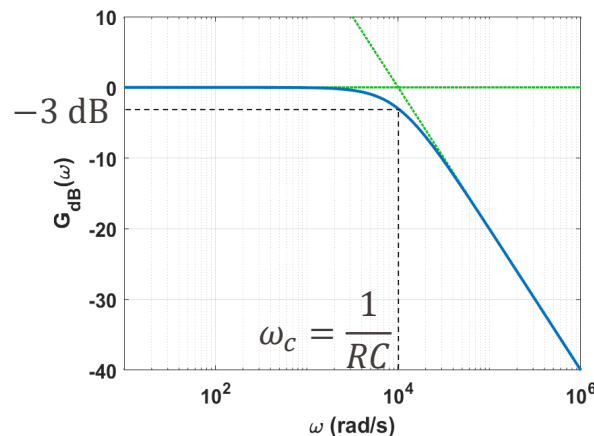
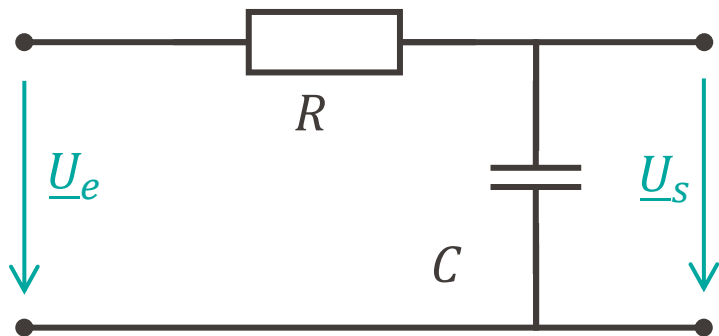
$$G_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} \left(\left| 1 + j \frac{\omega}{1} \right| \right)$$

$$+ 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\left| 1 + j \frac{\omega}{5} \right|} \right)$$

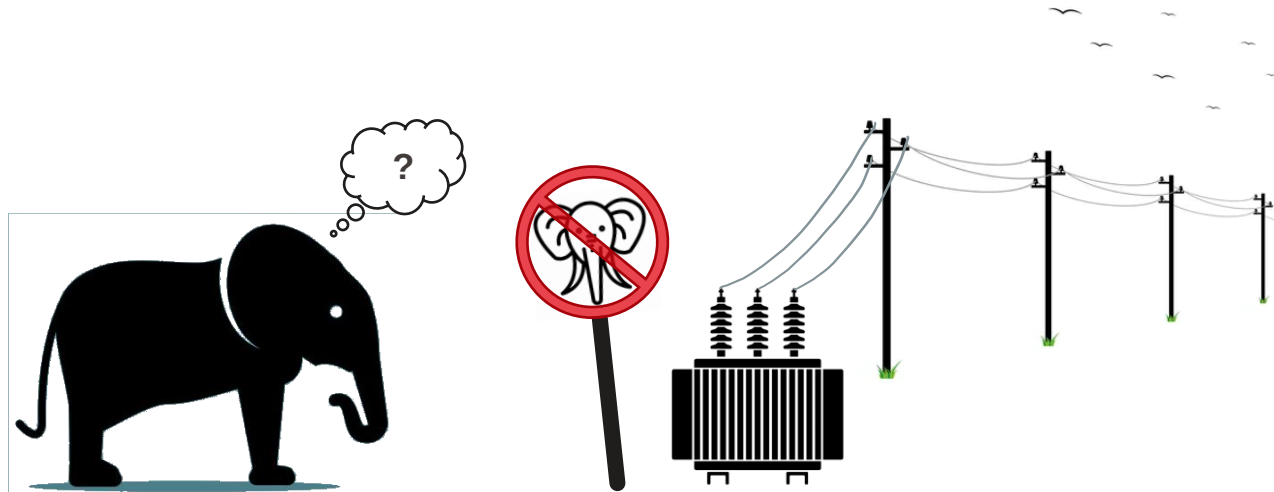
$$+ 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right|} \right)$$



- Le diagramme de Bode est un outil graphique pour étudier un système en régime permanent sinusoïdal
 - On trace la gain et la phase en échelle logarithmique
- On peut facilement tracer un diagramme asymptotique
 - Uniquement en traçant des droites
- On définit une nouvelle unité: le décibel (dB)



Puissance en régime permanent sinusoïdal



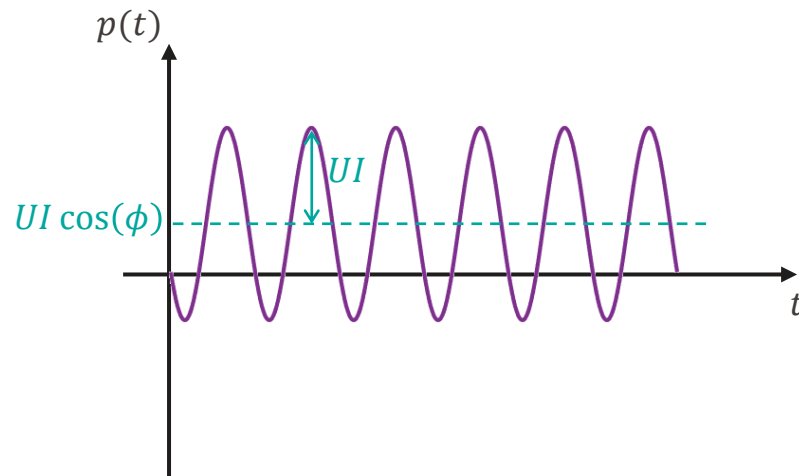
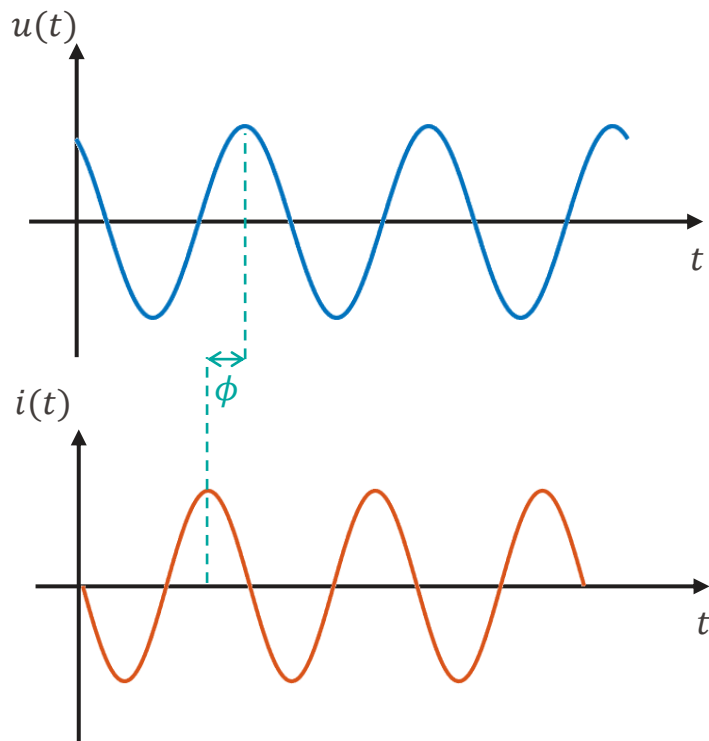
- En régime statique, on a vu: $P = UI$
- On définit la puissance instantanée: $p(t) = u(t)i(t)$
- Avec $u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \alpha)$ et $i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \beta)$:

$$p(t) = \hat{U}\hat{I}\cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta)$$

$$p(t) = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{\hat{U}\hat{I}}{2}\cos(2\omega t + \alpha + \beta)$$

Constante **Sinusoïde de fréquence 2ω**

$$p(t) = UI\cos(\phi) + UI\cos(2\omega t + 2\alpha - \phi)$$



- La puissance moyenne dépend du déphasage
- La puissance instantanée oscille avec une amplitude UI
- On peut décomposer la puissance instantanée en deux parties:
 - Une partie toujours positive (puissance consommée)
 - Une partie alternative (à valeur moyenne nulle)

- La puissance moyenne dépend du déphasage
- La puissance instantanée oscille avec une amplitude UI
- On peut décomposer la puissance instantanée en deux parties:
 - Une partie toujours positive (puissance consommée)
 - Une partie alternative (à valeur moyenne nulle)

$$p(t) = UI \cos(\phi) + UI \cos(2\omega t + 2\alpha - \phi)$$

$$\Leftrightarrow p(t) = UI \cos(\phi) + UI [\cos(2\omega t + 2\alpha) \cos(\phi) + \sin(2\omega t + 2\alpha) \sin(\phi)]$$

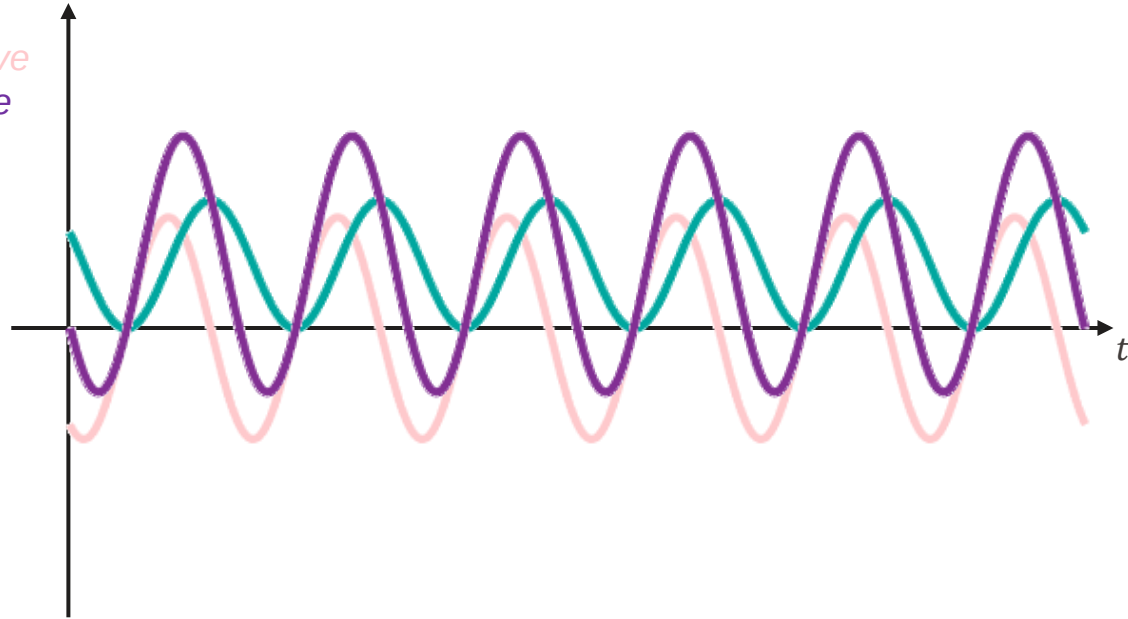
$$\Leftrightarrow p(t) = UI \cos(\phi) [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)] + UI \sin(\phi) \sin(2\omega t + 2\alpha)$$

Composante pulsée

Composante alternative

$$p(t) = UI \cos(\phi) [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)] + UI \sin(\phi) \sin(2\omega t + 2\alpha)$$

Composante pulsée
Composante alternative
Puissance instantanée



$$p(t) = \underbrace{UI \cos(\phi) [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)]}_{\text{Composante pulsée}} + \underbrace{UI \sin(\phi) \sin(2\omega t + 2\alpha)}_{\text{Composante alternative}}$$

- On appelle **puissance active P** la valeur moyenne de la puissance instantanée
- En régime sinusoïdal, on a donc:
$$P = UI \cos(\phi)$$
- L'unité est le watt (W)
- Elle correspond à l'énergie convertible en travail ou en chaleur
 - Elle est maximale pour $\phi = 0$
 - Elle est nulle pour $\phi = \pm\pi/2$

Puissance réactive

$$p(t) = \underbrace{UI \cos(\phi) [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)]}_{\text{Composante pulsée}} + \underbrace{UI \sin(\phi) \sin(2\omega t + 2\alpha)}_{\text{Composante alternative}}$$

- On appelle **puissance réactive Q** l'amplitude de composante alternative
- En régime sinusoïdal, on a donc:
$$Q = UI \sin(\phi)$$
- L'unité est le volt-ampère réactif (VAr)
- Elle correspond une énergie non convertible
 - Elle est maximale pour $\phi = \pm\pi/2$
 - Elle est nulle pour $\phi = 0$

Puissance apparente

$$p(t) = \underbrace{UI \cos(\phi) [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)]}_{\text{Composante pulsée}} + \underbrace{UI \sin(\phi) \sin(2\omega t + 2\alpha)}_{\text{Composante alternative}}$$

- On appelle **puissance apparente** S l'amplitude de des fluctuations de la puissance instantanée par rapport à sa valeur moyenne
- En régime sinusoïdal, on a donc:
$$S = UI$$
- L'unité est le volt-ampère (VA)
- Elle est liée à P et Q par:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- On définit la puissance complexe par:

$$\underline{S} = P + jQ$$

- On peut aussi écrire:

$$\underline{S} = UI \cos(\phi) + jUI \sin(\phi) = UI e^{j\phi}$$

- Cette grandeur contient toutes les informations sur la puissance instantanée:
 - $\text{Re}(\underline{S}) = P$; $\text{Im}(\underline{S}) = Q$
 - $|\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = S$
 - $\arg(\underline{S}) = \phi$

- Enfin, on a aussi:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$$

- Pour une impédance $\underline{Z}$:

$$\underline{S} = \underline{Z} I^2 = \frac{U^2}{\underline{Z}^*}$$

- En posant $\underline{Z} = R + jX$:

$$\underline{S} = RI^2 + jXI^2$$

Que vaut la puissance apparente?

$$u(t) = 20 \cos\left(5000t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$i(t) = 12 \cos\left(5000t + \frac{\pi}{6}\right)$$

- A. $S = 240 \text{ VA}$
- B. $S = 120 \text{ VA}$
- C. $S = 207.8 \text{ VA}$
- D. $S = 103.9 \text{ VA}$
- E. $S = 60 \text{ VA}$

Que vaut la puissance active?

$$u(t) = 20 \cos\left(5000t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$i(t) = 12 \cos\left(5000t + \frac{\pi}{6}\right)$$

- A. $P = 240 \text{ W}$
- B. $P = 120 \text{ W}$
- C. $P = 207.8 \text{ W}$
- D. $P = 103.9 \text{ W}$
- E. $P = 60 \text{ W}$

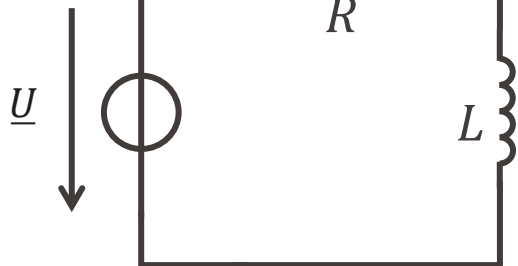
Que vaut la puissance réactive?

$$u(t) = 20 \cos\left(5000t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$i(t) = 12 \cos\left(5000t + \frac{\pi}{6}\right)$$

- A. $Q = 240 \text{ VAr}$
- B. $Q = 120 \text{ VAr}$
- C. $Q = 207.8 \text{ VAr}$
- D. $Q = 103.9 \text{ VAr}$
- E. $Q = 60 \text{ VAr}$

Exemple



$$\underline{U} = 230 \text{ V}$$

$$R = 5 \, \Omega$$

$$L = 10 \text{ mH}$$

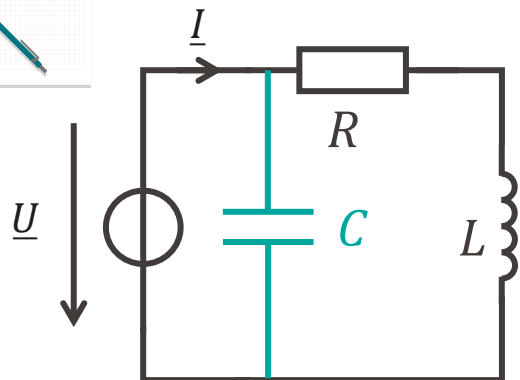
$$f = 50 \text{ Hz}$$

- Le facteur de puissance est le rapport de la puissance active et de la puissance apparente:

$$FP = \frac{P}{S} = \cos(\phi)$$

- Pour une charge purement résistive, $\phi = 0$ donc $FP = 1$
- En présence d'une charge réactive, le facteur de puissance diminue
- Cela augmente les pertes au niveau du réseau électrique (et peut alors augmenter les coûts de l'électricité)

Exemple: correction de facteur de puissance



$$\underline{U} = 230 \text{ V}$$

$$R = 5 \, \Omega$$

$$L = 10 \text{ mH}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

Que doit valoir C pour annuler la puissance réactive?

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$U = 230 \text{ V}$$

$$P = 7.59 \text{ kW}$$

$$Q = 4.77 \text{ kVAr}$$

$$S = 8.96 \text{ kVA}$$

- A. $C = 1.8 \text{ mF}$
- B. $C = 287 \text{ }\mu\text{F}$
- C. $C = 3.5 \text{ kF}$
- D. $C = 555 \text{ F}$
- E. $C = 35.3 \text{ mF}$
- F. $C = 222 \text{ mF}$



- En régime permanent sinusoïdal, on définit une puissance complexe:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ$$

- P est la puissance active, en W: puissance convertie
 - Q est la puissance réactive, en VAR: puissance alternative
 - $S = |\underline{S}|$ est la puissance apparente, en VA
-
- La qualité d'un système électrique peut être quantifiée par le facteur de puissance:

$$FP = \frac{P}{S} = \cos(\phi)$$

R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris



**Merci pour votre
attention**