Modèles stochastiques pour les communications
Test 1

Faculté I&C, 5ième semestre

NOM et prénom :

Si une page est dégraphée, veillez à indiquer votre nom dessus. Il y a 7 pages. Vos justifications doivent être rigoureuses et complètes.

Abbréviations: v.a. = variable aléatoire. Primitives pouvant être utiles:

$$\begin{aligned} \int \cos(x)dx &= \sin(x) \\ \int x\cos(x)dx &= \cos(x) + x\sin(x) \end{aligned}$$

Maximum: 20 points

Question 1 (3 points)

Le nombre d'étudiants X_i (respectivement, X_j) inscrits dans une section i (respectivement, j) de l'EPFL suit une loi géométrique sur le domaine $S_{X_i} = S_{X_j} = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ de même paramètre p avec $0 < p < 1$; X_i et X_j sont statistiquement indépendants. Quelle est la probabilité que deux sections i et j comptent exactement le même nombre d'étudiants ?

Question 2 (5 points)

Soient A et B deux v.a. continues indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, 2]$.

1. (2pts) Quelle est la probabilité pour que l'équation du second degré en la variable $x \in \mathbb{R}$

$$Ax^2 + 2x + 1 = 0$$

n'admette aucune racine réelle ?

2. (3pts) Quelle est la probabilité pour que l'équation du second degré en la variable $x \in \mathbb{R}$

$$Ax^2 + 2Bx + 1 = 0$$

n'admette aucune racine réelle ?

Question 3 (3 points)

L'expérience suivante est menée à un festival de musique en plein air, pour estimer la densité spatiale de participants au festival. La surface du terrain où le festival se déroule est découpée en petites surfaces carrées. Un agent parcourt le terrain du festival, se déplaçant aléatoirement d'un petit carré à un autre. Les carrés sont de taille suffisamment petite pour qu'il puisse compter le nombre de participants qui se trouvent dans le carré qu'il visite. Le nombre X de participants par carré suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Si l'agent observe un nombre strictement positif de participants dans un carré, il le reporte. Par contre, s'il trouve un carré vide de participants, il ne reporte rien, et on ignore si ce carré a été visité par l'agent ou non. Soit Y la v.a. désignant le nombre de participants sur un carré que l'agent reporte. On a donc $\mathbb{P}(Y = i) = \mathbb{P}(X = i \mid X > 0)$. Que vaut le nombre moyen $\mathbb{E}[Y]$ de participants reportés par carré ?

Question 4 (9 points)

Soient A et Φ deux v.a. continues indépendantes. La densité de probabilité de A est $f_A(a) = a\exp(-a^2/2)$ pour tout $a \geq 0$ et $f_A(a) = 0$ sinon, tandis que Φ est uniformément distribué dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. On construit les processus

$$\begin{aligned} X(t) &= A\cos(2\pi t + \Phi) \\ Y(t) &= A\sin(2\pi t + \Phi). \end{aligned}$$

1. (2pts) Déterminez la fonction d'auto-corrélation $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$ du premier processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

2. (1pt) Montrez que la fonction de cross-corrélation $R_{XY}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)Y(t_2)]$ de ces deux processus est $R_{XY}(t_1, t_2) = \alpha \sin(2\pi(t_2 - t_1))$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ que vous devez calculer.

3. (2pts) Considérons les deux v.a $X(t)$ et $Y(t)$ obtenues en échantillonnant les deux processus au même temps $t \in \mathbb{R}$. Déterminez la densité de probabilité jointe $f_{XY}(x, y; t)$ des deux v.a. $X(t)$ et $Y(t)$.

4. (1pt) Existe-t-il des instants t_1 et t_2 tels que $X(t_1)$ et $Y(t_2)$ sont deux v.a. statistiquement *indépendantes* ? Si oui, donnez un exemple de tels instants t_1 et t_2, et justifiez pourquoi $X(t_1)$ et $Y(t_2)$ sont deux v.a. indépendantes. Sinon, expliquez pourquoi $X(t_1)$ et $Y(t_2)$ ne sont jamais indépendantes quels que soient t_1 et t_2.

5. (1pt) Existe-t-il des instants t_1 et t_2 tels que $X(t_1)$ et $Y(t_2)$ sont deux v.a. statistiquement *dépendantes* ? Si oui, donnez un exemple de tels instants t_1 et t_2, et justifiez pourquoi $X(t_1)$ et $Y(t_2)$ sont deux v.a. dépendantes. Sinon, expliquez pourquoi $X(t_1)$ et $Y(t_2)$ sont toujours indépendantes quels que soient t_1 et t_2.

6. (2pts) Le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est-il ergodique par rapport à sa moyenne ? Justifiez votre réponse.