

Modèles stochastiques pour les communications

Test 1

Faculté I&C, 5ième semestre

NOM et prénom :

Si une page est dégraphée, veuillez à indiquer votre nom dessus. Il y a 5 pages. Vos justifications doivent être rigoureuses et complètes. Abréviations: v.a. = variable aléatoire.

Maximum: 20 points

Question 1 (5 points)

Dans un carré unitaire $[0, 1] \times [0, 1]$, on génère un point (X, Y) aléatoirement, dont les coordonnées X et Y sont deux v.a. uniformes sur $[0, 1]$ et indépendantes.

Nous nous intéressons à la distance D entre le point (X, Y) et la diagonale (de $(0, 0)$ à $(1, 1)$).

1. (2pts) Calculez sa fonction de répartition $F_D(d)$. (Hint: la probabilité que $D \leq d$ est proportionnelle à l'aire de l'ensemble des points à une distance $\leq d$ de la diagonale).
2. (1pt) Calculez la densité $f_D(d)$.
3. (1pt) Démontrez que la moyenne d'une v.a. non-négative X peut se calculer comme ceci:
$$E[X] = \int_0^\infty P(X > x) dx.$$
4. (1pt) Calculez la moyenne de D . (Hint: vous pouvez vous inspirer de la sous-question 3 ci-dessus).

La compagnie Okina fabrique des téléphones mobiles de qualité douteuse. Spécifiquement, la “qualité” d’un appareil est donnée par une v.a. X dont la distribution est la suivante:

Sachant qu'un appareil est d'une qualité $X = x$, sa durée de vie en années T est distribuée géométriquement avec moyenne x (c.à.d., $P(T = t|X = x) = x^{-1}(1 - x^{-1})^{(t-1)}$, avec $S_T = \{1, 2, 3, \dots\}$).

1. (2pts) Calculez la distribution de T .
2. (1pt) T est-il sans mémoire? Justifiez.
3. (2pts) Pour un appareil âgé de $t = 5$ ans (et encore fonctionnel), calculez la distribution conditionnelle $P(X = x|T = 5)$ de sa qualité X .

Question 3 (6 points)

L'amplitude d'un signal $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ suit une loi mixte, dont la fonction de répartition marginale du premier ordre est, avec $\mathbf{1}_A$ désignant l'indicatrice de A ,

$$F_{X(t)}(x; t) = \mathbb{P}(X(t) \leq x) = (1 - \exp(-x)/2)\mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1 - \exp(-x)/2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Elle change toutes les T secondes, et l'amplitude dans un intervalle est indépendante de l'amplitude dans un intervalle précédent. Le premier instant de changement D est une v.a. uniformément répartie dans l'intervalle de temps $[0, T]$.

1. (1pt) Déterminez la densité de probabilité marginale du premier ordre $f_X(x; t)$ de $X(t)$ (Observez que $X(t)$ est une v.a. mixte).

2. (1pt) Déterminez l'espérance $\mathbb{E}[X(t)]$ de $X(t)$.

3. (2pts) Déterminez la fonction d'auto-corrélation $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$ de ce processus.

4. (1pt) Le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est-il stationnaire au sens large ? Justifiez précisément et complètement votre réponse.

5. (1pt) Le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est-il ergodique par rapport à sa moyenne ? Justifiez précisément et complètement votre réponse.

Question 4 (4 points)

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus gaussien stationnaire dont la moyenne est nulle et dont la densité spectrale de puissance, notée $S_X(f)$, est telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df = 4.$$

1. (2pts) Avez-vous suffisamment d'information pour déterminer la densité de probabilité marginale du premier ordre $f_{X(t)}(x; t)$ de $X(t)$ pour tout $x, t \in \mathbb{R}$? Si oui, déterminez cette fonction. Sinon, expliquez précisément quelles données supplémentaires vous manquent pour pouvoir déterminer complètement cette fonction.
2. (2pts) Avez-vous suffisamment d'information pour déterminer la densité de probabilité marginale du deuxième ordre $f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ de $X(t)$ pour tout $x_1, x_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$? Si oui, déterminez cette fonction. Sinon, expliquez précisément quelles données supplémentaires vous manquent pour pouvoir déterminer complètement cette fonction.