

Modèles stochastiques pour les communications

Test

Faculté I&C, 5ième semestre

NOM et prénom : Solution

Si une page est dégraphée, veuillez à indiquer votre nom dessus. Il y a 7 pages. Les réponses aux deux premières questions doivent détailler les (principales) étapes de vos calculs. Quand elles sont demandées, vos justifications doivent être rigoureuses et complètes. Les réponses aux questions à choix multiple regroupées sous la question 3 sont un choix entre trois réponses possibles (sans autre détail à fournir).

Abbréviations : v.a. = variable aléatoire ; i.i.d. = indépendantes et identiquement distribuées.

Maximum : 30 points

Question 1 (9 points)

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ un ensemble de n v.a i.i.d continues uniformément distribuées dans l'intervalle $[0, 1]$ à partir desquelles on construit les deux v.a.

$$\begin{aligned} Y &= \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \\ Z &= \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}. \end{aligned}$$

1. (2pts) Calculez $P(Y \leq y)$ pour tout $0 < y < 1$.

Solution : Comme pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbb{P}(X_i \leq y) = \int_0^y f_X(x) dx = \int_0^y 1 dx = y$$

.

on trouve

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_n \leq y) = \mathbb{P}^n(X_i \leq y) = y^n.$$

2. (2pts) Calculez $P(Z \leq z)$ pour tout $0 < z < 1$.

Solution : Comme pour tout $1 \leq i \leq n$, $\mathbb{P}(X_i > z) = 1 - z$,

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - \mathbb{P}(Z > z) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > z, X_2 > z, \dots, X_n > z) = 1 - \mathbb{P}^n(X_i > z) = 1 - (1 - z)^n.$$

3. (2pts) Les v.a. Y et Z sont-elles indépendantes ? Justifiez rigoureusement votre réponse.

Solution : Non, car

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq y, Z \leq Z) &= \mathbb{P}(Y \leq y) - \mathbb{P}(Y \leq y, Z > z) = y^n - \mathbb{P}^n(z < X_i \leq z) \\ &= y^n - (y - z)^n \\ &\neq y^n \cdot (1 - (1 - z)^n) = \mathbb{P}(Y \leq y) \cdot \mathbb{P}(Z \leq z).\end{aligned}$$

Encore plus simplement, il suffit de constater que pour tout $0 < z < 1$, l'évènement $\{Z \geq z\}$ entraîne (et est donc inclus dans) l'évènement $\{Y \geq z\}$. Ces deux évènements ne sont donc pas indépendants, ce qui implique que les deux v.a. Y et Z ne sont pas indépendantes.

4. (2pts) Calculez la variance $\sigma_Y^2 = \text{VAR}(Y)$ de la v.a. Y .

Solution : Comme

$$f_Y(y) = \frac{dy^n}{dy} = ny^{n-1}$$

pour $0 < y < 1$, on trouve

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 ny^n dy = \frac{n}{n+1}$$

et

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^1 ny^{n+1} dy = \frac{n}{n+2}$$

d'où

$$\sigma_Y^2 = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}^2[Y] = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

5. (1pt) Calculez la variance $\sigma_Z^2 = \text{VAR}(Z)$ de la v.a. Z . Conseil : Vous pouvez obtenir la réponse à cette dernière sous-question soit par calculs, soit à partir de la réponse à la sous-question précédente.

Solution :

Méthode courte : Par symétrie entre $Y = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ et $Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ sur l'intervalle $[0, 1]$, on a directement $\mathbb{E}[Z] = 1 - \mathbb{E}[Y] = 1/(n+1)$ et

$$\sigma_Z^2 = \sigma_Y^2 = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Méthode longue : Par calculs, on trouve de même, comme

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} (1 - (1-z)^n) = n(1-z)^{n-1}$$

pour $0 < z < 1$,

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^1 nz(1-z)^{n-1}dz = n \int_0^1 (1-y)y^{n-1}dy = n \int_0^1 (y^{n-1} - y^n)dy = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^2] &= \int_0^1 nz^2(1-z)^{n-1}dz = n \int_0^1 (1-y)^2 y^{n-1}dy \\ &= n \int_0^1 (y^{n-1} - 2y^n + y^{n+1})dy = 1 - \frac{2n}{n+1} + \frac{n}{n+2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

d'où

$$\sigma_Z^2 = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}^2[Z] = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Question 2 (7 points)

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ un processus gaussien qui a les propriétés suivantes :

- il est défini sur $\mathbb{R}^+$ (i.e., pour tout $t \geq 0$), avec $X(0) = 0$,
- sa moyenne est nulle pour tout $t \geq 0$,
- sa variance est égale à t pour tout $t \geq 0$,
- ses accroissements sont indépendants, ce qui veut dire que pour tout $0 \leq t_1 < t_2$, la v.a. $(X(t_2) - X(t_1))$ est indépendante de la v.a. $X(t_1)$.

1. (4pts) Calculez la fonction d'auto-corrélation $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$ de ce processus pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$.

Solution : Prenons, sans perte de généralité, $t_1 \leq t_2$. Alors comme les accroissements sont indépendants,

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathbb{E}[X(t_1)(X(t_2) - X(t_1) + X(t_1))] \\ &= \mathbb{E}[X(t_1)(X(t_2) - X(t_1))] + \mathbb{E}[X^2(t_1)] \\ &= \mathbb{E}[X(t_1)] \cdot \mathbb{E}[X(t_2) - X(t_1)] + \mathbb{E}[X^2(t_1)] = 0 \cdot 0 + t_1 = t_1 \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte des hypothèses sur les moyennes et variances.

Le même calcul donne $R_X(t_1, t_2) = t_2$ si $t_1 \geq t_2$.

Par conséquent, pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$,

$$R_X(t_1, t_2) = \min\{t_1, t_2\}.$$

2. (1pt) Le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ est-il stationnaire au sens strict ? Justifiez rigoureusement votre réponse.

Solution : Non, car sa moyenne étant nulle et sa variance étant égale à t pour tout $t \geq 0$, $R_X(t, t) = t$ ce qui montre le processus n'est pas WSS et donc pas SSS.

3. (2pts) Soit $Y(t) = |X(t)|$. Calculez la moyenne $\mathbb{E}[Y(t)]$ de $Y(t)$.

Solution : Comme

$$f_{X(t)}(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-x^2/(2t)\right),$$

on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y(t)] &= \mathbb{E}[|X(t)|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_{X(t)}(x; t) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \exp\left(-x^2/(2t)\right) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} x \exp\left(-x^2/(2t)\right) dx = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \left[\exp\left(-x^2/(2t)\right) \right]_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}. \end{aligned}$$

Question 3 (14 points)

Pour cette question, toutes les sous-questions à choix multiple (QCM) ont une et une seule réponse. Cochez celle qui convient. Notation :

- Réponse correcte = +2 point
- Réponse fausse = -1 point
- Réponse "Je ne sais pas" ou absence de réponse = 0 point

QCM 1 : Soit $\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$ un processus stochastique à temps discret stationnaire au sens strict et ergodique par rapport à sa moyenne. Soit $Y(n) = X^2(n)$. Laquelle des propositions suivantes sur $\{Y(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est vraie ?

- ☐ Le processus $\{Y(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire au sens strict et ergodique par rapport à sa moyenne.
- ☒ Le processus $\{Y(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire au sens strict mais peut ne pas être ergodique par rapport à sa moyenne.
- ☐ Le processus $\{Y(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est ergodique par rapport à sa moyenne mais peut ne pas être stationnaire au sens strict.
- ☐ Je ne sais pas.

QCM 2 : Soit $\{N(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. Si $0 < t' < t$, que vaut $\mathbb{P}(N(t') = 0 \mid N(t) = 2)$?

- ☐ $\mathbb{P}(N(t') = 0 \mid N(t) = 2) = \exp(-\lambda t')$.
- ☒ $\mathbb{P}(N(t') = 0 \mid N(t) = 2) = (1 - t'/t)^2$.
- ☐ $\mathbb{P}(N(t') = 0 \mid N(t) = 2) = \lambda^2(t - t')^2 \exp(-\lambda(t - t')/2)$.
- ☐ Je ne sais pas.

QCM 3 : Soient X une v.a continue dont la fonction caractéristique est notée $\Phi_X(\omega)$, et soit $Y = 2X - 1$. La fonction caractéristique $\Phi_Y(\omega)$ de la v.a Y est

- ☐ $\Phi_Y(\omega) = 2\Phi_X(\omega) - 1$.
- ☐ $\Phi_Y(\omega) = \Phi_X(2\omega)\Phi_X(-\omega)$.
- ☒ $\Phi_Y(\omega) = \exp(-j\omega)\Phi_X(2\omega)$.
- ☐ Je ne sais pas.

QCM 4 : Soit $\{X_n\}_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telles que

$$X_n = \begin{cases} n & \text{avec probabilité } 1/n^2 \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - 2/n^2 \\ -n & \text{avec probabilité } 1/n^2. \end{cases}$$

Laquelle des propositions suivantes sur cette suite est vraie ?

- ☒ La suite $\{X_n\}_{n \geq 1}$ converge vers 0 presque sûrement, mais pas en moyenne quadratique.
- ☐ La suite $\{X_n\}_{n \geq 1}$ converge vers 0 en moyenne quadratique, mais pas presque sûrement.
- ☐ La suite $\{X_n\}_{n \geq 1}$ ne converge pas presque sûrement ni en moyenne quadratique.
- ☐ Je ne sais pas.

QCM 5 : Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus stationnaire au sens large dont la densité spectrale de puissance est $S_X(f)$, et $Y(t) = (X(t+T) + X(t-T))/2$ où $T \in \mathbb{R}$ est une constante déterministe. Que vaut la densité spectrale de puissance $S_Y(f)$ du processus $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$?

- ☐ $S_Y(f) = S_X(f)$.
- ☐ $S_Y(f) = S_X(f) \cos(2\pi fT)$.
- ☒ $S_Y(f) = S_X(f) \cos^2(2\pi fT)$.
- ☐ Je ne sais pas.

QCM 6 : Soient X et Y deux v.a. gaussiennes jointes centrées (i.e., de moyenne nulle), chacune de variance σ^2 . Leur covariance est $\text{COV}(X, Y) = \rho\sigma^2$, avec $-1 < \rho < 1$. Déterminez l'espérance de la v.a. $Z = X^2Y^2$.

- ☒ $\mathbb{E}[Z] = \sigma^4(1 + 2\rho^2)$.
- ☐ $\mathbb{E}[Z] = 3\sigma^4(1 + \rho^2)$.
- ☐ $\mathbb{E}[Z] = 3\sigma^4 + 6\sigma^4\rho^2$.
- ☐ Je ne sais pas.

QCM 7 : Soient X et Y deux v.a. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), dont la moyenne vaut 1 : $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 1$. Que vaut $\mathbb{E}[X \mid X + Y = 4]$?

- ☐ $\mathbb{E}[X \mid X + Y = 4] = 3$.
- ☒ $\mathbb{E}[X \mid X + Y = 4] = 2$.
- ☐ $\mathbb{E}[X \mid X + Y = 4] = 1$.
- ☐ Je ne sais pas.