

Solutions des exercices

s... sous réserves d'une erreur de ma part !

Module 1

1.

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)) \\
 &= P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)) \\
 &= P(B \cap A_1) + P((B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)) - P((B \cap A_1) \cap (B \cap \bar{A}_1)) \\
 &= \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i).
 \end{aligned}$$

$$2. P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)}.$$

$$3. \mu_X = \frac{1-p}{p} (1 - (1-p)^n).$$

$$4. P(X > t + T | X > t) = \frac{P(X > t+T)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+T)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda T} = P(X > T).$$

5. Si X est $\text{Bin}(n, p)$ avec $\lambda = np$, alors

$$G_X(z) = \left(1 - \frac{\lambda(1-z)}{n}\right)^n$$

qui tend vers $\exp(\lambda(z-1))$ car $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$.

6.

7.

$$8. (a) \Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Changement de variables $y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$:

$$\begin{aligned}
 \Phi_X(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2 - j\omega\sqrt{2}\sigma y - j\omega\mu)} dy \\
 &= e^{j\mu\omega - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y - \frac{j\omega\sigma}{\sqrt{2}})^2} dy \\
 &= e^{j\mu\omega - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}}.
 \end{aligned}$$

- (b) $E[X^3] = 0$ et $E[X^4] = 3\sigma^4$.
- (c) Y est une v.a. gaussienne ($\mu_Y = a\mu_X + b$, $\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$).
9. $f_Y(y) = 0$ pour $|y| > 1$, $f_Y(y) = 1/4$ pour $|y| < 1$ et $f_Y(y) = \delta(|y| - 1)/4$ pour $|y| = 1$.
10. $f_Y(y) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}}}{|-2\sqrt{y}|} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}}}{|2\sqrt{y}|} = \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}} \quad (y > 0)$.
- Y est une v.a. Chi-carré à un degré de liberté, $f_Y(y) = e^{-y/2}/\sqrt{2\pi y}$.
11. $f_Y(y) = 1/(\pi\sqrt{1-y^2})$ pour $|y| < 1$ et $f_Y(y) = 0$ sinon. $\mu_Y = 0$ et $\sigma_Y^2 = 1/2$.
12. Comme $P(X = k)$ est non croissant en $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(X = n) = \sum_{n=0}^k nP(X = n) + \sum_{n=k+1}^{\infty} nP(X = n) \\
 &\geq \sum_{n=0}^k nP(X = n) + 0 \\
 &\geq \sum_{n=0}^k nP(X = k) = P(X = k) \sum_{n=0}^k n = P(X = k) \frac{k(k+1)}{2} \\
 &\geq P(X = k) \frac{k^2}{2}
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire que $P(X = k) \leq 2E[X]/k^2$

13. L'inégalité de Markov entraine que si $Y \geq 0$ et $a > 0$

$$P(Y > a) \leq E[Y]/a$$

Pour s fixé, posons $X = \frac{1}{s} \ln Y$ et $x = \frac{1}{s} \ln a$. Dès lors $Y = e^{sX}$ et $a = e^{sx}$ et l'inégalité de Markov devient

$$P(e^{sX} > e^{sx}) \leq E[e^{sX}]/e^{sx}$$

Comme $P(e^{sX} > e^{sx}) = P(X > x)$ et $E[e^{sX}] = \hat{\Phi}_X(s)$ cette inégalité peut s'écrire pour tout s

$$P(X > x) \leq e^{-sx} \hat{\Phi}_X(s)$$

et porte le nom d'inégalité de Chernoff.

14. Pour $X \sim \text{expo}(\lambda)$ on a $\Phi_X(w) = \frac{\lambda}{\lambda - jw}$. Dès lors

$$E[X^n] = \frac{1}{j^n} \left. \frac{\partial^n \Phi_X(w)}{\partial w^n} \right|_{w=0} = \frac{n!}{\lambda^n}$$

Module 2

1. (a) $P(X = 0) = \sum_{i=1}^n p_i^2$
 (b) $P(X = j) = 2 \sum_{i=1}^{n-j} p_i p_{i+j}$ avec $j \geq 1$.

Pour (c) et (d), les formules suivantes sont utiles :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} i &= \frac{(n-1)n}{2} \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^3 &= \frac{(n-1)^2 n^2}{4}\end{aligned}$$

- (c) $\mu_X = (n^2 - 1)/3n$
 (d) $\sigma_X^2 = (n^2 - 1)(n^2 + 2)/18n^2$.
2. (a) $k = 2/\pi$
 (b) $f_X(x) = 2\sqrt{1-x^2}/\pi$ si $|x| \leq 1$ et 0 sinon ; $f_Y(y) = 4\sqrt{1-y^2}/\pi$ si $0 < y \leq 1$ et 0 sinon.
 (c) $f_{Y|X}(y|x) = 1/\sqrt{1-x^2} I_{0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}}$ si $|x| \leq 1$ et 0 sinon.
3. (a) $k = 1$
 (b) $f_X(x) = 1 - |x|$ si $|x| \leq 1$ et 0 sinon ; $f_Y(y) = 2(1-y)$ si $0 < y \leq 1$ et 0 sinon.
 (c) $f_{Y|X}(y|x) = 1/(1-|x|) I_{0 \leq y \leq 1-|x|}$ si $|x| \leq 1$ et 0 sinon.
4. (a) $f_{R\Theta}(r, \theta) = (r/2\pi) \exp(-r^2/2)$
 (b) Elles sont indépendantes.
 (c) $f_R(r) = r \exp(-r^2/2)$
 (d) $a = \sqrt{2 \ln 2}$
5. $a = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}$ et $b = \frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}$.
6. $\mu_{S_n} = n\mu$ et $\sigma_{S_n}^2 = (n + 2(n-1)\rho)\sigma^2$.
- 7.
8. Elles sont orthogonales, non corrélées et dépendantes.
9. On a

$$(X_n - a)^2 = (X_n - a_n + a_n - a)^2 \leq 2(X_n - a_n)^2 + 2(a_n - a)^2$$
 d'où en prenant les espérances,

$$E[(X_n - a)^2] \leq 2E[(X_n - a_n)^2] + 2(a_n - a)^2$$

et ensuite les limites

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n - a)^2] &\leq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n - a_n)^2] + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

10. $f_{Z|X}(z|x) = f_Y(z - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2}\right).$

11. (a) On a

$$\begin{aligned} P(\Theta_n \geq k) &= P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \geq k) = P(X_1 \geq k, \dots, X_n \geq k) \\ &= P(X_1 \geq k)P(X_2 \geq k) \dots P(X_n \geq k) \\ &= \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n \end{aligned}$$

(b) $P(\Theta_n \geq k) = P(\Theta_n = k) + P(\Theta_n \geq k+1)$. Ce qui implique

$$\begin{aligned} P(\Theta_n = k) &= P(\Theta_n \geq k) - P(\Theta_n \geq k+1) \\ &= \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n. \end{aligned}$$

12. (a) On écrit, après quelques calculs

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) &= \frac{1}{2\sigma_X^2 \sigma_Y^2 (1 - \rho^2)} \left[\sigma_Y^2 (x - \mu_X)^2 + \sigma_X^2 (y - \mu_Y)^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_X^2 \sigma_Y^2 (1 - \rho^2)} [2\rho\sigma_X\sigma_Y(x - \mu_X)(y - \mu_Y)] \\ &= \frac{1}{2(1 - \rho^2)\sigma_X^2} \left[x - \left(\mu_X + \frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y) \right) \right]^2 + \frac{(y - \mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_X^2} \left[x - \left(\mu_X + \frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y) \right) \right]^2} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} \end{aligned}$$

car la partie entre crochets correspond à une v.a. $N\left(\mu_X + \frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y), \sigma_X \sqrt{1 - \rho^2}\right)$.

(b)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_X^2} \left[x - \left(\mu_X + \frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y) \right) \right]^2}$$

(c) A partir du résultat en b) on a directement

$$E[X|Y = y] = \mu_X + \frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y)$$

(d)

$$VAR[X|Y = y] = \sigma_X^2(1 - \rho^2)$$

13. Pour $m = n$, on a évidemment $E\left[\frac{S_n}{S_n}\right] = E[1] = 1$. D'autre part, les v.a. X_i étant indépendantes est identiquement distribuées,

$$E\left[\frac{S_1}{S_n}\right] = E\left[\frac{X_1}{X_1 + \dots + X_n}\right] = E\left[\frac{X_2}{X_1 + \dots + X_n}\right] = \dots = E\left[\frac{X_n}{X_1 + \dots + X_n}\right]$$

Comme

$$\frac{S_n}{S_n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{X_1 + \dots + X_n} = \frac{X_1}{X_1 + \dots + X_n} + \dots + \frac{X_n}{X_1 + \dots + X_n}$$

en prenant les espérances on obtient

$$E\left[\frac{S_n}{S_n}\right] = E\left[\frac{X_1}{X_1 + \dots + X_n}\right] + \dots + E\left[\frac{X_n}{X_1 + \dots + X_n}\right] = nE\left[\frac{S_1}{S_n}\right]$$

d'où $E\left[\frac{S_1}{S_n}\right] = \frac{1}{n}$.

Finalement,

$$E\left[\frac{S_m}{S_n}\right] = E\left[\frac{X_1}{X_1 + \dots + X_n}\right] + \dots + E\left[\frac{X_m}{X_1 + \dots + X_n}\right] = mE\left[\frac{S_1}{S_n}\right] = \frac{m}{n}$$

14. (a) En appliquant le théorème des probabilités totales, on a

$$P(X = n) = \int_0^\infty P(X = n|\Lambda = \lambda)f_\Lambda(\lambda)d\lambda = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \lambda^n e^{-2\lambda} d\lambda$$

Pour évaluer cette intégrale, soit on intègre n fois par parties, soit on consulte des tables, soit on pose $x = 2\lambda$ et on remarque que

$$\int_0^\infty \lambda^n e^{-2\lambda} d\lambda = \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \frac{1}{2^{n+1}} E[X^n] = \frac{n!}{2^{n+1}}$$

où $X \sim \text{expo}(1)$. Dès lors

$$P(X = n) = \frac{1}{n!} \frac{n!}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

- (b) *Méthode 1* : Comme on connaît la loi de probabilité $P(X = n)$, on peut calculer la fonction génératrice de X :

$$G_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{2 - z}$$

D'où on tire que

$$E[X] = \left. \frac{\partial G_X(z)}{\partial z} \right|_{z=1} = 1$$

Méthode 2 : à partir du théorème des probabilités totales on a

$$E[X] = \int_0^{\infty} E(X|\Lambda = \lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda} d\lambda = 1$$

En effet $E(X|\Lambda = \lambda)$ est l'espérance d'une v.a. de Poisson de paramètre Λ fixé égal à λ . Remarquez que cette méthode ne nécessite pas la connaissance des $P(X = n)$.

- (c) *Méthode 1* :

$$E[X^2] = E[X(X-1)] + E[X] = \left. \frac{\partial^2 G_X(z)}{\partial z^2} \right|_{z=1} + 1 = \left. \frac{2}{(2-z)^3} \right|_{z=1} + 1 = 3$$

d'où

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 3 - 1 = 2$$

Méthode 2 : à partir du théorème des probabilités totales on a

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} E(X^2|\Lambda = \lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} (\lambda + \lambda^2) e^{-\lambda} d\lambda = 3$$

d'où

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 3 - 1 = 2$$

15. (a) On a

$$\begin{aligned} P(\text{"Record au temps } n") &= P(X_n > \max\{X_1, \dots, X_{n-1}\}) \\ &= P(X_n = \max\{X_1, \dots, X_{n-1}, X_n\}) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

car les $X_1, \dots, X_n$ sont i.i.d (il y a exactement une chance sur n que n'importe lequel des X_i , en particulier X_n , soit le plus grand des n variables).

(b)

$$\begin{aligned}
& E[\text{“nombre de records au temps } n\text{”}] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^n I(\text{“record au temps } i\text{”})\right] \\
&= \sum_{i=1}^n E[I(\text{“record au temps } i\text{”})] = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}
\end{aligned}$$

16. On a

$$\begin{aligned}
\mu_Y &= E[Y] = aE[X] + b = a\mu_X + b \\
\sigma_Y^2 &= E[(Y - \mu_Y)^2] = E[(aX + b - (a\mu_X + b))^2] = a^2 E[(X - \mu_X)^2] = a^2 \sigma_X^2 \\
COV[X, Y] &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[(X - \mu_X)(aX + b - (a\mu_X + b))] \\
&= aE[(X - \mu_X)^2] = a\sigma_X^2
\end{aligned}$$

D'où

$$\rho(X, Y) = \frac{COV[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{a\sigma_X^2}{\sigma_X |a| \sigma_X} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0 \\ -1 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

N.B. Si $a = 0$, ρ n'est pas défini.

17. *Méthode 1* : on se souvient que toute transformation linéaire $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ de v.a. gaussiennes donne encore des v.a. gaussiennes, telles que

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathbf{Y}} &= \mathbf{A}\mu_{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Sigma_{\mathbf{Y}} &= \mathbf{A}\Sigma_{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{|\det \Sigma_{\mathbf{Y}}|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mu_{\mathbf{Y}})^T \Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1} (\mathbf{y} - \mu_{\mathbf{Y}})} \\
f_{Y_1, Y_2, Y_3}(y_1, y_2, y_3) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 3} \exp \left(-\frac{1}{2} [y_1 \ y_2 \ y_3] \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 3} e^{-\frac{1}{6}(y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_2y_3)}
\end{aligned}$$

Méthode 2 : on ne se souvient pas de la propriété précédente des v.a. gaussiennes et on effectue un changement de variables classique

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_1 + y_2 - 2y_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2, Y_3}(y_1, y_2, y_3) &= \frac{1}{3} f_{X_1, X_2, X_3} \left(\frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \frac{1}{3}(y_1 - 2y_2 + y_3), \frac{1}{3}(y_1 + y_2 - 2y_3) \right) \\ &= \frac{1}{3(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{18}(y_1 + y_2 + y_3)^2} e^{-\frac{1}{18}(y_1 - 2y_2 + y_3)^2} e^{-\frac{1}{18}(y_1 + y_2 - 2y_3)^2} \\ &= \frac{1}{3(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{6}(y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_2y_3)} \end{aligned}$$

Remarquons qu' Y_1 est indépendante de Y_2 et Y_3 , mais que Y_2 et Y_3 ne sont pas indépendantes car on peut écrire l'expression précédente comme

$$f_{Y_1, Y_2, Y_3}(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y_1}{\sqrt{3}})^2} \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{3}(y_2^2 + y_3^2 - y_2y_3)}$$

18. (a) On pose

$$\begin{aligned} u &= x + y \\ v &= \frac{x}{x+y} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= uv \\ y &= u(1-v) \end{aligned}$$

$$J = \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \frac{y}{(x+y)^2} & -\frac{x}{(x+y)^2} \end{array} \right| = -\frac{x+y}{(x+y)^2} = -\frac{1}{x+y} = -\frac{1}{u}$$

$$\begin{aligned} f_{UV}(u, v) &= \frac{f_{XY}(uv, u(1-v))}{\left| -\frac{1}{u} \right|} = u f_X(uv) f_Y(u(1-v)) \\ &= u \frac{\lambda(\lambda uv)^{\alpha-1} e^{-\lambda uv}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda(\lambda u(1-v))^{\beta-1} e^{-\lambda u(1-v)}}{\Gamma(\beta)} \\ &= \frac{\lambda(\lambda u)^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(\alpha)} \frac{v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \\ &= \frac{\lambda(\lambda u)^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} \Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \end{aligned}$$

- (b) Comme le premier facteur ci-dessus est une densité de probabilité d'une v.a. $G(\lambda, \alpha + \beta)$, on a écrit $f_{UV}(u, v)$ comme le produit d'une fonction ne dépendant que de u par une autre ne dépendant que de v . De plus, chacune est normalisée pour être une densité de probabilité, et $f_{UV}(u, v) = f_U(u)f_V(v)$ implique que U et V sont indépendantes.

(c) $U \sim G(\lambda, \alpha + \beta)$

19. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|X_n - X| \geq \varepsilon$ si et seulement si $(X_n - X)^2 \geq \varepsilon^2$,

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = P((X_n - X)^2 \geq \varepsilon^2)$$

et l'inégalité de Markov implique que

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = P((X_n - X)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E[(X_n - X)^2]}{\varepsilon^2}.$$

En prenant la limite pour $n \rightarrow \infty$ dans l'équation précédente, la convergence en moyenne quadratique de $\{X_n\}$ implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[(X_n - X)^2]}{\varepsilon^2} = 0,$$

et donc que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$, ce qui établit la convergence en probabilité de $\{X_n\}$.

Le contraire n'est pas vrai : la suite de v.a. $\{X_n\}_{n \geq 1}$ avec

$$\begin{aligned} X_n &= \sqrt{n} \quad \text{avec probabilité } 1/n \\ &= 0 \quad \text{avec probabilité } 1 - 1/n. \end{aligned} \tag{49}$$

ne converge pas en moyenne quadratique vers 0 car $E[X_n^2] = 1$ pour tout $n \geq 1$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n - 0)^2] = 1 \neq 0,$$

mais converge en probabilité vers 0 car pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

20. ($\Leftarrow$) On vérifie tout d'abord que

$$\begin{aligned} \frac{|X_n|}{1 + |X_n|} \geq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} &\iff |X_n|(1 + \varepsilon) \geq \varepsilon(1 + |X_n|) \\ &\iff |X_n| \geq \varepsilon, \end{aligned}$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Markov,

$$P(|X_n| \geq \varepsilon) = P\left(\frac{|X_n|}{1 + |X_n|} \geq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right) \leq E\left[\frac{|X_n|}{1 + |X_n|}\right] \Big/ \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right) \rightarrow 0$$

pour $n \rightarrow \infty$.

($\Rightarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|X_n|/(1 + |X_n|) \leq 1$ et $|X_n|/(1 + |X_n|) \leq \varepsilon/(1 + \varepsilon)$ si et seulement si $|X_n| \leq \varepsilon$, le théorème des probabilités totales entraîne que

$$\begin{aligned} E \left[\frac{|X_n|}{1 + |X_n|} \right] &= E \left[\frac{|X_n|}{1 + |X_n|} \mid |X_n| < \varepsilon \right] P(|X_n| < \varepsilon) + E \left[\frac{|X_n|}{1 + |X_n|} \mid |X_n| \geq \varepsilon \right] P(|X_n| \geq \varepsilon) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} P(|X_n| < \varepsilon) + 1 \cdot P(|X_n| \geq \varepsilon) \\ &= \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} + \frac{1}{1 + \varepsilon} P(|X_n| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) = 0$, et qu'on peut prendre $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on le souhaite, la dernière égalité ci-dessus implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{|X_n|}{1 + |X_n|} \right] = 0.$$

Module 3

3. Il s'agit d'une suite PAM, pour laquelle on peut directement appliquer la formule (23) du cours, avec $\mu_A = 1/2$ et $\sigma_A^2 = 1/12$ car les A_k sont des v.a. uniformément distribuées entre 0 et 1, d'où

$$R_X(t, t - \tau) = R_X(\tau) = \begin{cases} 1/3 - |\tau|/(12T) & \text{si } |\tau| < T \\ 1/4 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En prenant la transformée de Fourier de cette fonction, on trouve (cfr cours)

$$S_X(f) = \frac{1}{4} \delta(f) + \frac{T}{12} \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2 = \frac{1}{4} \delta(f) + \frac{T}{12} \text{sinc}^2(fT).$$

4. (a) Comme X_1 et X_2 sont indépendants et de moyennes nulles, on a $R_{X_1 X_2}(\tau) = 0$ d'où

$$R_Y(t, t - \tau) = E[X_1(t)X_1(t - \tau)] \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0(t - \tau)) \quad (50)$$

$$\begin{aligned} & + E[X_1(t)X_2(t - \tau)] \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0(t - \tau)) \\ & + E[X_2(t)X_1(t - \tau)] \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0(t - \tau)) \\ & + E[X_2(t)X_2(t - \tau)] \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0(t - \tau)) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} & = R_X(\tau) \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0(t - \tau)) + R_{X_1 X_2}(\tau) \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0(t - \tau)) \\ & + R_{X_1 X_2}(-\tau) \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0(t - \tau)) + R_X(\tau) \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0(t - \tau)) \\ & = R_X(\tau) \cos(\omega_0 \tau) + R_{X_1 X_2}(\tau) \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0(t - \tau)) \\ & + R_{X_1 X_2}(-\tau) \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0(t - \tau)) \\ & = R_X(\tau) \cos(\omega_0 \tau). \end{aligned} \quad (52)$$

(b) Oui, car $E[Y(t)] = 0$ (constante) et $R_Y(t, t - \tau) = R_Y(\tau)$.

(c) Non, il suffit que $R_{X_1 X_2}(\tau) = -R_{X_1 X_2}(-\tau)$ (insérer dans le calcul fait en a) et le résultat tombe directement).

(d) La densité spectrale de Y est la convolution de la densité spectrale de X et de la transformée de Fourier de $\cos(\omega_0 \tau)$ (propriété des transformées de Fourier)

$$\begin{aligned} S_Y(f) & = S_X(f) \star \frac{1}{2} \left(\delta\left(f - \frac{\omega_0}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{\omega_0}{2\pi}\right) \right) \\ & = \frac{1}{2} \left(S_X\left(f - \frac{\omega_0}{2\pi}\right) + S_X\left(f + \frac{\omega_0}{2\pi}\right) \right). \end{aligned}$$

(e) $Y(t)$ est un processus gaussien car c'est la combinaison linéaire de deux processus gaussiens. Comme sa moyenne est nulle, sa variance vaut $R_X(0)$ et $f_Y(y; t) = (1/\sqrt{2\pi R_X(0)}) \exp(-y^2/(2R_X(0)))$.

(f) Comme $Y(t)$ est un processus gaussien et qu'on a montré en a qu'il est WSS, il est aussi SSS.

- (g) Comme $Z(t) = Y(t) - \beta Y^2(t)$, et utilisant le fait que $Y(t)$ et $Y(t - \tau)$ sont deux v.a gaussiennes multivariées pour calculer les moments d'ordre 3 et 4, on trouve

$$\begin{aligned}
R_Z(\tau) &= E[Y(t)Y(t - \tau)] - \beta E[Y(t)Y^2(t - \tau)] - \beta E[Y^2(t)Y(t - \tau)] \\
&\quad + \beta^2 E[Y^2(t)Y^2(t - \tau)] \\
&= R_Y(\tau) - 0 - 0 + \beta^2 E[Y^2(t)]E[Y^2(t - \tau)] \\
&\quad + \beta^2 2E[Y(t)Y(t - \tau)]E[Y(t)Y(t - \tau)] \\
&= R_Y(\tau) + \beta^2 \left(R_Y^2(0) + 2R_Y^2(\tau) \right) \\
&= R_X(\tau) \cos(\omega_0 \tau) + \beta^2 \left(R_X^2(0) + 2R_X^2(\tau) \cos^2(\omega_0 \tau) \right).
\end{aligned}$$

5. (a) La moyenne du processus est constante, car elle vaut $E[X(t)] = E[A]E[\sin(2\pi f_0 t + \Phi)] = 0$ et sa fonction d'auto-corrélation ne dépend que de la différence entre les deux temps auxquels elle est évaluée, car

$$\begin{aligned}
R_X(t, t - \tau) &= E[A^2]E[\sin(2\pi f_0 t + \Phi) \sin(2\pi f_0(t - \tau) + \Phi)] \\
&= (a_1^2 p + a_2^2(1 - p))(\cos(2\pi f_0 \tau) + E[\cos(2\pi f_0(2t + \tau) + \Phi)])/2 \\
&= (a_1^2 p + a_2^2(1 - p)) \cos(2\pi f_0 \tau)/2.
\end{aligned}$$

- (b) Comme $C_X(\tau) = (a_1^2 p + a_2^2(1 - p)) \cos(2\pi f_0 \tau)/2$, on a

$$\begin{aligned}
VAR[< X(t) >_T] &= \frac{2}{T} \int_0^T C_X(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau \\
&= \frac{(a_1^2 p + a_2^2(1 - p))}{T} \int_0^T \cos(2\pi f_0 \tau) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau \\
&= \frac{a_1^2 p + a_2^2(1 - p)}{2} \left(\frac{\sin(\pi f_0 T)}{\pi f_0 T} \right)^2 = \frac{a_1^2 p + a_2^2(1 - p)}{2} \text{sinc}^2(f_0 T)
\end{aligned}$$

qui tend bien vers 0 lorsque $T \rightarrow \infty$, ce qui montre que le processus est ergodique par rapport à sa moyenne.

- (c) Posons $Z(t) = X^2(t)$. La moyenne de Z coïncide avec la variance de X . Dès lors, vérifier que X est ergodique par rapport à sa variance revient à vérifier que Z est

ergodique par rapport à sa moyenne. Calculons tout d'abord

$$\begin{aligned}
C_Z(\tau) &= E[Z(t)Z(t-\tau)] - E[Z(t)]E[Z(t-\tau)] \\
&= E[X^2(t)X^2(t-\tau)] - E[X^2(t)]E[X^2(t-\tau)] \\
&= E[A^4]E[\sin^2(2\pi f_0 t + \Phi) \sin^2(2\pi f_0(t-\tau) + \Phi)] - R_X^2(0) \\
&= \frac{E[A^4]}{4} E[(\cos(2\pi f_0 \tau) - \cos(2\pi f_0(2t-\tau) + 2\Phi))^2] - R_X^2(0) \\
&= \frac{E[A^4]}{4} E[\cos^2(2\pi f_0 \tau) - 2\cos(2\pi f_0 \tau) \cos(2\pi f_0(2t-\tau) + 2\Phi)] \\
&\quad + \frac{E[A^4]}{4} E[\cos^2(2\pi f_0(2t-\tau) + 2\Phi)] - R_X^2(0) \\
&= \frac{E[A^4]}{4} \left\{ \frac{1 + \cos(4\pi f_0 \tau)}{2} - 2\cos(2\pi f_0 \tau) E[\cos(2\pi f_0(2t-\tau) + 2\Phi)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1 + E[\cos(4\pi f_0(2t-\tau) + 2\Phi)]}{2} \right\} - R_X^2(0) \\
&= \frac{E[A^4]}{8} \{1 + \cos(4\pi f_0 \tau) - 0 + 1 - 0\} - R_X^2(0) \\
&= \frac{a_1^4 p + a_2^4(1-p)}{8} (2 + \cos(4\pi f_0 \tau)) - \frac{(a_1^2 p + a_2^2(1-p))^2}{4} \\
&= \frac{(a_1^2 - a_2^2)^2 p(1-p)}{4} + \frac{a_1^4 p + a_2^4(1-p)}{8} \cos(4\pi f_0 \tau)
\end{aligned}$$

et ensuite (pfiou...)

$$\begin{aligned}
VAR[< Z(t) >_T] &= \frac{2}{T} \int_0^T C_Z(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau \\
&= \frac{(a_1^2 - a_2^2)^2 p(1-p)}{2T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau \\
&\quad + \frac{a_1^4 p + a_2^4(1-p)}{4T} \int_0^T \cos(4\pi f_0 \tau) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau \\
&= \frac{(a_1^2 - a_2^2)^2 p(1-p)}{4} + \frac{a_1^4 p + a_2^4(1-p)}{8} \text{sinc}^2(2f_0 T)
\end{aligned}$$

qui tend vers $Var[A^2/2] = (a_1^2 - a_2^2)^2 p(1-p)/4$ lorsque $T \rightarrow \infty$. Comme $0 < p < 1$ et $a_1^2 - a_2^2 \neq 0$, cette valeur n'est pas nulle, et le processus Z n'est pas ergodique par rapport à sa moyenne (et donc X n'est pas ergodique par rapport à sa variance).

- (d) Si $|a_1| = |a_2|$, la limite précédente devient nulle. Remarquez qu'on s'attendait bien à ces conclusions avant d'avoir fait tous ces calculs !

6. Calculons $R_{XY}(\tau)$:

$$\begin{aligned}
R_{XY}(\tau) &= E[X(t)Y(t-\tau)] = E[X(t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)X(t-\tau-r)dr] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)E[X(t)X(t-\tau-r)]dr = \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)R_X(\tau+r)dr,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
S_{XY}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) R_X(\tau + r) e^{-j2\pi f\tau} d\tau dr \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) R_X(u) e^{-j2\pi f(u-r)} du dr \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) e^{j2\pi fr} dr \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(u) e^{-j2\pi fu} du = H^*(f) S_X(f).
\end{aligned}$$

La démonstration de $S_{YX}(f) = H(f) S_X(f)$ est similaire.

7. Le filtrage d'un bruit blanc de densité spectrale $N_0/2$ par ce filtre passe-bas idéal de largeur de bande $2B$ produit un processus dont la densité spectrale de puissance est

$$S_Y(f) = \begin{cases} N_0/2 & \text{si } |f| \leq B \\ 0 & \text{sinon } |f| > B \end{cases}$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de cette fonction, on trouve $R_Y(\tau) = N_0 B \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}$.

8. Méthode 1 : On calcule directement $R_Y(\tau)$:

$$\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= E[X(t)X(t-\tau)] - E[X(t)X(t-\tau-d)] - E[X(t-d)X(t-\tau)] \\
&\quad + E[X(t-d)X(t-\tau-d)] \\
&= 2R_X(\tau) - (R_X(\tau+d) + R_X(\tau-d)) = A^2 \cos(\omega_0\tau) (1 - \cos(\omega_0d))
\end{aligned}$$

Méthode 2 : on passe par le domaine spectral. En effet, Y est la réponse du système linéaire de transmittance $H(f) = 1 - \exp(-2\pi jfd)$ au signal d'entrée X . Par conséquent, sa densité spectrale est

$$S_Y(f) = (1 - \exp(-2\pi jfd))(1 - \exp(2\pi jfd))S_X(f) = 2(1 - \cos(2\pi fd))S_X(f)$$

et comme

$$S_X(f) = A^2 (\delta(f - \omega_0/2\pi) + \delta(f + \omega_0/2\pi)) / 4,$$

on trouve finalement

$$\begin{aligned}
S_Y(f) &= A^2 (1 - \cos(2\pi fd)) (\delta(f - \omega_0/2\pi) + \delta(f + \omega_0/2\pi)) / 2 \\
&= A^2 (1 - \cos(\omega_0d)) (\delta(f - \omega_0/2\pi) + \delta(f + \omega_0/2\pi)) / 2
\end{aligned}$$

dont la transformée de Fourier inverse est $R_Y(\tau) = A^2 (1 - \cos(\omega_0d)) \cos(\omega_0\tau)$.

9. (a) Remarquons que $X(t)$ est une v.a. de Bernoulli, prenant les valeurs 0 et 1. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
E[X(t)] &= P(X(t) = 1) = P(X(t) = 1 | X(0) = 1)P(X(0) = 1) \\
&\quad + P(X(t) = 1 | X(0) = 0)P(X(0) = 0) \\
&= P(\text{Nombre pair de transitions entre 0 et } t)P(X(0) = 1) + \\
&\quad P(\text{Nombre impair de transitions entre 0 et } t)P(X(0) = 0) \\
&= P(\text{Nombre pair de transitions entre 0 et } t)(1/2) + \\
&\quad (1 - P(\text{Nombre pair de transitions entre 0 et } t))(1/2) = 1/2
\end{aligned}$$

(b) On a de même

$$\begin{aligned}
E[X(t)X(t-\tau)] &= P(X(t)=1, X(t-\tau)=1) \\
&= P(X(t)=1|X(t-\tau)=1)P(X(t-\tau)=1) \\
&= P(\text{Nombre pair de transitions entre } t-\tau \text{ et } t)(1/2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} P(\text{Nombre de transitions entre } t-\tau \text{ et } t \text{ est égal à } 2k) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda|\tau|)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda|\tau|} = \frac{e^{-\lambda|\tau|}}{2} \text{ch}(\lambda|\tau|) = \frac{1}{4} (1 + e^{-2\lambda|\tau|})
\end{aligned}$$

(c) $C_X(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}/4$

(d) $S_X(f) = \frac{1}{4} \delta(f) + \frac{1}{4} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2 f^2}$.

(e) Oui, car $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C_X(\tau) = 0$.

10. (a) Dans ce cas, on a directement $P(X_1 \geq 0, X_2 \geq 0) = 1/4$.

(b) La densité de probabilité jointe de X_1 et X_2 est

$$\begin{aligned}
f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-(1/2)[x_1 \ x_2]\Sigma^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Il faut déterminer une matrice de changement de variables A diagonalisant la matrice de covariance Σ . Le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de cette matrice permet d'écrire

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sigma^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A^T S A$$

d'où un changement de variable possible est

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

et la densité de probabilité jointe de Y_1 et Y_2 devient

$$\begin{aligned}
f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{(1-\rho)y_1^2 + (1+\rho)y_2^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det S}} \exp\left(-(1/2)[y_1 \ y_2]S^{-1}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Le domaine du plan ($X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$) est transformé en ($Y_1 \geq 0, -Y_1 \leq Y_2 \leq Y_1$).

- (c) Il faut déterminer une matrice B de changement de variables rendant les éléments diagonaux de la matrice S égaux. On trouve directement

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{1+\rho} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{1-\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

et la nouvelle matrice de covariance est la matrice identité :

$$S' = BSB^T = I$$

La densité de probabilité jointe de Z_1 et Z_2 est

$$f_{Z_1 Z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det S'}} \exp\left(-(1/2)[z_1 \ z_2]S'^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\right).$$

Le domaine du plan ($Y_1 \geq 0, -Y_1 \leq Y_2 \leq Y_1$) est transformé en

$$\left(Z_1 \geq 0, -Z_1\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} \leq Z_2 \leq Z_1\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} \right).$$

- (d) Le changement en coordonnées polaires

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \\ \Theta &= \text{Arctg}(Z_2/Z_1) \end{aligned}$$

donne la densité de probabilité jointe (cfr ex. 4, mod 2) $f_{R\Theta}(r, \theta) = (r/2\pi) \exp(-r^2/2)$.
On peut maintenant calculer

$$\begin{aligned} P(X_1 \geq 0, X_2 \geq 0) &= P\left(R \geq 0, -\text{Arctg} \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} \leq \Theta \leq \text{Arctg} \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \text{Arctg} \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}. \end{aligned}$$

11. (a) A partir de l'exercice 10, on a

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= a^2 P(Y(t) = Y(t-\tau)) - a^2 P(Y(t) = -Y(t-\tau)) \\ &= a^2 (2P(Y(t) = Y(t-\tau)) - 1) \\ &= a^2 (2P(X(t) \geq 0, X(t-\tau) \geq 0) + 2P(X(t) < 0, X(t-\tau) < 0) - 1) \\ &= a^2 (4P(X(t) \geq 0, X(t-\tau) \geq 0) - 1) \\ &= a^2 \left(\frac{4}{\pi} \text{Arctg} \sqrt{\frac{R_X(0) + R_X(\tau)}{R_X(0) - R_X(\tau)}} - 1 \right) \end{aligned} \tag{53}$$

$$= \frac{2a^2}{\pi} \text{Arcsin} \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)} \tag{54}$$

La dernière simplification est obtenue par des manipulations trigonométriques simples mais fastidieuses, en écrivant l'égalité (53) comme

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} \frac{R_Y(\tau)}{a^2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{R_X(0) + R_X(\tau)}{R_X(0) - R_X(\tau)}}$$

en élevant ensuite les deux membres de cette équation au carré,

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} \frac{R_Y(\tau)}{a^2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} \frac{R_Y(\tau)}{a^2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{R_X(0) + R_X(\tau)}{R_X(0) - R_X(\tau)}$$

et en remplaçant $\cos^2(\cdot)$ par $(1 - \cos(2\cdot))/2$ et $\sin^2(\cdot)$ par $(1 + \cos(2\cdot))/2$, et en réarrangeant les termes,

$$R_X(\tau) = R_X(0) \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{R_Y(\tau)}{a^2} + \frac{\pi}{2}\right) = R_X(0) \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{R_Y(\tau)}{a^2}\right)$$

et on trouve finalement (54).

- (b) Cette propriété découle directement du fait que X est un processus gaussien tel que $\mu_X = \mu_Y = 0$ et $R_X(\tau) = R_X(0) \sin((\pi/2a^2)R_Y(\tau))$. Par conséquent, la seule connaissance de la moyenne de Y , de la fonction d'auto-corrélation de Y et de la variance de X permet de retrouver la moyenne et la fonction d'auto-corrélation de X , et de là, toutes les distributions jointes de n'importe quel ordre, car on sait que X est un processus gaussien.

12. (a) Comme $X(t) = X(t+T)$ on a directement

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)] = E[X(t+T)X(t-\tau)] = R_X(\tau+T).$$

- (b) Soit $Y(t) = X(t+T) - X(t)$. Alors $\mu_Y = E[Y(t)] = 0$ et

$$\sigma_Y^2 = E[(X(t+T) - X(t))^2] = R_X(0) - 2R_X(T) + R_X(0) = 0$$

de sorte que l'inégalité de Tchebycheff entraîne que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X(t+T) - X(t)| \geq \varepsilon) = P(|Y(t) - \mu_Y| \geq \varepsilon) = 0.$$

13. D'après l'ex. 12, $Y(t)$ est périodique de période $2\pi/\omega$ vu que $X(t)$ l'est aussi. On peut donc se restreindre au calcul de $R_Y(\tau)$ pour $0 \leq \tau < 2\pi/\omega$. Dans ce cas on trouve

$$\begin{aligned} P(X(t) \geq 0, X(t-\tau) \geq 0) &= P(\sin(\omega t + \Phi) \geq 0, \sin(\omega(t-\tau) + \Phi) \geq 0) \\ &= P(2k\pi \leq \omega t + \Phi \leq (2k+1)\pi \text{ pour un certain } k \in \mathbb{Z}, \\ &\quad 2l\pi \leq \omega(t-\tau) + \Phi \leq (2l+1)\pi \text{ pour un certain } l \in \mathbb{Z}) \\ &= P(2k\pi \leq \omega t + \Phi \leq (2k+1)\pi \text{ pour un certain } k \in \mathbb{Z}, \\ &\quad 2l\pi + \omega\tau \leq \omega t + \Phi \leq (2l+1)\pi + \omega\tau \text{ pour un certain } l \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Deux valeurs de k donnent une valeur non nulle de cette probabilité, selon la valeur de $\omega\tau$: $k = l$ si $0 \leq \omega\tau \leq \pi$ et $k = l + 1$ si $\pi \leq \omega\tau \leq 2\pi$. Dans le premier cas, la probabilité recherchée devient

$$\begin{aligned}
 P(X(t) \geq 0, X(t - \tau) \geq 0) &= P(2l\pi \leq \omega t + \Phi \leq (2l + 1)\pi, \\
 &\quad 2l\pi + \omega\tau \leq \omega t + \Phi \leq (2l + 1)\pi \\
 &\quad + \omega\tau \text{ pour un certain } l \in \mathbb{Z}) \\
 &= P(2l\pi + \omega\tau \leq \omega t + \Phi \leq (2l + 1)\pi \text{ pour un certain } l \in \mathbb{Z}) \\
 &= \frac{(2l + 1)\pi - (2l\pi + \omega\tau)}{2\pi} = \frac{\pi - \omega\tau}{2\pi}.
 \end{aligned}$$

Dans le second cas, on trouve de manière similaire

$$P(X(t) \geq 0, X(t - \tau) \geq 0) = \frac{-\pi + \omega\tau}{2\pi}.$$

Par conséquent

$$R_Y(\tau) = a^2 (4P(X(t) \geq 0, X(t - \tau) \geq 0) - 1) = a^2 \left(2 \left| 1 - \frac{\omega\tau}{\pi} \right| - 1 \right)$$

pour $0 \leq \tau < 2\pi/\omega$ et

$$R_Y(\tau) = R_Y(\tau - 2k\pi/\omega)$$

pour $2k\pi/\omega \leq \tau < 2(k + 1)\pi/\omega$.

14. Comme $H(f) = 1/(1 + 2\pi jRCf)$, $S_{V_{out}}(f) = |H(f)|^2 S_{V_{in}}(f) = N_0/2(1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2)$ dont la transformée de Fourier inverse est $R_{V_{out}}(\tau) = (N_0/4RC) \exp(-|\tau|/RC)$ (Pour calculer les transformées inverses, rappelez-vous de la décomposition en fractions simples...)
15. Appelons X' et Y' les processus à la sortie des deux filtres soumis aux entrées respectives X et Y . Comme X et Y sont indépendants, X' et Y' le sont aussi. En supposant que leur moyenne est nulle, on a donc

$$R_Z(\tau) = R_{X'}(\tau) + R_{X'Y'}(\tau) + R_{Y'X'}(\tau) + R_{Y'}(\tau) = R_{X'}(\tau) + R_{Y'}(\tau)$$

d'où

$$S_Z(f) = S_{X'}(f) + S_{Y'}(f) = |H_{XZ}(f)|^2 S_X(f) + |H_{YZ}(f)|^2 S_Y(f).$$

Remarquons que l'hypothèse d'indépendance de X et Y n'est pas nécessaire, on peut la remplacer par l'hypothèse de non corrélation.

16. (a) On obtient le système d'équations

$$\begin{aligned}
 S(f) + N(f) - X(f) &= e(f) + N(f) \\
 X(f) &= \frac{K}{2\pi j f} (e(f) + N(f)).
 \end{aligned}$$

Les fonctions de transfert entre S et e d'une part, et entre N et e d'autre part, s'écrivent donc

$$\begin{aligned} H_{Se}(f) &= \frac{2\pi j f}{K + 2\pi j f} \\ H_{Ne}(f) &= -\frac{K}{K + 2\pi j f} \end{aligned}$$

La densité spectrale de S est la transformée de Fourier de $R_S(\tau) = e^{-a|\tau|}$, qui est (cfr exercice 15)

$$S_S(f) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}.$$

Comme S et N sont non corrélés, l'exercice 15 permet d'écrire que

$$\begin{aligned} S_e(f) &= |H_{Se}(f)|^2 S_S(f) + |H_{Ne}(f)|^2 S_N(f) \\ &= \frac{4\pi^2 f^2}{K^2 + 4\pi^2 f^2} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} + \frac{K^2}{K^2 + 4\pi^2 f^2} \frac{N_0}{2} \\ &= \left(\frac{2a}{K^2 - a^2} + \frac{N_0}{2} \right) \frac{K^2}{K^2 + 4\pi^2 f^2} - \frac{2a}{K^2 - a^2} \frac{a^2}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

et donc que

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E[e^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_e(f) df = 2 \int_0^{\infty} S_e(f) df \\ &= 2 \left(\frac{2a}{K^2 - a^2} + \frac{N_0}{2} \right) \frac{K^2}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{df}{(K/2\pi)^2 + f^2} - \frac{4a}{K^2 - a^2} \frac{a^2}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{df}{(a/2\pi)^2 + f^2} \\ &= \left(\frac{4a}{K^2 - a^2} + N_0 \right) \frac{K^2}{4\pi^2} \frac{2\pi}{K} \left[\text{Arctg} \frac{2\pi f}{K} \right]_0^{\infty} - \frac{4a}{K^2 - a^2} \frac{a^2}{4\pi^2} \frac{2\pi}{a} \left[\text{Arctg} \frac{2\pi f}{a} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{KN_0}{4} + \frac{a}{a + K} \end{aligned}$$

En dérivant cette dernière expression par rapport à K et en annulant cette expression, on trouve que la valeur optimale de K est $2\sqrt{a/N_0} - a$.

(b) Il faut que $K > 0$ pour la stabilité du système, ce qui impose d'avoir $N_0/2 < 2/a$.

17. En conditionnant la fonction caractéristique $\Phi_{\mathbf{X}}$ sur F , on obtient

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{X}}(\omega_1, \dots, \omega_n) &= \Phi_{\mathbf{X}|F=f_1}(\omega_1, \dots, \omega_n|F=f_1)P(F=f_1) \\ &\quad + \Phi_{\mathbf{X}|F=f_2}(\omega_1, \dots, \omega_n|F=f_2)P(F=f_2) \\ &= \Phi_{\mathbf{X}|F=f_1}(\omega_1, \dots, \omega_n|F=f_1)p + \Phi_{\mathbf{X}|F=f_2}(\omega_1, \dots, \omega_n|F=f_2)(1-p) \end{aligned}$$

Maintenant, $\Phi_{\mathbf{X}|F=f_i}(\omega_1, \dots, \omega_n|F=f_i)$ est la fonction caractéristique du n ème ordre du processus $X(t) = a \sin(2\pi f_i t + \Phi)$, dont on a vu (page 46) qu'il est SSS. Par conséquent

$$\Phi_{X(t_1) \dots X(t_n)|F=f_i}(\omega_1, \dots, \omega_n|F=f_i) = \Phi_{X(t_1+c) \dots X(t_n+c)|F=f_i}(\omega_1, \dots, \omega_n|F=f_i)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\Phi_{X(t_1)\dots X(t_n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) &= p\Phi_{X(t_1)\dots X(t_n)|F=f_1}(\omega_1, \dots, \omega_n|F=f_1) \\
&\quad + (1-p)\Phi_{X(t_1)\dots X(t_n)|F=f_1}(\omega_1, \dots, \omega_n|F=f_2) \\
&= p\Phi_{X(t_1+c)\dots X(t_n+c)|F=f_1}(\omega_1, \dots, \omega_n|F=f_1) \\
&\quad + (1-p)\Phi_{X(t_1+c)\dots X(t_n+c)|F=f_1}(\omega_1, \dots, \omega_n|F=f_2) \\
&= \Phi_{X(t_1+c)\dots X(t_n+c)}(\omega_1, \dots, \omega_n)
\end{aligned}$$

ce qui montre que $X(t)$ est lui-même SSS.

18. (a) On reprend l'équation (56) en fixant $\gamma = 0$:

$$\begin{aligned}
P_e &= (1-p) \int_0^\infty f_{Z|A=-1}(z|A_n = -1)dz + p \int_{-\infty}^0 f_{Z|A=1}(z|A_n = 1)dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T}} \left[(1-p) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(z+a)^2}{N_0/T}\right) dz + p \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{(z-a)^2}{N_0/T}\right) dz \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[(1-p) \int_{a/\sqrt{N_0/T}}^\infty \exp(-\xi^2) d\xi + p \int_{-\infty}^{-a/\sqrt{N_0/T}} \exp(-\xi^2) d\xi \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a/\sqrt{N_0/T}}^\infty \exp(-\xi^2) d\xi.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la probabilité d'erreur reste inchangée si $p \neq 0$ mais que le seuil γ est fixé a priori à la valeur 0 :

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right). \quad (55)$$

Remarquons toutefois que ce seuil $\gamma = 0$ n'est plus optimal : à moins que $p = 1/2$, il existe des valeurs de γ qui auraient amené une valeur plus faible de P_e .

- (b) Comme la valeur la plus élevée de P_e est atteinte pour $p = 1/2$, comme montré ci-dessus, on peut toujours garantir cette valeur quelle que soit p , en prenant $\gamma = 0$.
- (c) Par inspection de la figure 4, page 63, pour obtenir une probabilité d'erreur inférieure à 10^{-6} , il faut que E_b/N_0 soit supérieur à environ 10.5 dB. Comme il était à environ 7 dB pour une probabilité d'erreur de 10^{-3} , il faut trouver 3.5 dB. Doubler T revient à augmenter E_b/N_0 de $10 \log 2 \approx 3 \text{ dB}$, ce qui n'est pas suffisant. Par contre, doubler a revient à augmenter E_b/N_0 de $10 \log 4 \approx 6 \text{ dB}$, ce qui est largement suffisant.

Module 4

1. (a) An auto-regressive process (AR) of order 1 has the form $X(n) = -a_1X(n-1) + U(n)$ where $U(n)$ is white noise ($U(n) = X(n) + a_1X(n-1)$). To show that the given process is AR of order 1, it suffices to find a_1 such that $U(n)$ is white noise. We Start by calculating the Spectral density function :

$$\begin{aligned}\hat{S}_X(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(k)z^{-k} = \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|k|} z^{-k} \\ &= \sigma^2 \left[\sum_{k=-\infty}^0 \alpha^{-k} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^{-k} - 1 \right] = \sigma^2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha z)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^k - 1 \right] \\ &= \sigma^2 \left[\frac{1}{1-\alpha z} + \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} - 1 \right] = \sigma^2 \frac{(1-\alpha^2)}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})}.\end{aligned}$$

Now we calculate the Spectral density function of $U(n)$. We can write $U(n) = H(n) * X(n)$ where $H(n) = \delta(n) + a_1\delta(n-1)$. We have

$$\hat{S}_U(z) = \hat{H}(z)\hat{H}(1/z)\hat{S}_X(z) = (1+a_1z^{-1})(1+a_1z)\hat{S}_X(z) = \sigma^2 \frac{(1-\alpha^2)(1+a_1z)(1+a_1z^{-1})}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})}.$$

The property of white noise is that its spectral density function is a constant. Therefore, by choosing $a_1 = -\alpha$, the dependency of $\hat{S}_U(z)$ to z disappears and we have $\hat{S}_U(z) = \sigma^2(1-\alpha^2)$. The energy of the white noise $U(n)$ is thus $\sigma^2(1-\alpha^2)$.

- (b) Factorisons $\hat{S}_X(z) = \sigma^2(1-\alpha^2)\hat{B}(z)\hat{B}(z^{-1})$, avec

$$\hat{B}(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}.$$

En développant $\hat{B}(z)$ en série, on trouve

$$\hat{B}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha z^{-1})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k z^{-k},$$

ce qui est bien la fonction de transfert d'un filtre MA d'ordre ∞ avec les coefficients $b_k = \alpha^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

- (c) Oui, car $C_X(k) = R_X(k) - 0 = \sigma^2 \alpha^{|k|}$ tend vers zéro quand $k \rightarrow \infty$.

2. (a) On a

$$\begin{aligned}\hat{S}_Y(z) &= \hat{H}(z)\hat{H}(z^{-1})\hat{S}_X(z) = (1+\beta z^{-1})(1+\beta z)\sigma^2 \frac{(1-\alpha^2)}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})} \\ &= \sigma^2(1-\alpha^2) \frac{(1+\beta z^{-1})(1+\beta z)}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})}\end{aligned}$$

d'où en prenant $z = \exp(2\pi j f)$

$$S_Y(f) = \sigma^2(1-\alpha^2) \frac{(1+\beta^2 + 2\beta \cos(2\pi f))}{1+\alpha^2 - 2\alpha \cos(2\pi f)}.$$

(b) $\beta = -\alpha$.

3. On établit à partir de $X(n) = \sum_{k=0}^m b_k U(n-k)$ et du fait que $E[U(n-l_1)U(n-l_2)] = \sigma_U^2 \bar{\delta}(l_1-l_2)$ que

$$\begin{aligned} R_X(k) &= \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^m b_{l_1} b_{l_2} E[U(n-l_1)U(n-k-l_2)] = \sigma_U^2 \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^m b_{l_1} b_{l_2} \bar{\delta}(l_1-l_2-k) \\ &= \sigma_U^2 \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^m b_{l_1} b_{l_1-k} \bar{\delta}(l_1-l_2-k) = \sigma_U^2 \sum_{l_1=k}^m \sum_{l_2=0}^m b_{l_1} b_{l_1-k} \bar{\delta}(l_1-l_2-k) \\ &= \sigma_U^2 \sum_{l_1=k}^m b_{l_1} b_{l_1-k} = \sigma_U^2 \sum_{l=0}^{m-k} b_l b_{l+k}. \end{aligned}$$

pour $0 \leq k \leq m$. Par conséquent, on obtient en prenant $k \in \mathbb{Z}$

$$R_X(k) = \begin{cases} \sigma_U^2 \sum_{l=0}^{m-|k|} b_l b_{l+|k|} & \text{for } |k| \leq m \\ 0 & \text{for } |k| > m \end{cases}$$

4. (a) On calcule $E[\hat{R}'_X(k)] = R_X(k)$ et $E[\hat{R}''_X(k)] = (1-|k|/m)R_X(k)$.
(b) On calcule, en se souvenant des propriétés des moments d'ordre supérieurs de v.a. gaussiennes,

$$\begin{aligned} \text{VAR}[\hat{R}'_X(k)] &= E[(\hat{R}'_X(k) - R_X(k))^2] \\ &= E\left[\left(\frac{1}{m-|k|} \sum_{n=|k|+1}^m (X(n)X(n-k) - R_X(k))\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{(m-|k|)^2} \sum_{n=|k|+1}^m \sum_{p=|k|+1}^m \left(E[X(n)X(n-k)X(p)X(p-k)] - R_X^2(k)\right) \\ &= \frac{1}{(m-|k|)^2} \sum_{n=|k|+1}^m \sum_{p=|k|+1}^m (R_X^2(k) + R_X^2(n-p) \\ &\quad + R_X(n-p+k)R_X(n-p-k) - R_X^2(k)) \\ &= \frac{1}{(m-|k|)^2} \sum_{n=|k|+1}^m \sum_{p=|k|+1}^m \left(R_X^2(n-p) + R_X(n-p+k)R_X(n-p-k)\right). \end{aligned}$$

Posons $l = n-p$ et $q = n+p$. Alors, comme $|k|+1 \leq n, p \leq m$, on a $-m+|k|+1 \leq l \leq m-|k|-1$. D'autre part, regardons pour chaque valeur possible prise par l entre ces deux limites, les valeurs que n, p et finalement q peuvent prendre. On a le tableau suivant :

Valeur(s) de l	... de n	... de p	... de q	Nombre de valeurs de q
$-m + k + 1$	$ k + 1$	m	$m + k + 1$	1
$-m + k + 2$	$ k + 1$ ou $ k + 2$	$m - 1$ ou m	$m + k , m + k + 2$	2
$\vdots$				$\vdots$
0	$ k + 1, \dots, m$	$ k + 1, \dots, m$	$2 k + 2, 2 k + 4, \dots, 2m$	$m - k $
$\vdots$				$\vdots$
$m - k - 2$	$m - 1$ ou m	$ k + 1$ ou $ k + 2$	$m + k , m + k + 2$	2
$m - k - 1$	m	$ k + 1$	$m + k + 1$	1

dont on déduit que pour une valeur de l fixée entre $-m + |k| + 1$ et $m - |k| - 1$, il y a $m - |k| - |l|$ valeurs que q peut prendre. Par conséquent, la double somme sur n et p devient

$$\begin{aligned}
VAR[\hat{R}'_X(k)] &= \frac{1}{(m - |k|)^2} \sum_{l=-m+|k|+1}^{m-|k|-1} (m - |k| - |l|) \left(R_X^2(l) + R_X(l+k)R_X(l-k) \right) \\
&= \frac{1}{(m - |k|)^2} \sum_{l=-m+|k|}^{m-|k|} (m - |k| - |l|) \left(R_X^2(l) + R_X(l+k)R_X(l-k) \right).
\end{aligned}$$

Comme $\hat{R}''_X(k) = (1 - |k|/m)\hat{R}'_X(k)$, $VAR[\hat{R}''_X(k)] = (1 - |k|/m)^2 VAR[\hat{R}'_X(k)]$.

- (c) Le premier estimateur n'est pas biaisé au contraire du second, mais la variance du second est toujours plus petite que celle du premier, et tend vers 0 lorsque le nombre d'échantillons $m \rightarrow \infty$ même si $k \rightarrow m$ au contraire de la variance du premier. Par exemple, si $|k| = m - 1$, on a :

$$\begin{aligned}
VAR[\hat{R}'_X(k)] &= R_X^2(0) + R_X(k)R_X(-k) = R_X^2(0) + R_X^2(k) \\
VAR[\hat{R}''_X(k)] &= \frac{1}{m^2} \left(R_X^2(0) + R_X^2(k) \right).
\end{aligned}$$

Enfin, si $\hat{A}$ est un estimateur de a , de moyenne $\mu_{\hat{A}}$ et de variance $\sigma_{\hat{A}}^2$, on montre de manière générale que l'erreur quadratique moyenne entre $\hat{A}$ et a est

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= E[(\hat{A} - a)^2] = E[((\hat{A} - \mu_{\hat{A}}) + (\mu_{\hat{A}} - a))^2] \\
&= E[(\hat{A} - \mu_{\hat{A}})^2] + 2E[\hat{A} - \mu_{\hat{A}}](\mu_{\hat{A}} - a) + (\mu_{\hat{A}} - a)^2 = \sigma_{\hat{A}}^2 + (\mu_{\hat{A}} - a)^2
\end{aligned}$$

Ici on a donc

$$\begin{aligned}
\varepsilon'(k) &= VAR[\hat{R}'_X(k)] \\
\varepsilon''(k) &= VAR[\hat{R}''_X(k)] + \frac{k^2}{m^2} R_X^2(k).
\end{aligned}$$

La différence entre les deux erreurs quadratiques devient d'autant plus importante si $|k|$ prend de grandes valeurs. Par exemple, si $|k| = m - 1$, on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon'(k) &= R_X^2(0) + R_X^2(k) \\
\varepsilon''(k) &= \frac{1}{m^2} R_X^2(0) + \frac{(m-1)^2 + 1}{m^2} R_X^2(k).
\end{aligned}$$

Pour de grandes valeurs de k et de m , $R_X^2(k)$ a une faible valeur pour un grand nombre de processus, et donc $\varepsilon''(k)$ est petite, mais pas $\varepsilon'(k)$.

5. (a) $X_2(n)$ et $X_3(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, sont WSS, mais pas $X_1(n)$. En effet, on calcule que les moyennes des trois processus sont nulles, et que pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} R_{X_1}(n_1, n_2) &= \frac{1}{2} E[A^2] (\cos(2\pi f(n_1 - n_2)) - \cos(2\pi f(n_1 + n_2) + 2\varphi)) \neq R_{X_1}(n_1 - n_2) \\ R_{X_2}(n_1, n_2) &= \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f(n_1 - n_2)) \\ R_{X_3}(n_1, n_2) &= \frac{a^2}{2} E[\cos(2\pi F(n_1 - n_2))] - \frac{a^2}{2} E[\cos(2\pi F(n_1 + n_2) + 2\varphi)] \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^1 \cos(2\pi f(n_1 - n_2)) df - \frac{a^2}{2} \int_0^1 \cos(2\pi f(n_1 + n_2) + 2\varphi) df \\ &= \frac{a^2}{2} \frac{\sin(2\pi(n_1 - n_2))}{2\pi(n_1 - n_2)} - \frac{a^2}{2} \frac{\sin(2\pi(n_1 + n_2) + 2\varphi) - \sin(2\varphi)}{2\pi(n_1 + n_2)} \\ &= \frac{a^2}{2} \frac{\sin(2\pi(n_1 - n_2))}{2\pi(n_1 - n_2)} = \frac{a^2}{2} \bar{\delta}(n_1 - n_2) \end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue en remarquant que les seules valeurs de n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}_0$ amenant une contribution non nulle sont $n_1 = n_2$. Remarquons que si n avait pu prendre des valeurs négatives ou nulles, on n'aurait plus le même résultat (le processus $X_3(n)$ ne serait d'ailleurs plus WSS).

- (b) On trouve

$$f_{X_1(n)}(x_1; n) = \begin{cases} 1/2 |\sin(2\pi f n + \varphi)| & \text{si } |x_1| \leq |\sin(2\pi f n + \varphi)| \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme à l'exercice 11 du module 1,

$$f_{X_2(n)}(x_2; n) = 1/(\pi \sqrt{a^2 - x_2^2}),$$

avec $|x_2| < a$.

Finalement, il y a $2n$ racines solutions de $x_3 = g(f) = a \sin(2\pi n f + \varphi)$, et la pente en valeur absolue en chacune d'elle est $|g'| = a 2\pi n |\cos(2\pi n f + \varphi)| = 2\pi n \sqrt{a^2 - x_3^2}$ d'où

$$f_{X_3(n)}(x_3; n) = \frac{2n}{2\pi n \sqrt{a^2 - x_3^2}} = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x_3^2}}$$

avec $|x_3| < a$.

- (c) Les transformations trigonométriques suivantes sont utilisées :

$$\begin{aligned} \sin^2(2\pi f n + \varphi) \sin(2\pi f m + \varphi) &= [1 - \cos(4\pi f n + 2\varphi)] \sin(2\pi f m + \varphi)/2 \\ &= \sin(2\pi f m + \varphi)/2 + \sin(2\pi f(2n - m) + \varphi)/4 \\ &\quad - \sin(2\pi f(2n + m) + 3\varphi)/4. \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned}
E[X_1^2(n)X_1(m)] &= E[A^3] \sin^2(2\pi fn + \varphi) \sin(2\pi fm + \varphi) = 0 \\
E[X_2^2(n)X_2(m)] &= \frac{a^3}{4} [E[\sin(2\pi fm + \Phi)] + E[\sin(2\pi f(2n - m) + \Phi)] \\
&\quad - E[\sin(2\pi f(2n + m) + 3\Phi)]] \\
&= 0 \\
E[X_3^2(n)X_3(m)] &= \frac{a^3}{4} [2E[\sin(2\pi Fm + \varphi)] + E[\sin(2\pi F(2n - m) + \varphi)] \\
&\quad - E[\sin(2\pi F(2n + m) + 3\varphi)]] \\
&= \frac{a^3}{4} \left[2 \int_0^1 \sin(2\pi fm + \varphi) df + \int_0^1 \sin(2\pi f(2n - m) + \varphi) df \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 \sin(2\pi f(2n + m) + 3\varphi) df \right] \\
&= \frac{a^3}{4} [0 + \bar{\delta}(2n - m) \sin(\varphi) + 0] = \frac{a^3}{4} \bar{\delta}(2n - m) \sin(\varphi).
\end{aligned}$$

A nouveau, la dernière ligne est obtenue en remarquant que la seconde intégrale est non nulle seulement si $2n = m$. En effet, dans ce cas, on intègre simplement la constante $\sin(\varphi)$.

(d) $X_1(n)$ n'est pas WSS donc n'est pas SSS. Comme

$$E[X_3^2(n)X_3(m)] = a^3 \bar{\delta}(2n - m)/4 \neq a^3 \bar{\delta}(2n - m + c)/4 = E[X_3^2(n + c)X_3(m + c)]$$

pour tout $c \in \mathbb{N}_0$, $X_3(n)$ ne peut être SSS. Enfin, en utilisant les fonctions caractéristiques, on a

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_2(n_1) \dots X_2(n_m)}(\omega_1, \dots, \omega_m) &= E[\exp[j \sum_{k=1}^m \omega_k X_2(n_k)]] = E[\exp[j \sum_{k=1}^m \omega_k \sin(2\pi f n_k + \Phi)]] \\
&= (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \exp[j \sum_{k=1}^m \omega_k \sin(2\pi f n_k + \varphi)] d\varphi \\
&= (1/2\pi) \int_{-2\pi fc}^{2\pi - 2\pi fc} \exp[j \sum_{k=1}^m \omega_k \sin(2\pi f(n_k + c) + \psi)] d\psi \\
&= (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \exp[j \sum_{k=1}^m \omega_k \sin(2\pi f(n_k + c) + \psi)] d\psi \\
&= E[\exp[j \sum_{k=1}^m \omega_k X_2(n_k + c)]] \\
&= \Phi_{X_2(n_1+c) \dots X_2(n_m+c)}(\omega_1, \dots, \omega_m)
\end{aligned}$$

d'où quels que soient c et $m \in \mathbb{N}_0$

$$f_{X_2(n_1) \dots X_2(n_m)}(x_1, \dots, x_m; n_1, \dots, n_m) = f_{X_2(n_1+c) \dots X_2(n_m+c)}(x_1, \dots, x_m; n_1+c, \dots, n_m+c)$$

ce qui montre que $X_2(n)$ est SSS.

6. Comme $R_X(k) = \sigma_X^2 \bar{\delta}(k)$, les équations de Wiener-Hopf se réduisent à $h(k) = R_{DX}(k)/\sigma^2$, avec $k \in \mathbb{N}$.

7. Comme on a vu à l'exercice 2,

$$S_S(f) = \frac{(1 - \alpha^2)\sigma_S^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(2\pi f)},$$

tandis que $S_N(f) = \sigma_N^2$. Comme $S_X(f) = S_S(f) + S_N(f)$ et $S_{DX}(f) = S_{SX}(f) = S_S(f)$,

$$H(f) = \frac{S_S(f)}{S_S(f) + S_N(f)} = \frac{(1 - \alpha^2)\sigma_S^2}{(1 - \alpha^2)\sigma_S^2 + (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(2\pi f))\sigma_N^2}.$$

8. On calcule

$$\begin{aligned} R_{eX}(k) &= E[e(n)X(n-k)] = E\left[\left(D(n) - \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)X(n-l)\right)X(n-k)\right] \\ &= E[D(n)X(n-k)] - \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)E[X(n-l)X(n-k)] \\ &= R_{DX}(k) - \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)R_X(k-l) = 0. \end{aligned}$$

Ce calcul donne une interprétation géométrique de l'algorithme de Wiener. En effet, l'espérance $E[e(n)X(n-k)]$ peut être définie comme le produit scalaire du signal $e(n)$ par l'entrée $X(n-k)$. Les coefficients du filtre optimal $\{h(k)\}$ sont dès lors ceux pour lesquels ces deux signaux sont orthogonaux quel que soit $k \in \mathbb{Z}$. Il y a donc équivalence entre les critères des moindres carrés (erreur quadratique moyenne minimale) et d'orthogonalité entre l'erreur et le signal d'entrée.

9. Le processus $X(n) = S(n) + S(n-1)$ est la sortie d'un filtre de transmittance $G(z) = 1 + z^{-1}$, soumis à au processus d'entrée $\{S(n), n \in \mathbb{Z}\}$. Le processus $\{D(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est le même que $\{S(n), n \in \mathbb{Z}\}$.

(a) La transmittance du filtre de Wiener est

$$H(z) = \frac{S_{DX}(z)}{S_X(z)} = \frac{S_{SX}(z)}{S_X(z)} = \frac{G(z^{-1})S_S(z)}{G(z)G(z^{-1})S_S(z)} = \frac{1}{G(z)} = \frac{1}{1 + z^{-1}},$$

et sa réponse impulsionnelle est donc

$$h(n) = (-1)^n \mathbb{1}_{\{n \geq 0\}} = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

(b) Non, il s'agit du filtre inverse de $G(z)$.

(c) On peut calculer que $Y(z) = H(z)X(z) = H(z)G(z)S(z) = S(z)$ et donc $Y(n) = S(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ d'où $\{e(n), n \in \mathbb{Z}\} \equiv 0$ et $\varepsilon = 0$.

(d) Oui, car $h(n) = 0$ si $n < 0$.

Module 5

1. En utilisant la fonction génératrice $G_N(z; t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n$, et en sommant toutes les équations de Kolmogorov (1) et (2) multipliées par z^n pour tout $n \geq 0$, on peut mettre ces dernières sous la forme

$$\frac{dG_N(z; t)}{dt} = \lambda(z - 1)G_N(z; t)$$

avec la condition initiale $G_N(z; 0) = 1$. On retrouve alors tous les résultats connus.

2. Supposons $t_1 \leq t_2$. Alors

$$\begin{aligned} R_N(t_1, t_2) &= E[N(t_1)N(t_2)] = E[N(t_1)(N(t_1) + (N(t_2) - N(t_1)))] \\ &= E[N^2(t_1)] + E[N(t_1)(N(t_2) - N(t_1))] \\ &= E[N^2(t_1)] + E[N(t_1)]E[(N(t_2) - N(t_1))] \\ &= E[N^2(t_1)] + E[N(t_1)]E[(N(t_2 - t_1))] \\ &= \lambda^2 t_1^2 + \lambda t_1 + \lambda t_1(\lambda(t_2 - t_1)) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_1 \end{aligned}$$

On répète le même raisonnement dans le cas où $t_1 \leq t_2$, et on établit la propriété.

3. Première méthode, en utilisant le théorème des probabilités totales et la formule du binôme :

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= P(N_1(t) + N_2(t) = n) \\ &= \sum_{k=0}^n P(N_2(t) = n - k | N_1(t) = k) P(N_1(t) = k) \\ &= \sum_{k=0}^n P(N_2(t) = n - k) P(N_1(t) = k) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda_2 t} \frac{(\lambda_2 t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \frac{((\lambda_1 + \lambda_2)t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Deuxième méthode, en utilisant les fonctions génératrices :

$$\begin{aligned} G_N(z; t) &= E[z^{N(t)}] = E[z^{N_1(t) + N_2(t)}] = E[z^{N_1(t)}] E[z^{N_2(t)}] = G_{N_1}(z; t) G_{N_2}(z; t) \\ &= e^{\lambda_1 t(z-1)} e^{\lambda_2 t(z-1)} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t(z-1)} \end{aligned}$$

qui est la fonction génératrice de probabilité d'une v.a. de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$, d'où

$$P(N(t) = n) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \frac{((\lambda_1 + \lambda_2)t)^n}{n!}.$$

Donc l'hypothèse H2' définissant (Définition 5.2) un processus de Poisson est vérifiée. L'hypothèse H1' l'est également car le processus $N_1(t) + N_2(t)$ est à accroissements indépendants dès lors que chaque processus N_1 et N_2 l'est.

4. (a) En dérivant

$$F_{S(n)}(s; n) = P(S(n) \leq s) = P(N(s) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!}$$

par rapport à s on obtient

$$\begin{aligned} f_{S(n)}(s; n) &= -\lambda e^{-\lambda s} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} + e^{-\lambda s} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k \lambda^k s^{k-1}}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda s} \left(-\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\ &= \lambda e^{-\lambda s} \left(-\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} + \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \right) = \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

- (b) La solution la plus simple est d'utiliser les fonctions caractéristiques d'une v.a. exponentielle. En effet $S(n) = T(0) + T(1) + \dots + T(n-1)$, et la fonction caractéristique de la somme de n v.a. exponentielles indépendantes est le produit de leur fonctions caractéristiques, c'est-à-dire

$$\Phi_{S(n)}(\omega; n) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - j\omega} \right)^n$$

ce qui montre que $S(n)$ est une v.a. Gamma de paramètres (λ, n) , dont la densité de probabilité est

$$f_{S(n)}(s; n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega s} \Phi_{S(n)}(\omega; n) d\omega = \frac{\lambda (\lambda s)^{n-1} e^{-\lambda s}}{(n-1)!}.$$

5. $P(N(t') = 1 | N(t) = 1) = t'/t$.

6. (a) La propriété d'une v.a. exponentielle d'être sans mémoire entraîne que

$$E[T | T \geq a] = E[T] + a = 1 + a.$$

- (b) Comme

$$P(T \leq t | T \geq a) = \frac{P(a \leq T \leq t)}{P(T \geq a)} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ (t-a)/(2-a) & \text{si } a < t < 2 \\ 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

on a

$$f_{T|T \geq a}(t | T \geq a) = \begin{cases} 1/(2-a) & \text{si } a < t < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où

$$E[T | T \geq a] = \frac{1}{2-a} \int_a^2 t dt = \frac{4-a^2}{2(2-a)} = 1 + a/2.$$

Supposons que T représente l'arrivée d'un événement, dont on sait qu'il ne se produira qu'après a secondes. Dans les deux cas, l'espérance a priori de T est de 1 seconde. Plaçons-nous à l'instant a . On remarque que dans le cas d'une v.a. exponentielle, le fait de savoir qu'il s'est déjà écoulé a secondes avant l'arrivée ne change en rien l'espérance du temps d'attente résiduel, qui reste d'une seconde à partir de cet instant : c'est dû à l'absence de mémoire de la v.a. exponentielle. Par contre, dans le cas uniforme, le fait de savoir que l'arrivée aura lieu après a secondes réduit l'incertitude sur le temps qu'il reste à attendre : l'arrivée se fait plus imminente ; l'espérance du temps d'attente résiduel n'est plus que de $1 + a/2 - a = 1 - a/2$ secondes, ce qui est dans tous les cas inférieur à 1.

7. Calculons $F_T(t) = P(T \leq t)$:

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= P(\min\{T_1, T_2\} \leq t) = 1 - P(\min\{T_1, T_2\} > t) = 1 - P(\{T_1 > t\} \cap \{T_2 > t\}) \\ &= 1 - P(T_1 > t)P(T_2 > t) = 1 - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \end{aligned}$$

dont on déduit que

$$f_T(t) = \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

ce qui montre que T est distribuée exponentiellement, avec une intensité (paramètre) $(\lambda_1 + \lambda_2)$.

8. Soit T la v.a. décrivant le temps écoulé entre l'arrivée du premier étudiant et le départ du second, et soient T_1 et T_2 les v.a. décrivant les durées respectives du premier et du second entretien, qui sont donc deux v.a. exponentielles d'intensité $1/30$ (min^{-1}). Remarquons que $T = 5 + T_2$ si le premier entretien dure moins de 5 minutes, et que $T = T_1 + T_2$ sinon. Ceci nous amène à appliquer le théorème des probabilités totales et à utiliser la propriété d'absence de mémoire des v.a. exponentielles pour obtenir

$$E[T] = 5 + E[T_2] + E[T_1]P(T_1 > 5) = 35 + 30 \exp(-1/6) \approx 60.39 \text{ min.}$$

9. C'est exactement le même exercice que le précédent, si on remplace le prof. par un réseau CSMA/CD et les étudiants par les fichiers (cette analogie n'étant bien entendu valable que pour le raisonnement mathématique...). Avec les valeurs numériques, on trouve alors

$$E[T] = 1 + E[T_2] + E[T_1]P(T_1 > 1) = 3 + 2 \exp(-1/2) \approx 4.21 \text{ sec.}$$

10. (a) $E[\hat{N}(t)|N(t) = n] = \sum_{m=1}^n E[A_m] = n\mu_A$, d'où

$$\begin{aligned} E[\hat{N}(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\hat{N}(t)|N(t) = n]P(N(t) = n) = \mu_A \sum_{n=0}^{\infty} nP(N(t) = n) \\ &= \mu_A E[N(t)] = \mu_A \lambda t. \end{aligned}$$

(b) On a de même

$$\begin{aligned}
E[\hat{N}^2(t)|N(t) = n] &= \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n E[A_m A_l] = \sum_{m=1}^n E[A_m^2] + \sum_{m=1}^n \sum_{l=1, l \neq m}^n E[A_m A_l], \\
&= \sum_{m=1}^n (\mu_A^2 + \sigma_A^2) + \sum_{m=1}^n \sum_{l=1, l \neq m}^n \mu_A^2 = n\sigma_A^2 + n^2\mu_A^2
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
E[\hat{N}^2(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\hat{N}^2(t)|N(t) = n]P(N(t) = n) = \sigma_A^2 E[N(t)] + \mu_A^2 E[N^2(t)] \\
&= \sigma_A^2 \lambda t + \mu_A^2 (\lambda t + \lambda^2 t^2).
\end{aligned}$$

(c) Supposons $t_1 \leq t_2$. Alors

$$\begin{aligned}
R_{\hat{N}}(t_1, t_2) &= E[\hat{N}(t_1)(\hat{N}(t_1) + (\hat{N}(t_2) - \hat{N}(t_1)))] \\
&= E[\hat{N}^2(t_1)] + E[\hat{N}(t_1)(\hat{N}(t_2) - \hat{N}(t_1))] \\
&= E[\hat{N}^2(t_1)] + E[\hat{N}(t_1)]E[(\hat{N}(t_2) - \hat{N}(t_1))] \\
&= E[\hat{N}^2(t_1)] + E[\hat{N}(t_1)]E[(\hat{N}(t_2 - t_1))] \\
&= \mu_A^2 \lambda^2 t_1^2 + (\sigma_A^2 + \mu_A^2) \lambda t_1 + \mu_A \lambda t_1 (\mu_A \lambda (t_2 - t_1)) \\
&= \mu_A^2 \lambda^2 t_1 t_2 + (\sigma_A^2 + \mu_A^2) \lambda t_1
\end{aligned}$$

On répète le même raisonnement dans le cas où $t_1 \leq t_2$, et on établit la propriété.

11. On remarque tout d'abord que

$$\hat{X}_\delta(t) = \frac{d\hat{X}_{1_{\mathbb{R}_0^+}}}{dt}(t) = \frac{d\hat{N}}{dt}(t),$$

et le lemme 1 entraîne que

$$\begin{aligned}
\mu_{\hat{X}_\delta}(t) &= E[\hat{X}_\delta(t)] = \frac{d}{dt} E[\hat{N}(t)] = \mu_A \lambda \\
R_{\hat{X}_\delta}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2 R_{\hat{N}}}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} (\mu_A^2 \lambda^2 t_1 t_2 + (\sigma_A^2 + \mu_A^2) \lambda \min(t_1, t_2)) \\
&= \frac{\partial}{\partial t_1} (\mu_A^2 \lambda^2 t_1 + (\sigma_A^2 + \mu_A^2) \lambda 1_{\mathbb{R}_0^+}(t_1 - t_2)) = \mu_A^2 \lambda^2 + (\sigma_A^2 + \mu_A^2) \lambda \delta(t_1 - t_2),
\end{aligned}$$

ce qui montre que le processus $\hat{X}_\delta(t)$ est WSS (On s'en serait douté). Par conséquent il possède une densité spectrale de puissance qui vaut

$$S_{\hat{X}_\delta}(f) = \mu_A^2 \lambda^2 \delta(f) + (\sigma_A^2 + \mu_A^2) \lambda.$$

Le processus $\hat{X}_h(t)$, avec une forme générale de pulse $h(t)$ (on suppose seulement que qu'elle est absolument intégrable), est obtenu en convoluant le processus $\hat{X}_\delta(t)$ avec $h(t)$. On peut appliquer le théorème 2 du module 3 pour obtenir

$$S_{\hat{X}_h}(f) = |H(f)|^2 S_{\hat{X}_\delta}(f) = \mu_A^2 \lambda^2 H^2(0) \delta(f) + (\sigma_A^2 + \mu_A^2) \lambda |H(f)|^2.$$

En prenant la transformée de Fourier inverse on trouve

$$R_{\hat{X}_h}(\tau) = \mu_A^2 \lambda^2 H^2(0) + (\sigma_A^2 + \mu_A^2) \lambda \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 e^{2\pi j f \tau} df.$$

De même, $\mu_{\hat{X}_h} = \mu_A \lambda H(0)$, tandis que

$$\sigma_{\hat{X}_h}^2 = R_{\hat{X}_h}(0) - \mu_{\hat{X}_h}^2 = \lambda(\mu_A^2 + \sigma_A^2) \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df.$$

12. Méthode longue :

(a) $E[X(t)] = E[N(t+T)] - E[N(t)] = \lambda(t+T) - \lambda t = \lambda T.$

(b) On a

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t+\tau)] &= E[N(t)N(t+\tau)] - E[N(t+T)N(t+\tau)] \\ &\quad - E[N(t)N(t+T+\tau)] + E[N(t+T)N(t+T+\tau)]. \end{aligned} \quad (56)$$

Pour un processus de Poisson $N(t)$, $E[N(t_1)N(t_2)] = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min\{t_1, t_2\}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} E[N(t)N(t+\tau)] &= \begin{cases} \lambda^2 t(t+\tau) + \lambda(t+\tau) & \text{si } \tau \leq 0 \\ \lambda^2 t(t+\tau) + \lambda t & \text{si } \tau \geq 0 \end{cases} \\ E[N(t+T)N(t+\tau)] &= \begin{cases} \lambda^2 (t+T)(t+\tau) + \lambda(t+\tau) & \text{si } \tau \leq T \\ \lambda^2 (t+T)(t+\tau) + \lambda(t+T) & \text{si } \tau \geq T \end{cases} \\ E[N(t)N(t+T+\tau)] &= \begin{cases} \lambda^2 t(t+T+\tau) + \lambda(t+T+\tau) & \text{si } \tau \leq -T \\ \lambda^2 t(t+T+\tau) + \lambda t & \text{si } \tau \geq -T \end{cases} \\ E[N(t+T)N(t+T+\tau)] &= \begin{cases} \lambda^2 (t+T)(t+T+\tau) + \lambda(t+T+\tau) & \text{si } \tau \leq 0 \\ \lambda^2 (t+T)(t+T+\tau) + \lambda(t+T) & \text{si } \tau \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $\tau \leq -T$, en injectant ces relations dans (56), on trouve

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t+\tau)] &= \lambda^2 t(t+\tau) + \lambda(t+\tau) - (\lambda^2 (t+T)(t+\tau) + \lambda(t+\tau)) \\ &\quad - (\lambda^2 t(t+T+\tau) + \lambda(t+T+\tau)) \\ &\quad + \lambda^2 (t+T)(t+T+\tau) + \lambda(t+T+\tau) \\ &= \lambda^2 T^2 \end{aligned}$$

et en procédant de la sorte pour $-T < \tau \leq 0$, $0 < \tau \leq T$ et $\tau > T$, on trouve finalement

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = \begin{cases} \lambda^2 T^2 + \lambda(T - |\tau|) & \text{si } |\tau| \leq T \\ \lambda^2 T^2 & \text{si } |\tau| \geq T \end{cases}$$

(c) Oui, à cause des deux réponses précédentes.

Méthode rapide : on constate que le processus $X(t)$ est un bruit impulsif de Poisson, avec un pulse rectangulaire $h(t) = 1_{]-T,0]}(t)$ de hauteur unité et de largeur égale à T , dont la transformée de Fourier est

$$H(f) = \frac{1 - e^{-2\pi j f T}}{2\pi j f}.$$

Par conséquent :

(a) $E[X(t)] = \lambda \int_0^T ds = \lambda T.$

(b) Comme $H(0) = \int_0^T ds = T,$

$$S_X(f) = \lambda^2 T^2 \delta(f) + \lambda \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f} \right)^2 = \lambda^2 T^2 \delta(f) + \lambda T^2 \text{sinc}^2(fT)$$

et

$$R_X(\tau) = \begin{cases} \lambda^2 T^2 + \lambda T(1 - |\tau|/T) & \text{si } |\tau| \leq T \\ \lambda^2 T^2 & \text{si } |\tau| \geq T \end{cases}$$

(c) Oui comme tout bruit impulsif de Poisson homogène avec $h(t)$ absolument intégrable².

(d) Comme $N(t)$ est un processus de Poisson homogène, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X(t) = n) = P(N(t+T) - N(t) = n) = P(N(T) = n) = e^{-\lambda T} (\lambda T)^n / n!$$

(e) Oui, car $X(t)$ est l'accroissement d'un processus de Poisson homogène $N(t)$ sur l'intervalle $]t, t+T]$. A cause de l'hypothèse H2 de la définition 1, les accroissements d'un Processus de Poisson sont stationnaires, le processus X est lui-même SSS.

(f) Oui, car $C_X(\tau) = 0$ pour $|\tau| > T$.

13. La limite quantique est

$$SNR_{PINquant} = \frac{\left((P_s/h\nu) \int_{-\infty}^{\infty} h(s) ds \right)^2}{(P_s/h\nu) \int_{-\infty}^{\infty} h^2(s) ds} = \frac{(P_s/h\nu) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(s) ds \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(s) ds}. \quad (57)$$

Pour le pulse triangulaire de l'énoncé,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(s) ds &= \frac{h_0 w_d}{2v} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h^2(s) ds &= \frac{h_0^2 w_d}{3v} \end{aligned}$$

d'où (57) devient

$$SNR_{PINquant} = \frac{3}{4} \frac{P_s}{h\nu} \frac{w_d}{v}.$$

2. en fait on montrer que tout bruit impulsif de Poisson homogène sur $\mathbb{R}$ avec $h(t)$ absolument intégrable est SSS

14. Comme les arrivées de photons suivent un processus de Poisson d'intensité $P_s/h\nu = E_b/h\nu T$ quand un bit "1" est transmis, et qu'aucun photon ne peut arriver quand un bit "0" est transmis,

$$\begin{aligned} P_e &= P(\text{aucun photon capté en } T \text{ unités de temps} | \text{bit "1" transmis})P(\text{bit "1" transmis}) \\ &\quad + P(\text{au moins un photon capté en } T \text{ unités de temps} | \text{bit "0" transmis})P(\text{bit "0" transmis}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-E_b/h\nu}. \end{aligned}$$

15. Comme

$$SNR_{APD} = \frac{SNR_{PIN}}{F(1 - \xi) + (1/\mu_A^2)\xi}$$

et que seul le dénominateur de cette expression dépend de μ_A , maximiser cette quantité revient à minimiser son dénominateur. En injectant l'expression de F en fonction de μ_A , il faut minimiser

$$(k\mu_A + (2 - 1/\mu_A)(1 - k))(1 - \xi) + (1/\mu_A^2)\xi.$$

En annulant la dérivée de cette expression par rapport à μ_A , on obtient l'équation

$$(k + (1/\mu_A^2)(1 - k))(1 - \xi) - 2(1/\mu_A^3)\xi = 0.$$

- (a) Si $k = 1$, cette équation devient $(1 - \xi) - 2(1/\mu_A^3)\xi = 0$, dont la solution est

$$\mu_A = \sqrt[3]{2\xi/(1 - \xi)} = 2.$$

Le gain est très faible à cause du facteur d'excès de bruit élevé, et en fait une photodiode PIN ferait (presque) aussi bien l'affaire.

- (b) Si $k = 0$, cette équation devient $(1 - \xi) - 2(1/\mu_A)\xi = 0$, dont la solution est

$$\mu_A = 2\xi/(1 - \xi) = 8.$$

A présent, bien que les bruits impulsifs soient déjà importants, il reste intéressant d'utiliser une photodiode APD.

16. (a) La probabilité cherchée est

$$P(X > x) = P(\text{aucun autre noeud dans un disque de rayon } x) = e^{-\lambda\pi x^2}.$$

- (b) On calcule tout d'abord que $f_X(x) = 2\lambda\pi x e^{-\lambda\pi x^2}$, et ensuite que

$$E[X] = \int_0^\infty x f_X(x) dx = 2\lambda\pi \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda\pi x^2} dx = \lambda\pi \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-\lambda\pi x^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Remarquons que X est une v.a. de Rayleigh.

Module 6

1. Pour que $Y(n)$ soit une chaîne de Markov, il faut que

$$P(Y(n) = y_0 | Y(n-1) = y_1, Y(n-2) = y_2, \dots) = P(Y(n) = y_0 | Y(n-1) = y_1).$$

Dans ce cas-ci, on calcule que $P(Y(n) = 1 | Y(n-1) = 0, Y(n-2) = 1) = 0 \neq 1/4 = P(Y(n) = 1 | Y(n-1) = 0)$, donc ce n'est pas une chaîne de Markov.

2. Comme $Y(0) = 0$, $Y(1)$ peut prendre les valeurs 1 et -1 , $Y(2)$ peut prendre les valeurs $\alpha y_1 \pm 1$ i.e., $\alpha + 1$, $\alpha - 1$, $-\alpha - 1$ ou $-\alpha + 1$, $\dots$, $Y(n)$ peut prendre les valeurs $\alpha y_{n-1} \pm 1$. Posons $y'_n = \alpha y_{n-1} + 1$ et $y''_n = \alpha y_{n-1} - 1$. Alors

$$\begin{aligned} P(Y(n) = y'_n | Y(n-1) = y_{n-1}) &= 1/2 \\ P(Y(n) = y''_n | Y(n-1) = y_{n-1}) &= 1/2 \\ P(Y(n) \neq y'_n, y''_n | Y(n-1) = y_{n-1}) &= 0. \end{aligned}$$

Dans chaque cas $P(Y(n) = y_n | Y(n-1) = y_{n-1}, \dots, Y(0) = 0) = P(Y(n) = y_n | Y(n-1) = y_{n-1})$, et donc $Y(n)$ est une chaîne de Markov.

3. Si i communique avec j et si j communique avec k , il existe $m, n \in \mathbb{N}_0$ tels que $p_{ij}^{(m)} > 0$ et $p_{jk}^{(n)} > 0$. Comme pour tout $n + m \in \mathbb{N}$,

$$p_{ik}^{(m+n)} = \sum_{l \in S} p_{il}^{(m)} p_{lk}^{(n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(n)} > 0$$

on a que i est accessible à partir de k .

De même, il existe $m', n' \in \mathbb{N}_0$ tels que $p_{ji}^{(m')} > 0$ et $p_{kj}^{(n')} > 0$. Comme pour tout $n' + m' \in \mathbb{N}$,

$$p_{ki}^{(n'+m')} = \sum_{l \in S} p_{kl}^{(n')} p_{li}^{(m')} \geq p_{kj}^{(n')} p_{ji}^{(m')} > 0.$$

on a que i est accessible à partir de k , et donc ces deux états communiquent.

4. Il faut résoudre cet exercice par récurrence : on vérifie aisément que pour $n = 1$, l'hypothèse est vraie. On suppose ensuite qu'elle est vraie jusqu'en n , et on montre qu'elle l'est encore en $n + 1$ (c'est un simple produit de matrices 2×2).
5. Comme $0 < p < 1$, tous les états communiquent (la chaîne est donc irréductible) et sont récurrents positifs. Enfin la chaîne est apériodique, à cause des deux états 0 et N . Dès lors la distribution stationnaire existe, est unique et est donnée par la solution de $\pi^* = \pi^* P$ qu'on peut expliciter sous forme matricielle par

$$[\pi_0^* \ \pi_1^* \ \pi_2^* \ \dots \ \pi_N^*] = [\pi_0^* \ \pi_1^* \ \pi_2^* \ \dots \ \pi_N^*] \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & \dots & 0 \\ 1-p & 0 & p & \ddots & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 1-p & p \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\pi_0^* &= (1-p)\pi_0^* + (1-p)\pi_1^* \\
\pi_1^* &= p\pi_0^* + (1-p)\pi_2^* \\
\pi_2^* &= p\pi_1^* + (1-p)\pi_3^* \\
&\vdots \\
\pi_N^* &= p\pi_{N-1}^* + p\pi_N^*.
\end{aligned}$$

La première équation entraîne que $\pi_1^* = \pi_0^* p / (1-p)$. Supposons que pour $0 \leq k \leq i-1$, on ait $\pi_k^* = \pi_0^* (p/(1-p))^k$. Alors la $(i-1)$ ième équation devient

$$\pi_0^* \left(\frac{p}{1-p} \right)^{i-2} = p\pi_0^* \left(\frac{p}{1-p} \right)^{i-2} + (1-p)\pi_i^*$$

d'où l'on tire que $\pi_i^* = \pi_0^* (p/(1-p))^i$, ce qui établit la validité du résultat par récurrence pour tout $0 \leq i \leq N$. La somme de toutes ces probabilités valant 1, on en tire la valeur de π_0^* et on obtient finalement, en posant $\rho = p/(1-p)$,

$$\pi_i^* = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho^i$$

pour $0 \leq i \leq N$.

6. (a) On a que $p_{i,i+1} = p$ et que $p_{i,i-1} = 1-p$ pour $i \in [0, N] \bmod N$, tandis que tous les autres p_{ij} sont nuls. On a donc bien

$$\sum_{i=0}^N p_{ij} = \sum_{j=0}^N p_{ij} = 1$$

avec $p_{ij} \geq 0$ pour tout $0 \leq i, j \leq N$ et la matrice est doublement stochastique.

- (b) Si le nombre d'états $(N+1)$ est fini, la distribution

$$\pi_i^* = \frac{1}{N+1}$$

est invariante car elle vérifie les conditions

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^N \pi_i^* &= 1 \\
\sum_{i=0}^N \pi_i^* p_{ij} &= \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N p_{ij} = \frac{1}{N+1} = \pi_j^*.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que la somme des p_{ij} le long des colonnes vaut l'unité.

Si $N \rightarrow \infty$, tous les $\pi_i^* \rightarrow 0$ et la distribution stationnaire n'existe plus. En fait les états deviennent récurrents nuls.

7. P_1 : Une seule classe d'états récurrents positifs.
- P_2 : Les deux classes $\{1, 2\}$ et $\{3, 4\}$ sont chacune formée de deux états récurrents positifs, l'état 5 est transitoire.
8. (a) Si $X(n)$ est le nombre de parapluies disponibles à l'instant n , le diagramme des transitions entre états est celui de la figure 12.

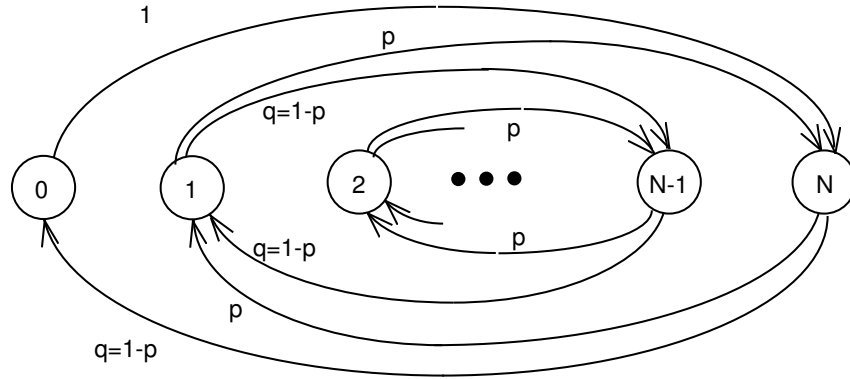


FIGURE 12 – Problème des parapluies.

Cherchons la distribution stationnaire :

$$[\pi_0^* \ \pi_1^* \ \pi_2^* \ \dots \ \pi_N^*] = [\pi_0^* \ \pi_1^* \ \pi_2^* \ \dots \ \pi_N^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1-p & p \\ 0 & 0 & & & 1-p & p & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1-p & & & & 0 \\ 0 & 1-p & p & & & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} \pi_0^* &= (1-p)\pi_N^* \\ \pi_1^* &= (1-p)\pi_{N-1}^* + p\pi_N^* \\ \pi_2^* &= (1-p)\pi_{N-2}^* + p\pi_{N-1}^* \\ &\vdots \\ \pi_{N-1}^* &= (1-p)\pi_1^* + p\pi_2^* \\ \pi_N^* &= \pi_0^* + p\pi_1^*. \end{aligned}$$

dont la solution est

$$\begin{aligned} \pi_0^* &= \frac{1-p}{N+1-p} \\ \pi_i^* &= \frac{1}{N+1-p} \quad \text{si } 1 \leq i \leq N \end{aligned}$$

La probabilité cherchée est donc

$$p\pi_0^* = \frac{p(1-p)}{N+1-p}.$$

(b) La valeur de p qui maximise $p\pi_0^*$ est celle qui annule

$$(1-2p)(N+1-p) + p(1-p) = 0$$

i.e. la racine comprise entre 0 et 1 de $p^2 - 2(N+1)p + (N+1) = 0$ qui est

$$p = N+1 - \sqrt{N^2 + N}.$$

Ici $N = 10$ et $p = 11 - \sqrt{110} > 1/2$. Donc il améliorerait en effet sa situation avec un pays où $p < 1/2$. Mais il l'améliorerait encore davantage en étant moins distrait !

9. Cette chaîne est réversible, et on doit résoudre les équations de balance

$$\begin{aligned} \pi_0^* &= q\pi_1^* \\ p\pi_{i-1}^* &= q\pi_i^* \quad 2 \leq i \leq N-1 \\ p\pi_{N-1}^* &= \pi_N^* \end{aligned}$$

dont on tire par récurrence que

$$\begin{aligned} \pi_1^* &= \frac{1}{q}\pi_0^* \\ \pi_i^* &= \frac{p}{q}\pi_{i-1}^* = \dots = \left(\frac{p}{q}\right)^{i-1} \pi_1^* = \frac{1}{q} \left(\frac{p}{q}\right)^{i-1} \pi_0^* \quad 2 \leq i \leq N-1 \\ \pi_N^* &= p\pi_{N-1}^* = \left(\frac{p}{q}\right)^{N-1} \pi_0^*. \end{aligned}$$

Il reste à déterminer π_0^* par la condition de normalisation

$$1 = \sum_{i=0}^N \pi_i^* = \pi_0^* \left(1 + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{i-1} + \left(\frac{p}{q}\right)^{N-1} \right).$$

Si $p \neq 1/2$, cette expression devient

$$\begin{aligned} 1 &= \pi_0^* \left(1 + \frac{1}{q} \frac{1 - (p/q)^{N-1}}{1 - p/q} + \left(\frac{p}{q}\right)^{N-1} \right) = \pi_0^* \frac{(q-p)(1 + (p/q)^{N-1}) + 1 - (p/q)^{N-1}}{q-p} \\ &= \pi_0^* \frac{(q-p+1) + (q-p-1)(p/q)^{N-1}}{q-p} = \pi_0^* \frac{2(1-p) - 2p(p/(1-p))^{N-1}}{1-2p} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \pi_0^* &= \frac{(1-2p)(1-p)^{N-1}}{2((1-p)^N - p^N)} \\ \pi_i^* &= \frac{(1-2p)(1-p)^{N-1}}{2p((1-p)^N - p^N)} \left(\frac{p}{1-p}\right)^i \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ \pi_N^* &= \frac{(1-2p)p^{N-1}}{2p((1-p)^N - p^N)}. \end{aligned}$$

Si $p = 1/2 = q$, on trouve à la place

$$1 = \pi_0^* \left(1 + \frac{N-1}{q} + 1 \right) = \pi_0^* 2N$$

d'où

$$\begin{aligned}\pi_0^* &= 1/2N \\ \pi_i^* &= 1/N \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ \pi_N^* &= 1/2N.\end{aligned}$$

10. Si $p \neq 1/2$, on a $h_{iN} = \frac{\rho^i - 1}{\rho^N - 1}$ avec $\rho = q/p = (1-p)/p$. Donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h_{iN} = \begin{cases} 1 - \rho^i & \text{si } \rho < 1 (p > 1/2) \\ 0 & \text{si } \rho > 1 (p < 1/2) \end{cases}$$

Si $p = 1/2 = q$, on a $h_{iN} = i/N \rightarrow 0$ pour $N \rightarrow \infty$.

11. Pour raccourcir les notations, désignons $\mu_i = \mu_{i\{0,N\}}^H = E[H_{\{0,N\}} \mid X(0) = i]$. Il faut calculer les solutions minimales non négatives de

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 0 \\ \mu_i &= 1 + q\mu_{i-1} + p\mu_{i+1} \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ \mu_N &= 0\end{aligned}$$

C'est une équation aux récurrences linéaires du second ordre à coefficients constants mais cette fois non homogène ($ax_{i+1} + bx_i + cx_{i-1} = 1$ au lieu de $ax_{i+1} + bx_i + cx_{i-1} = 0$ dans le cas homogène). On résout cette équation en

(i) déterminant la solution générale de l'équation homogène, qui est

$$\mu_{i,gen} = \begin{cases} K_a + K_b(q/p)^i & \text{si } p \neq q \\ K_a + K_b i & \text{si } p = q \end{cases}$$

(ii) déterminant une solution particulière de l'équation non homogène (au flair, mais ici on connaît la réponse finale...), par exemple :

$$\mu_{i,part} = \begin{cases} \frac{-i}{q-p} & \text{si } p \neq q \\ -i^2 & \text{si } p = q \end{cases}$$

(iii) additionnant les deux solutions et déterminant les constantes grâce aux conditions aux bords :

$$0 = \mu_0 = \begin{cases} K_a + K_b & \text{si } p \neq q \\ K_a & \text{si } p = q \end{cases}$$

et

$$0 = \mu_N = \begin{cases} K_a + K_b(q/p)^N - N/(q-p) = 0 & \text{si } p \neq q \\ K_a + K_b N - N^2 & \text{si } p = q \end{cases}$$

En résolvant pour K_a et K_b , on trouve finalement

$$\mu_i = \begin{cases} \frac{1}{p-q} \left(N \frac{(q/p)^i - 1}{(q/p)^N - 1} - i \right) & \text{si } p \neq q \\ i(N-i) & \text{si } p = q \end{cases}$$

12. (a) Les probabilités de transitions non nulles sont (figure 13) $p_{ij} = 1/i$ si $0 \leq j < i \leq N$.

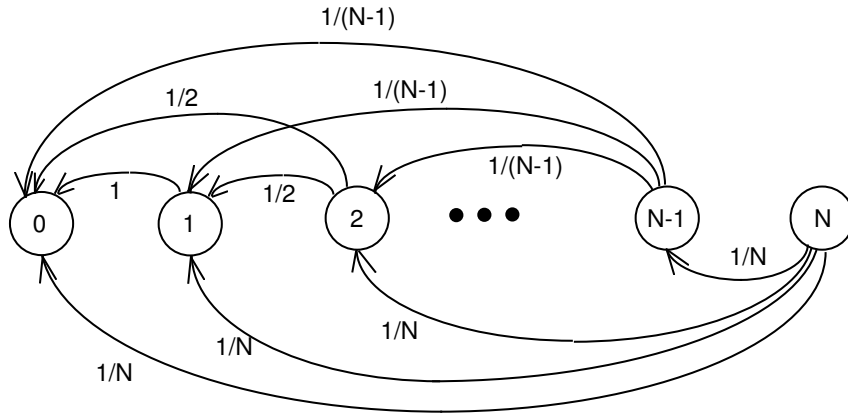


FIGURE 13 – Partie de golf.

- (b) Il faut calculer les solutions minimales non négatives de

$$\begin{aligned} \mu_{i0}^H &= 0 & \text{si } i = 0 \\ \mu_{i0}^H &= 1 + \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} \mu_{j0}^H & \text{si } 1 \leq i \leq N \end{aligned} \quad (58)$$

Dans notre cas, l'espérance cherchée est μ_{N0}^H .

Pour $i = 1$, on a directement $\mu_{10}^H = 1$. On montre que μ_{i0}^H vérifie la récurrence

$$\begin{aligned} \mu_{i0}^H &= 1 + \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} \mu_{j0}^H = 1 + \frac{1}{i} \left(\sum_{j=0}^{i-2} \mu_{j0}^H + \mu_{i-1,0}^H \right) \\ &= 1 + \frac{1}{i} \left(\sum_{j=0}^{i-2} \mu_{j0}^H + 1 + \frac{1}{i-1} \sum_{j=0}^{i-2} \mu_{j0}^H \right) \\ &= 1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i} \left(1 + \frac{1}{i-1} \right) \sum_{j=0}^{i-2} \mu_{j0}^H = \frac{1}{i} + 1 + \left(\frac{1}{i-1} \sum_{j=0}^{i-2} \mu_{j0}^H \right) = \frac{1}{i} + \mu_{i-1,0}^H \end{aligned}$$

et donc

$$\mu_{i0}^H = \frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1.$$

En particulier,

$$\mu_{N0}^H = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i}.$$

Remarquons que pour $N \rightarrow \infty$, $\mu_{N0}^H \rightarrow \infty$: la probabilité d'atteindre 0 vaut toujours l'unité, mais l'espérance du temps d'atteinte est infinie.

13. (a) On a (en détaillant toutes les étapes) :

$$\begin{aligned} f_0 &= P(X(n) = 0 \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}_0 \mid X(0) = 0) \\ &= P(X(n) = 0 \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}_0 \mid X(1) = 1) \quad (\text{car } p_{01} = 1) \\ &= P(X(n) = 0 \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} \mid X(0) = 1) \quad (\text{car chaîne homogène}) \\ &= 1 - P(X(n) \geq 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \mid X(0) = 1) \\ &= 1 - P(Y(n) \geq 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \mid Y(0) = 1) \\ &= P(Y(n) = 0 \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} \mid Y(0) = 1) \\ &= h_{10} \end{aligned}$$

- (b) La chaîne est irréductible, donc tous les états sont soit tous récurrents, soit tous transitoires. Comme $h_{10} = 1$ si $p \leq 1/2$, $f_0 = 1$ si $p \leq 1/2$ et les états sont alors récurrents. Comme $h_{10} = (1-p)/p < 1$ si $p > 1/2$, $f_0 < 1$ si $p > 1/2$ et les états sont alors transitoires.

- (c) On doit résoudre les équations de balance

$$\begin{aligned} \pi_0^* &= q\pi_1^* \\ p\pi_{i-1}^* &= q\pi_i^* \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

dont on tire par récurrence que pour tout $i \geq 1$

$$\pi_i^* = \frac{p}{q}\pi_{i-1}^* = \dots = \left(\frac{p}{q}\right)^{i-1} \pi_1^* = \frac{1}{q} \left(\frac{p}{q}\right)^{i-1} \pi_0^*$$

La condition de normalisation s'écrit

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^* = \pi_0^* \left(1 + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{\infty} \rho^{i-1}\right).$$

Si $p < 1/2$, on en tire que

$$\begin{aligned} \pi_0^* &= 1 - \frac{p}{q} = \frac{1-2p}{2(1-p)} \\ \pi_i^* &= \frac{1-2p}{2p(1-p)} \left(\frac{p}{1-p}\right)^i, \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

Tous les états sont donc récurrents positifs. Si $p \rightarrow 1/2$, toutes les probabilités ci-dessus tendent vers zéro : il n'y a plus de distribution stationnaire. Tous les états sont dans ce cas récurrents nuls.

14. On a $c_k = P(C_i^{n-1} = k) = p(1-p)^k$ et $G_C(z) = p/(1 - (1-p)z)$. Les solutions de

$$z = \frac{p}{1 - (1-p)z}$$

sont $z = p/(1-p)$ et $z = 1$. La probabilité cherchée est la plus petite de ces valeurs, donc :

$$h_{10} = \begin{cases} p/(1-p) = 1/\mu_C & \text{si } p < 1/2 \quad (\mu_C > 1) \\ 1 & \text{si } p \geq 1/2 \quad (\mu_C \leq 1) \end{cases}$$

15. On trouve

$$\begin{aligned} E[X(n)] &= \sum_{m \in \mathbb{N}} E[X(n) | X(n-1) = m] P(X(n-1) = m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} E \left[\sum_{i=1}^m C_i^{n-1} \right] P(X(n-1) = m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^m E[C_i^{n-1}] P(X(n-1) = m) = \sum_{m \in \mathbb{N}} m \mu_C P(X(n-1) = m) \\ &= \mu_C E[X(n-1)] = \dots = \mu_C^2 E[X(n-2)] = \dots = \mu_C^n E[X(0)] = \mu_C^n \end{aligned}$$

Si $\mu_C < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X(n)] = 0$, ce qui est attendu puisque la probabilité que la population disparaisse en un temps fini h_{10} vaut 1.

Notons que lorsque $\mu_C = 1$, $E[X(n)] = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Néanmoins $h_{10} = 1$. En fait lorsque n devient très grand la $(n+1)$ ième génération contient un très grand nombre d'individus avec une très faible probabilité, et est éteinte avec grande probabilité, de sorte que l'espérance reste égale à 1.

16. Les équations de balance à résoudre sont

$$\pi_{i-1}^* p_{i-1,i} = \pi_i^* p_{i,i-1}.$$

dont on tire

$$\pi_i^* = \frac{p_{i,i-1}}{p_{i-1,i}} \pi_{i-1}^* = \frac{N-i+1}{i} \pi_{i-1}^*$$

et par récurrence

$$\pi_i^* = \frac{N-i+1}{i} \pi_{i-1}^* = \dots = \frac{(N-i+1)(N-i+2) \dots N}{i(i-1) \dots 1} \pi_0^* = \frac{N!}{i!(N-i)!} \pi_0^* = C_N^i \pi_0^*$$

pour tout $1 \leq i \leq N$. La valeur de π_0^* est obtenue par la condition de normalisation

$$1 = \sum_{i=0}^N \pi_i^* = \pi_0^* \sum_{i=0}^N C_N^i = \pi_0^* 2^N$$

dont on déduit finalement, pour tout $0 \leq i \leq N$,

$$\pi_i^* = C_N^i \frac{1}{2^N}.$$

17. (a) $P(T_0 = 1 \mid X(0) = 0) = P(X(1) = 0 \mid X(0) = 0) = p_{00} = 1 - p$ tandis que pour $m \geq 2$

$$\begin{aligned} P(T_0 = m \mid X(0) = 0) &= P(X(m) = 0, X(m-1) = 1, \dots, X(1) = 1 \mid X(0) = 0) \\ &= p_{01} p_{11}^{(m-2)} p_{10} = p(1-q)^{m-2} q \end{aligned}$$

(b) On calcule d'abord

$$\begin{aligned} G_{T_0|X(0)=0}(z) &= \sum_{m \in \mathbb{N}_0} z^m P(T_0 = m \mid X(0) = 0) = z(1-p) + \sum_{m=2}^{\infty} z^m q(1-q)^{m-2} p \\ &= (1-p)z + pqz^2 \sum_{m=0}^{\infty} (z(1-q))^m = (1-p)z + pqz^2 \frac{1}{1-z(1-q)} \end{aligned}$$

dont on tire

$$E[T_0 \mid X(0) = 0] = \frac{dG_{T_0|X(0)=0}}{dz}(z=1) = 1 - p + p(1+q)/q = \frac{p+q}{q} = \frac{1}{\pi_0^*}.$$

Module 7

1. Pour une chaîne de Markov homogène,

$$\begin{aligned}
 p_{ij}(t_1 + t_2) &= P(X(t_1 + t_2) = j \mid X(0) = i) \\
 &= \sum_{k \in \mathcal{S}} P(X(t_1 + t_2) = j \mid X(t_2) = k, X(0) = i) P(X(t_2) = k \mid X(0) = i) \\
 &= \sum_{k \in \mathcal{S}} P(X(t_1 + t_2) = j \mid X(t_2) = k) P(X(t_2) = k \mid X(0) = i) \\
 &= \sum_{k \in \mathcal{S}} P(X(t_1) = j \mid X(0) = k) P(X(t_2) = k \mid X(0) = i) \\
 &= \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}(t_1) p_{kj}(t_2).
 \end{aligned}$$

2. En utilisant le fait qu'à tout instant t , $\pi_0(t) + \pi_1(t) = 1$, il suffit de résoudre la première des deux équations

$$\begin{bmatrix} \frac{d\pi_0}{dt}(t) & \frac{d\pi_1}{dt}(t) \end{bmatrix} = [\pi_0(t) \quad \pi_1(t)] \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

qui s'écrit

$$\frac{d\pi_0}{dt}(t) = \mu - (\lambda + \mu)\pi_0(t).$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, qu'on peut résoudre de diverses manières. Par exemple, en prenant la transformée de Laplace des deux membres de cette équation diff, on trouve

$$s\mathcal{L}(\pi_0)(s) - \pi_0(0) = \frac{\mu}{s} - (\lambda + \mu)\mathcal{L}(\pi_0)(s)$$

dont on tire

$$\mathcal{L}(\pi_0)(s) = \frac{\mu}{s(s + \lambda + \mu)} + \frac{\pi_0(0)}{s + \lambda + \mu} = \frac{\mu}{(\lambda + \mu)s} + \frac{\pi_0(0) - \mu/(\lambda + \mu)}{s + \lambda + \mu}$$

et en prenant la transformée de Laplace inverse

$$\pi_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \left(\pi_0(0) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

Enfin $\pi_1(t) = 1 - \pi_0(t)$.

Pour les probabilités de transition, on utilise la même méthode, en s'aidant du fait que

$$\begin{aligned}
 p_{00}(t) + p_{01}(t) &= 1 \\
 p_{10}(t) + p_{11}(t) &= 1
 \end{aligned}$$

pour résoudre

$$\frac{dp_{00}}{dt}(t) = \mu - (\lambda + \mu)p_{00}(t),$$

etc. Les conditions initiales sont $p_{00}(0) = p_{11}(0) = 1$ et $p_{01}(0) = p_{10}(0) = 0$.

3. (a) On calcule que si $\pi_i(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{i-1}$ alors

$$\begin{aligned}
 \frac{d\pi_i}{dt}(t) &= -\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{i-1} + e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{i-2}(i-1)\lambda e^{-\lambda t} \\
 &= -\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{i-1} + e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{i-2}(i-1)\lambda e^{-\lambda t} \\
 &= -i\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{i-1} + (i-1)\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{i-2}[e^{-\lambda t} + (1 - e^{-\lambda t})] \\
 &= -i\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{i-1} + (i-1)\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{i-2} \\
 &= -i\lambda\pi_i(t) + (i-1)\lambda\pi_{i-1}(t).
 \end{aligned}$$

- (b) La loi de $X(t)$ suit une loi géométrique de paramètre $p = e^{-\lambda t}$. Par conséquent,

$$E[X(t)] = \frac{1}{p} = \frac{1}{e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t}.$$

4. (a) La seule cause de transition possible à partir de l'état 0 est l'arrivée (la naissance) d'un "client" quand le système est vide, ce qui se fait avec un taux λ_0 , d'où $\nu_0 = \lambda_0$. Par contre, il y a deux causes de transition possibles à partir d'un état i : l'arrivée (la naissance) d'un "client", ce qui se produit au bout d'un temps aléatoire distribué exponentiellement avec un taux λ_i , et le départ (la mort) d'un "client", ce qui se produit au bout d'un temps aléatoire distribué exponentiellement avec un taux μ_i . La transition se fait donc au bout d'un temps aléatoire qui est le minimum de ces deux v.a. exponentielles indépendantes de taux respectifs λ_i et μ_i . Comme le minimum de deux v.a. exponentielles indépendantes de taux respectifs λ_i et μ_i est encore une v.a. exponentielle de taux $\lambda_i + \mu_i$, comme on l'a montré à l'exercice 7 du module 5, $\nu_i = \lambda_i + \mu_i$.

- (b) En appliquant le théorème des probabilités totales au cas continu

$$\begin{aligned}
 P(X > Y) &= \int_0^\infty P(X > Y | Y = y) f_Y(y) dy = \int_0^\infty P(X > y | Y = y) f_Y(y) dy \\
 &= \int_0^\infty P(X > y) f_Y(y) dy = \int_0^\infty e^{-\lambda_X y} \lambda_Y e^{-\lambda_Y y} dy = \frac{\lambda_Y}{\lambda_X + \lambda_Y}.
 \end{aligned}$$

- (c) La seule transition possible à partir de l'état 0 est de passer à l'état 1, d'où $\hat{q}_{0,1} = 1$. D'autre part, si $i \in \mathbb{N}_0$, la transition se fera vers l'état $(i+1)$ si le prochain événement est une arrivée (une naissance) et non un départ (une mort), donc si la v.a. exponentielle de taux λ_i décrivant le temps jusqu'à la prochaine naissance est inférieure à la v.a. exponentielle de taux μ_i décrivant le temps jusqu'à la prochaine mort, ce qui se fait avec une probabilité calculée en b) et qui vaut

$$\hat{q}_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}.$$

On déduit enfin $\hat{q}_{i,i-1} = 1 - \hat{q}_{i,i+1}$.

5. On a, si $t_1 \leq t_2$,

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = 1 \cdot P(X(t_1)X(t_2) = 1) + 0 \cdot P(X(t_1)X(t_2) = 0) \\ &= P(X(t_1) = 1 \text{ et } X(t_2) = 1) = P(X(t_2) = 1 \mid X(t_1) = 1)P(X(t_1) = 1) \\ &= p_{11}(t_2 - t_1)\pi_1(t_1) \end{aligned}$$

On a calculé que

$$\begin{aligned} p_{11}(t_2 - t_1) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)(t_2 - t_1)} \\ \pi_1(t_1) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \left(\pi_1(0) - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) e^{-(\lambda + \mu)t_1} \end{aligned}$$

de sorte que

$$R_X(t_1, t_2) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)(t_2 - t_1)} \right) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \left(\pi_1(0) - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) e^{-(\lambda + \mu)t_1} \right)$$

et vice-versa si $t_1 \geq t_2$. Pour que le processus soit stationnaire, il faut que

$$\pi_1(0) = \pi_1^* = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Dans ce cas en effet, le processus est même SSS car c'est une chaîne de Markov, pour laquelle stationnarité veut dire stationnarité au sens strict, et avec $\tau = t_1 - t_2$,

$$R_X(\tau) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)|\tau|} \right) \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

En particulier, si $\lambda = \mu$, ces deux dernières expressions deviennent $\pi_1(0) = \pi_1^* = 1/2$ et

$$R_X(\tau) = \frac{1}{4} \left(1 + e^{-2\lambda|\tau|} \right),$$

ce qui est bien la solution de l'exercice 9 du module 3.

6. (a) Le diagramme des transitions est donné à la figure 14.

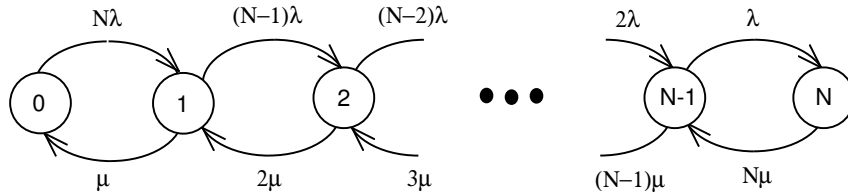


FIGURE 14 – Diagramme des transitions de l'exo 6

- (b) Comme c'est un processus de naissance et de mort réversible, on peut écrire les équations de balance détaillée qui sont

$$\begin{aligned}
 N\lambda\pi_0^* &= \mu\pi_1^* \\
 (N-1)\lambda\pi_1^* &= 2\mu\pi_2^* \\
 &\vdots \\
 (N-i+1)\lambda\pi_{i-1}^* &= i\mu\pi_i^* \\
 &\vdots \\
 \lambda\pi_{N-1}^* &= N\mu\pi_N^*.
 \end{aligned}$$

Par récurrence, on trouve

$$\begin{aligned}
 \pi_i^* &= \frac{(N-i+1)\lambda}{i\mu}\pi_{i-1}^* = \dots = \frac{(N-i+1)\dots(N-2)(N-1)N}{i\dots 3\cdot 2\cdot 1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\pi_0^* \\
 &= \frac{N!}{(N-i)!i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\pi_0^* = C_N^i\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\pi_0^*.
 \end{aligned}$$

La condition de normalisation donne

$$1 = \sum_{i=0}^N \pi_i^* = \pi_0^* \sum_{i=0}^N C_N^i \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = \pi_0^* \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^N$$

à cause de la formule du binôme avec $a = \lambda/\mu$ et $b = 1$

$$(a+b)^N = \sum_{i=0}^N C_N^i a^{N-i} b^i.$$

Par conséquent

$$\pi_i^* = C_N^i \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^{-N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = C_N^i \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{N-i}.$$

On constate que la loi de probabilité de X est une loi binomiale $Bin\left(N, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$. On pouvait s'y attendre : X compte le nombre de locuteurs actifs parmi N locuteurs, chacun d'eux ayant une probabilité $p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ d'être actif.

- (c) Comme X est une v.a. binomiale $Bin\left(N, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$, sa moyenne vaut

$$E[X] = \frac{N\lambda}{\lambda + \mu}.$$

7. (a) On vérifie que

$$\pi_i(t) = P(X(t) = i) = \frac{1}{i!} \left[(1 - e^{-\mu t}) \frac{\lambda}{\mu} \right]^i \exp \left[-(1 - e^{-\mu t}) \frac{\lambda}{\mu} \right].$$

satisfait bien à

$$\begin{aligned}\frac{d\pi_0}{dt}(t) &= -\lambda\pi_0(t) + \mu\pi_1(t) \\ \frac{d\pi_i}{dt}(t) &= \lambda\pi_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu)\pi_i(t) + (i+1)\mu\pi_{i+1}(t)\end{aligned}$$

(b) On calcule tout d'abord

$$\begin{aligned}G_{X(t)}(z; t) &= \sum_{i=0}^{\infty} z^i \pi_i(t) = \exp \left[-(1 - e^{-\mu t}) \frac{\lambda}{\mu} \right] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left[(1 - e^{-\mu t}) \frac{\lambda}{\mu} z \right]^i \\ &= \exp \left[-(1 - e^{-\mu t}) \frac{\lambda}{\mu} \right] \exp \left[(1 - e^{-\mu t}) \frac{\lambda}{\mu} z \right] = \exp \left[(1 - e^{-\mu t}) \frac{\lambda}{\mu} (z - 1) \right]\end{aligned}$$

dont on tire

$$E[X(t)] = \frac{dG_{X(t)}}{dz}(z = 1; t) = (1 - e^{-\mu t}) \frac{\lambda}{\mu}.$$

(c) Lorsque $t \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}\pi_i(t) &\rightarrow \pi_i^* = \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!} e^{-\lambda/\mu} \\ E[X(t)] &\rightarrow \frac{\lambda}{\mu}.\end{aligned}$$

8. Les équations de balance globale permettent d'écrire que

$$\lambda\pi_0^* = \mu\pi_1^* + \gamma \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^* = \mu\pi_1^* + \gamma(1 - \pi_0^*) \quad (59)$$

$$(\lambda + \mu + \gamma)\pi_i^* = \lambda\pi_{i-1}^* + \mu\pi_{i+1}^* \quad \text{si } i \in \mathbb{N}_0. \quad (60)$$

Les équations (60) sont des équations aux récurrences homogènes du 2ème degré, dont la solution générale est

$$\pi_i^* = K_a \alpha^i + K_b \beta^i$$

où α et β les deux racines du trinôme du second degré $\mu z^2 - (\lambda + \mu + \gamma)z + \lambda$, i.e. avec $\rho = \lambda/\mu$ et $\xi = \gamma/\mu$,

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2} \left(1 + \rho + \xi + \sqrt{(1 + \rho + \xi)^2 - 4\rho} \right) \\ \beta &= \frac{1}{2} \left(1 + \rho + \xi - \sqrt{(1 + \rho + \xi)^2 - 4\rho} \right).\end{aligned}$$

Comme $\alpha > 1$, la seule manière de garder $\pi_i^* \leq 1$ pour tout i est de prendre $K_a = 0$. Dans ce cas, $K_b = \pi_0^*$ et la condition de normalisation est

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^* = \pi_0^* \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i = \pi_0^* (1 - \beta)^{-1}$$

car on peut vérifier que $\beta < 1$. On en tire que pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$\pi_i^* = (1 - \beta)\beta^i.$$

Enfin, il faut encore vérifier que l'équation de condition au bord (59) est satisfaite : c'est bien le cas.

9. Les équations de balance détaillée de la file M/M/s sont

$$\lambda\pi_{n-1}^* = n\mu\pi_n^* \quad \text{si } 1 \leq n \leq s-1 \quad (61)$$

$$\lambda\pi_{n-1}^* = s\mu\pi_n^* \quad \text{si } n \geq s \quad (62)$$

dont on déduit que

$$\begin{aligned} \pi_n^* &= \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0^* \quad \text{si } 1 \leq n \leq s-1 \\ \pi_n^* &= \frac{1}{s!s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0^* \quad \text{si } n \geq s \end{aligned}$$

La constante de normalisation est par conséquent avec $\lambda/\mu = \rho$,

$$\pi_0^* = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \rho^n + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{s!s^{n-s}} \rho^n \right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{s^m} \rho^m \right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{1}{1 - \rho/s} \right)^{-1}$$

La probabilité de blocage est la probabilité qu'un appel entrant soit mis en attente, c'est-à-dire avec $\rho = \lambda/\mu$,

$$\begin{aligned} C(s, \rho) &= \sum_{n=s}^{\infty} \pi_n^* = \pi_0^* \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{s!s^{n-s}} \rho^n = \pi_0^* \frac{\rho^s}{s!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{s^m} \rho^m = \pi_0^* \frac{\rho^s}{s!} \frac{1}{1 - \rho/s} \\ &= \frac{\rho^s/s!}{(1 - \rho/s) \sum_{n=0}^{s-1} \rho^n/n! + \rho^s/s!} \end{aligned}$$

Pour que la chaîne soit ergodique, il faut que $\lambda < s\mu$.

10. (a) Le diagramme des transitions est donné à la figure 15)

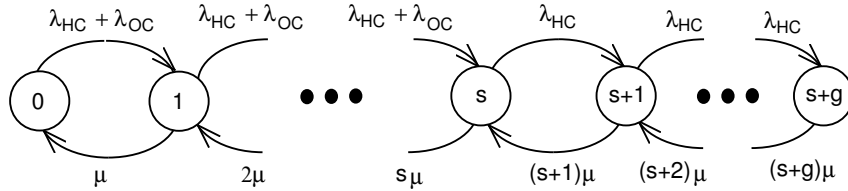


FIGURE 15 – Diagramme des transitions de l'exo 10

- (b) Comme c'est un processus de naissance et de mort réversible, on peut écrire les équations de balance détaillée qui sont

$$(\lambda_{HC} + \lambda_{OC})\pi_{n-1}^* = n\mu\pi_n^* \quad \text{si } 1 \leq n \leq s \quad (63)$$

$$\lambda_{HC}\pi_{n-1}^* = n\mu\pi_n^* \quad \text{si } s+1 \leq n \leq s+g \quad (64)$$

dont on déduit que

$$\begin{aligned} \pi_n^* &= \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_{HC} + \lambda_{OC}}{\mu} \right)^n \pi_0^* \quad \text{si } 1 \leq n \leq s \\ \pi_n^* &= \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_{HC}}{\mu} \right)^{(n-s)} \left(\frac{\lambda_{HC} + \lambda_{OC}}{\mu} \right)^s \pi_0^* \quad \text{si } s+1 \leq n \leq s+g \end{aligned}$$

La constante de normalisation est par conséquent,

$$\pi_0^* = \left(\sum_{n=0}^s \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_{HC} + \lambda_{OC}}{\mu} \right)^n + \sum_{n=s+1}^{s+g} \left(\frac{\lambda_{HC}}{\lambda_{HC} + \lambda_{OC}} \right)^{(n-s)} \left(\frac{\lambda_{HC} + \lambda_{OC}}{\mu} \right)^n \right)^{-1}.$$

La probabilité de blocage d'un appel HC est la probabilité qu'un appel HC entrant soit rejeté, c'est-à-dire avec π_0^* donné ci-dessus,

$$P(\text{rejet HC}) = \pi_{s+g}^* = \frac{1}{(s+g)!} \left(\frac{\lambda_{HC}}{\mu} \right)^g \left(\frac{\lambda_{HC} + \lambda_{OC}}{\mu} \right)^s \pi_0^*.$$

- (c) La probabilité de blocage d'un appel OC est la probabilité qu'un appel OC entrant soit rejeté, c'est-à-dire avec π_0^* donné ci-dessus,

$$\begin{aligned} P(\text{rejet HC}) &= \sum_{n=s}^{s+g} \pi_n^* = \sum_{n=s}^{s+g} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_{HC}}{\mu} \right)^{(n-s)} \left(\frac{\lambda_{HC} + \lambda_{OC}}{\mu} \right)^s \pi_0^* \\ &= \pi_0^* \left(\frac{\lambda_{HC} + \lambda_{OC}}{\mu} \right)^s \sum_{m=0}^g \frac{1}{(m+s)!} \left(\frac{\lambda_{HC}}{\mu} \right)^m \end{aligned}$$

Module 8

1. (a) Les équations de balance détaillée sont pour $1 \leq n \leq K$,

$$\lambda \pi_{n-1}^* = \mu \pi_n^*$$

dont la solution est $\pi_n^* = (1 - \rho)\rho^n / (1 - \rho^{K+1})$, avec $\rho = \lambda/\mu$ et $0 \leq n \leq K$. Dès lors $P(\text{rejet}) = \pi_K^* = (1 - \rho)\rho^K / (1 - \rho^{K+1})$, ou encore, avec les valeurs numériques données $P(\text{rejet}) = \pi_5^* \approx 0.00728$.

- (b) A partir des probabilités calculées en a),

$$G_N(z) = \sum_{n=0}^K \pi_n^* z^n = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \frac{1 - (\rho z)^{K+1}}{1 - \rho z}$$

d'où

$$E[N] = \frac{dG_N}{dz}(z=1) = \dots = \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{(K+1)\rho^K}{1 - \rho^{K+1}} = 0.6827.$$

- (c) Le taux effectif d'arrivées dans le système est $\lambda' = \lambda(1 - P(\text{rejet})) = 1(1 - 0.00728)$ et donc la loi de Little donne le temps de réponse moyen qui est $E[R] = E[N]/\lambda' = 6.88$ secondes.

2. (a) On a une file M/D/1 d'où

$$E[N] = \frac{\rho}{1 - \rho} \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) = 0.5655.$$

- (b) Par Little $E[R] = E[N]/\lambda = 5.655$ secondes.

3. En multipliant la n ième équation de balance détaillée par z^n on trouve

$$\lambda z^n \pi_n^* = \mu z^n \pi_{n+1}^*$$

En sommant, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda z^n \pi_n^* &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu z^n \pi_{n+1}^* \\ \lambda \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_n^* &= \mu z^{-1} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^{n+1} \pi_{n+1}^* - \pi_0^* \right) \\ \lambda G_N(z) &= \mu z^{-1} G_N(z) - \mu z^{-1} \pi_0^* \end{aligned}$$

dont on tire que

$$G_N(z) = \frac{-\mu \pi_0^* z^{-1}}{\lambda - \mu z^{-1}} = \frac{\mu \pi_0^*}{\mu - \lambda z}$$

Comme $G_N(1) = 1$, on en tire que $\pi_0^* = 1 - \lambda/\mu$ et dès lors

$$E[N] = \frac{dG_N}{dz}(z=1) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

4. (a) On a directement, si $\rho = \lambda/\mu < 1$ et $q \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} P(Q=0) &= P(\{N=0\} \cup \{N=1\}) = P(N=0) + P(N=1) = 1 - \rho^2 \\ P(Q=q) &= P(N=q+1) = (1-\rho)\rho^{q+1} \end{aligned}$$

- (b) Méthode 1 : on calcule d'abord

$$\begin{aligned} G_Q(z) &= \sum_{q=0}^{\infty} P(Q=q)z^q = 1 - \rho^2 + (1-\rho)\rho \sum_{q=1}^{\infty} (\rho z)^q \\ &= (1-\rho) \left(1 + \rho + \rho \sum_{q=1}^{\infty} (\rho z)^q \right) = (1-\rho) \left(1 + \rho \frac{1}{1-\rho z} \right) = (1-\rho) \frac{1+\rho-\rho z}{1-\rho z} \end{aligned}$$

dont on déduit

$$E[Q] = \frac{dG_Q}{dz}(z=1) = \dots = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Méthode 2 : la probabilité que le serveur soit vide est $P(N=0) = 1-\rho$, la probabilité qu'il soit occupé est ρ . Par conséquent, l'espérance du nombre de clients dans le serveur (qui est une v.a. de Bernoulli) est ρ . Il s'ensuit que

$$E[Q] = E[N] - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

- (c) Notons tout d'abord que si le serveur est vide, $W=0$ et donc

$$f_{W|N=0}(w|N=0) = \delta(w).$$

Par contre, si le serveur est occupé, un client arrivant quand la file comporte déjà $n \geq 1$ clients, attendra que tous ces clients soient servis, et son temps d'attente sera

$$W = S(1) + S(2) + \dots + S(n)$$

ou les temps de service $S(n)$ sont une suite de v.a exponentielles i.i.d., de moyenne $1/\mu$ (même pour le client dans le serveur, car la v.a. exponentielle est sans mémoire (cfr module 1, exercice 4)). Comme la somme de n v.a. exponentielles i.i.d. est une v.a. d'Erlang (cfr propriété P5 du module 5), la densité de probabilité conditionnelle de W s'il y a $n \geq 1$ clients dans la file est

$$f_{W|N=n}(w|N=n) = \frac{\mu(\mu w)^{n-1} e^{-\mu w}}{(n-1)!}.$$

En utilisant le théorème des probabilités totales, on en déduit que

$$\begin{aligned} f_W(w) &= f_{W|N=0}(w|N=0)P(N=0) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{W|N=n}(w|N=n)P(N=n) \\ &= \delta(w)(1-\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(\mu w)^{n-1} e^{-\mu w}}{(n-1)!} (1-\rho)\rho^n \\ &= (1-\rho)\delta(w) + (1-\rho)\mu\rho e^{-\mu w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda w)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= (1-\rho)\delta(w) + (1-\rho)\lambda e^{-(\mu-\lambda)w} \end{aligned}$$

(d) Méthode 1 : On calcule directement

$$\begin{aligned} E[W] &= \int_0^\infty w f_W(w) dw = (1 - \rho) \int_0^\infty w \delta(w) dw + (1 - \rho) \lambda \int_0^\infty w e^{-(\mu - \lambda)w} dw \\ &= 0 + \rho \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \end{aligned}$$

Méthode 2 : Comme $W = R - S$,

$$E[W] = E[R] - E[S] = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

Méthode 3 : La loi de Little entraîne que

$$E[W] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

Remarquez que les deux dernières méthodes ne requièrent pas la connaissance préalable de la loi de W .

5. Pour la file M/M/1, $E_{M/M/1}[N] = \rho/(1 - \rho)$, avec $\rho = \lambda/2\mu'C$. On suppose que les deux lignes partagent le même buffer et que l'ordre de transmission des paquets qui arrivent est FIFO. Pour la file M/M/2, les équations de balance sont

$$\begin{aligned} \lambda\pi_0^* &= \mu\pi_1^* \\ \lambda\pi_n^* &= 2\mu\pi_{n+1}^* \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

et leur solution est $\pi_n^* = 2\rho^n\pi_0^*$ pour $n \geq 1$, avec $\rho = \lambda/2\mu'C$. La condition de normalisation devient

$$1 = \sum_{n=0}^\infty \pi_n^* = \pi_0^* + 2\pi_0^* \sum_{n=1}^\infty \rho^n = \pi_0^*(2/(1 - \rho) - 1)$$

d'où $\pi_0^* = (1 - \rho)/(1 + \rho)$ et $\pi_n^* = 2(1 - \rho)\rho^n/(1 + \rho)$ si $n \geq 1$. La fonction génératrice de probabilités est

$$G_N(z) = \sum_{n=0}^\infty \pi_n^* z^n = \dots = 2 \frac{1 - \rho}{(1 + \rho)(1 - \rho z)} - \frac{1 - \rho}{1 + \rho}$$

d'où

$$E_{M/M/2}[N] = \frac{dG_N}{dz}(z = 1) = \frac{2\rho}{1 - \rho^2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{E_{M/M/2}[R]}{E_{M/M/1}[R]} = \frac{E_{M/M/2}[N]/\lambda}{E_{M/M/1}[N]/\lambda} = \frac{2}{1 + \rho} > 1$$

car $\rho = \lambda/2\mu'C < 1$. Ceci montre que le temps de transmission par 2 lignes de capacités C , partageant le même buffer, est plus long que le temps de transmission par 1 ligne de capacité $2C$, si les temps entre arrivées et de service sont distribués exponentiellement.

6. Soit R le temps de séjour d'un client dans le restaurant. On a

$$\begin{aligned} E[R] &= E[R|\text{client mange dans le restaurant}]P(\text{client mange dans le restaurant}) \\ &\quad + E[R|\text{client ne mange pas dans le restaurant}]P(\text{client ne mange pas dans le rest.}) \\ &= (5 + 15) \cdot 0.5 + 5 \cdot 0.5 = 12.5 \text{ min.} \end{aligned}$$

En appliquant la loi de Little, le nombre moyen de clients dans le restaurant est

$$E[N] = \lambda E[R] = 5 \cdot 12.5 = 62.5 \text{ clients.}$$

7. (a) On calcule que $E[A(k)^2] = \lambda^2 \sigma_S^2 + \rho^2 + \rho$, en dérivant deux fois $G_A(z)$ et en arrangeant les termes.

(b) On obtient le résultat voulu en calculant que :

$$\begin{aligned} E[\hat{N}^2(k+1)] &= E[\hat{N}^2(k)] \\ E[1_{\{\hat{N}(k) \geq 1\}}^2] &= 1 - \hat{\pi}_0^* = \rho \\ E[\hat{N}(k) 1_{\{\hat{N}(k) \geq 1\}}] &= E[\hat{N}(k)] \\ E[A(k+1) \hat{N}(k)] &= \rho E[\hat{N}(k)] \\ E[A(k+1) 1_{\{\hat{N}(k) \geq 1\}}] &= \rho^2. \end{aligned}$$

8. Ici $f_S(s) = \delta(s - 1/\mu)$.

(a) On en déduit

$$\begin{aligned} G_A(z) &= \mathcal{L}_A(-\lambda(z-1)) = \int_0^\infty e^{\lambda s(z-1)} \delta(s - 1/\mu) ds \\ &= e^{\lambda(z-1)/\mu} \int_0^\infty e^{\lambda(s-1/\mu)(z-1)} \delta(s - 1/\mu) ds = e^{\rho(z-1)} \end{aligned}$$

d'où

$$G_N(z) = \frac{(1-\rho)(z-1)e^{\rho(z-1)}}{z - e^{\rho(z-1)}} = \frac{(1-\rho)(1-z)}{1 - ze^{\rho(1-z)}}.$$

(b) $\pi_0^* = 1 - \rho$

(c) $\pi_1^* = \frac{dG_N}{dz}(z=0) = \dots = (1-\rho)(e^\rho - 1)$.

9. La variable aléatoire S décrivant les temps de service est une variable géométrique (de "2ème espèce" selon la terminologie du module 1), de paramètre $p = 0.9$. Les formules de Little et de Pollaczek-Kintchine donnent alors $E[R] = E[N]/\lambda = 1.2857 \text{ msec}$.

10. (a) Soit $N_{OC}(t)$ le nombre d'appels OC le nombre générés pendant un intervalle de temps de longueur t à l'intérieur de la micro-cellule. Alors

$$P(N_{OC}(t) = n) = P(A(t, L) = n) = \frac{(\lambda L t)^n}{n!} e^{-\lambda L t}$$

et $N_{OC}(t)$ est un processus de Poisson (l'hypothèse d'indépendance est assurée par la définition même de $A(t, x)$) de taux $\lambda_{OC} = \lambda L$.

- (b) Soit L la distance parcourue pendant un appel de durée S . Clairement, $L = vS$ et $1/\mu' = E[L] = vE[S] = v/\mu$. Le nombre d'appels arrivant pendant un intervalle de durée t est un processus de Poisson de taux $\lambda' = \lambda t$ appels par km. Les distances sur lesquelles un appel est en cours forment une suite de v.a. L i.i.d., de moyenne $E[L] = v/\mu$ km. On a donc une file M/GI/ ∞ , si on compte les taux d'arrivée et de service en nombre d'appels par km. Le nombre de clients dans ce système est alors le nombre d'appels en cours non pas à un certain moment, mais à un certain endroit le long de cette autoroute, et qui est donc une v.a. de Poisson de moyenne $\lambda'/\mu' = \lambda t v/\mu$. Si L est faible comparé à v/μ , on peut prendre cet endroit comme le centre de la cellule de longueur L , si bien que ce nombre est $N_{HC}(t)$ et

$$P(N_{HC}(t) = n) = \frac{(\lambda t v/\mu)^n}{n!} e^{-(\lambda t v/\mu)}.$$

En réalité, et plus précisément, le nombre d'appels générés à gauche de la cellule pendant un intervalle de durée t est un processus de Poisson de taux $\lambda t/2$ appels par km, de même que le nombre d'appels générés à droite de la cellule pendant ce même intervalle de temps. Le nombre d'appels HC des véhicules entrant dans la micro-cellule par la gauche est donc une v.a. de Poisson de moyenne $\lambda t v/2\mu$, de même que le nombre d'appels HC des véhicules entrant dans la micro-cellule par la droite. Comme la somme des ces deux v.a. de Poisson indépendantes est une v.a. de Poisson de moyenne double, on retrouve bien le même résultat.

11. On constate que le processus $N(t)$ est un bruit impulsif de Poisson, avec un pulse rectangulaire $h(t) = 1_{[0, T]}(t)$ de hauteur unité et de largeur égale à $T = 1/\mu$. Par conséquent, on peut reprendre tel quel l'exercice 12 du module 5. On a donc à l'état stationnaire, avec $\rho = \lambda/\mu$

$$\begin{aligned} E[N(t)] &= \lambda \int_0^{1/\mu} ds = \lambda/\mu = \rho \\ R_N(\tau) &= \begin{cases} \rho^2 + \rho(1 - \mu|\tau|) & \text{si } |\tau| \leq 1/\mu \\ \rho^2 & \text{si } |\tau| \geq 1/\mu \end{cases} \end{aligned}$$

- 12.(a-b) Le diagramme des transitions entre états est représenté à la figure 16. De celui-ci on déduit un ensemble d'équations de balance

$$\lambda \pi_{n-1,0}^* = \mu \pi_{1,J}^* \quad \text{pour } 0 \leq n \leq J-1 \quad (65)$$

$$\lambda \pi_{n-1,J}^* + \mu \pi_{1,J}^* = \mu \pi_{n,J}^* \quad \text{pour } 2 \leq n \leq J \quad (66)$$

$$\lambda \pi_{n-1,J}^* = \mu \pi_{n,J}^* \quad \text{pour } n \geq J+1 \quad (67)$$

- (c) Soit $\rho = \lambda/\mu$. De (65) on tire que

$$\pi_{n,0}^* = \frac{1}{\rho} \pi_{1,J}^* \quad \text{pour } 0 \leq n \leq J-1$$

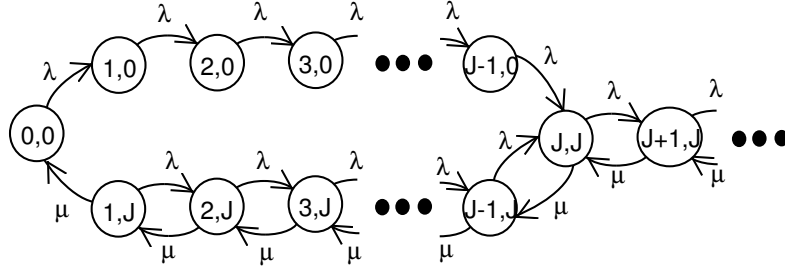


FIGURE 16 – Diagramme des transitions entre états de la question 12. Les états ont deux composantes : la première est le nombre de clients dans le système, la seconde donne l'état 0 ou J le plus récemment atteint.

tandis que de (66) on déduit par récurrence que

$$\begin{aligned}\pi_{n,J}^* &= \pi_{1,J}^* + \rho\pi_{n-1,J}^* = \dots = (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{n-1})\pi_{1,J}^* \\ &= \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} \pi_{1,J}^* \quad \text{pour } 1 \leq n \leq J.\end{aligned}$$

Finalement, (67) devient

$$\pi_{n,J}^* = \rho\pi_{n-1,J}^* = \dots = \rho^{n-J}\pi_{J,J}^* = \rho^{n-J} \frac{1 - \rho^J}{1 - \rho} \pi_{1,J}^* \quad \text{pour } n \leq J + 1.$$

Il reste à éliminer $\pi_{1,J}^*$ de ces relations par la condition de normalisation :

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{m=0,J} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,m}^* = \pi_{1,J}^* \left(\sum_{n=0}^{J-1} \frac{1}{\rho} + \sum_{n=1}^J \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} + \frac{1 - \rho^J}{1 - \rho} \sum_{n=J+1}^{\infty} \rho^{n-J} \right) \\ &= \pi_{1,J}^* \left(\frac{J}{\rho} + \frac{J}{1 - \rho} - \frac{1}{1 - \rho} \sum_{n=1}^J \rho^n + \frac{1 - \rho^J}{1 - \rho} \sum_{l=1}^{\infty} \rho^l \right) \\ &= \pi_{1,J}^* \left(\frac{J}{\rho} + \frac{J}{1 - \rho} - \frac{1}{1 - \rho} \left(\sum_{n=0}^J \rho^n - 1 \right) + \frac{1 - \rho^J}{1 - \rho} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \rho^l - 1 \right) \right) \\ &= \pi_{1,J}^* \left(\frac{J}{\rho} + \frac{J}{1 - \rho} - \frac{1}{1 - \rho} \left(\frac{1 - \rho^{J+1}}{1 - \rho} - 1 \right) + \frac{1 - \rho^J}{1 - \rho} \left(\frac{1}{1 - \rho} - 1 \right) \right) \\ &= \pi_{1,J}^* \frac{J}{\rho(1 - \rho)}\end{aligned}$$

d'où $\pi_{1,J}^* = \rho(1 - \rho)/J$ et

$$\begin{aligned}\pi_{n,0}^* &= (1 - \rho)/J & \text{si } 0 \leq n \leq J - 1 \\ \pi_{n,J}^* &= \rho(1 - \rho^n)/J & \text{si } 1 \leq n \leq J \\ \pi_{n,J}^* &= \rho^{n-J+1}(1 - \rho^J)/J & \text{si } n \geq J + 1.\end{aligned}$$

Les probabilités π_n^* d'avoir n clients dans le système sont

$$\begin{aligned}\pi_n^* &= \pi_{0,0}^* = (1 - \rho)/J & \text{si } n = 0 \\ \pi_n^* &= \pi_{n,0}^* + \pi_{n,J}^* = (1 - \rho^{n+1})/J & \text{si } 1 \leq n \leq J - 1 \\ \pi_n^* &= \pi_{n,J}^* = \rho^{n-J+1}(1 - \rho^J)/J & \text{si } n \geq J.\end{aligned}$$

- (d) On peut utiliser la fonction génératrice, mais dans le cas présent il est plus simple de calculer directement $E[N]$ comme suit

$$\begin{aligned}E[N] &= \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n^* = \sum_{n=0}^{J-1} n(1 - \rho^{n+1})/J + \sum_{n=J}^{\infty} n \rho^{n-J+1}(1 - \rho^J)/J \\ &= \frac{1}{J} \sum_{n=0}^{J-1} n - \frac{\rho}{J} \sum_{n=0}^{J-1} n \rho^n + \frac{\rho}{J} \sum_{n=J}^{\infty} n(\rho^{n-J} - \rho^n) \\ &= \frac{1}{J} \frac{J(J-1)}{2} - \frac{\rho}{J} \sum_{n=1}^{J-1} n \rho^n - \frac{\rho}{J} \sum_{n=J}^{\infty} n \rho^n + \frac{\rho}{J} \sum_{n=J}^{\infty} n \rho^{n-J} \\ &= \frac{J-1}{2} - \frac{\rho}{J} \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^n + \frac{\rho}{J} \left(\sum_{n=J}^{\infty} (n-J) \rho^{n-J} + J \sum_{n=J}^{\infty} \rho^{n-J} \right) \\ &= \frac{J-1}{2} - \frac{\rho}{J} \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^n + \frac{\rho}{J} \sum_{l=0}^{\infty} l \rho^l + \rho \sum_{l=0}^{\infty} \rho^l \\ &= \frac{J-1}{2} + \frac{\rho}{1-\rho}\end{aligned}$$

- (e) La loi de Little entraîne que

$$E[R] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{J-1}{2\lambda} + \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

13. (a) $p < 3/4$

- (b) $P(N \geq n_0) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \pi_n^* = (\Lambda_s/(1-p)\mu)^{n_0}$. Ici, $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $\Lambda_s/\mu = 0.25$ d'où $P(N \geq 10) = 2^{-10}$.

14. Chaque ligne est modélisée par une file ./M/1. Les taux moyens d'arrivée pour chaque file valant $\lambda_{AB} = 1.5$, $\lambda_{AC} = 0.5$, $\lambda_{BC} = 0.5$, $\lambda_{BD} = 1$, et $\lambda_{CD} = 1$, on calcule $E[R] = 0.563$ seconde.

15. Les capacités optimales sont

$$C_i^* = \frac{\lambda_i}{\mu'_i} + \frac{W_{\max} - \sum_{k=1}^M (d_k \lambda_k / \mu'_k + f_k)}{\sum_{k=1}^M \sqrt{\frac{d_k \lambda_k}{\mu'_k}}} \sqrt{\frac{\lambda_i}{d_i \mu'_i}}$$

et le temps de réponse minimum

$$E[R]^* = \frac{1}{\Lambda_s} \frac{\left(\sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{d_i \lambda_i}{\mu'_i}} \right)^2}{W_{\max} - \sum_{k=1}^M (d_k \lambda_k / \mu'_k + f_k)}.$$

Pour que le problème ait une solution, il faut que

$$W_{\max} \geq \sum_{k=1}^M (d_k \lambda_k / \mu'_k + f_k).$$

16. Les flux internes sont, en numérotant les files de gauche à droite par 1,2 et 3 : $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 3\lambda/2$ et $\lambda_3 = 2\lambda$. Par le théorème de Jackson, la probabilité cherchée vaut

$$\begin{aligned} P(N_1 = 1, N_2 = 1, N_3 = 1) &= \pi_{111}^* = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right) \left(1 - \frac{\lambda_2}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right) \left(1 - \frac{\lambda_3}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda_3}{\mu}\right) \\ &= 3 \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(1 - \frac{3\lambda}{2\mu}\right) \left(1 - \frac{2\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \end{aligned}$$

17. (a) La fonction génératrice de probabilité de N_1 est, avec $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1/2$ et $N = 5$,

$$G_{N_1}(z) = \frac{1}{63} \frac{64 - z^6}{2 - z}$$

d'où $E[N_1] = dG_{N_1}/dz (z = 1) = 19/21 = 0.905$ et $E[N_2] = 86/21 = 4.095$.

(b) On obtient le même résultat par la MVA.

18. (a) $\pi_{n_1, n_2}^* = 1/(N + 1)$.

(b) $E[N_1] = E[N_2] = N/2$.

19. En utilisant la MVA :

N	5	10	20
$E[N_T(N)]$	3.599	5.323	5.556
$E[N_{CPU}(N)]$	0.210	0.356	0.385
$E[N_A(N)]$	1.191	4.320	14.060
$E[R(N)]$	0.389	0.879	2.600

20. Comme $\mu'_i C_i = \lambda_{source} = \mu' C$ pour tout i , par symétrie, tous les $E[N_i]$ sont égaux et valent dès lors $E[N_i(N)] = N/M$ (on retrouve d'ailleurs bien ce résultat en résolvant les équations MVA). Par conséquent $E[R_i(N)] = (1 + (N - 1)/M)/\mu' C = (M + N - 1)/M\mu' C$ d'où $E[R(N)] = (M + N - 1)/\mu' C$ et $\lambda(N) = \mu' C N / (M + N - 1)$. Le rapport $\lambda(N)/E[R(N)]$ est maximal pour $N^* = M - 1$.

21. (a) Des équations de balance, on déduit que

$$P(N_{\text{ord}} = 0, N_T = 2) = \frac{1}{1 + 2\mu_T/\mu_{\text{ord}} + 2(\mu_T/\mu_{\text{ord}})^2} = \frac{50}{61}$$

(b) Par la MVA, $E[N_{\text{ord}}(15)] = 5.36$ tâches.