Module 7 : Chaînes de Markov à temps continu

1 Introduction aux chaînes de Markov à temps continu

1.1 (Première) définition

Ce module est consacré aux processus à temps continu $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ à valeurs discrètes dans un ensemble $\mathcal{S}$ qui sont markoviens et homogènes, et dont la définition est rappelée ci-dessous.

Définition 1 *Une* chaîne de Markov à temps continu *est un processus* $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ *à valeurs discrètes dans* $\mathcal{S}$ *qui satisfait aux hypothèses suivantes :*

H1. processus Markovien : pour toute suite d'instants $t_0 < t_1 < \ldots < t_n \in \mathbb{R}^+$ *et toute suite d'états* $i_0, i_1 \ldots, i_n \in \mathcal{S}$

$$P(X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots, X(t_0) = i_0) = P(X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}). \tag{1}$$

H2. processus homogène : pour tout $s, t \in \mathbb{R}^+$ *et* $i, j \in \mathcal{S}$,

$$P(X(t+s) = j | X(s) = i) = p_{ij}(t) = P(X(t) = j | X(0) = i). \tag{2}$$

Les probabilités $p_{ij}(t)$ sont rangées dans la matrice de transition $P(t)$, tandis que les probabilités d'états $\pi_i(t) = P(X(t) = i)$ sont rangées dans le vecteur d'états $\boldsymbol{\pi}(t) = [\pi_0(t) \quad \pi_1(t) \quad \pi_2(t) \quad \ldots]$.

A cette chaîne de Markov $X(t)$ sont associés, comme pour les processus de comptage, deux autres processus stochastiques. Le premier est la *séquence des temps de transition* (jump times) $\{S(n), n \in \mathbb{N}\}$, avec $0 = S(0) < S(1) < \ldots < S(n) < S(n+1) < \ldots$, où $S(n)$ est le temps où se produit la $n$ième transition d'un état à un autre. Le second est la *séquence des temps de séjour* (holding times) dans un même état $\{T(n), n \in \mathbb{N}\}$ où $T(n)$ décrit l'intervalle de temps pendant lequel le processus reste dans un même état (autrement dit, l'intervalle de temps séparant deux transitions successives). On notera $T_i(n) = T(n)$ si $X(S(n-1)) = i$, avec $i \in \mathcal{S}$.

Les trois processus $X(t)$, $S(n)$ et $T(n)$ sont liés par les relations suivantes.

$$S(n) = \inf\{t > S(n-1) : X(t) \neq X(S(n-1))\} \tag{3}$$

$$S(n) = \sum_{m=0}^{n-1} T(m) = T(0) + T(1) + \ldots + T(n-1) \tag{4}$$

$$T(n) = S(n+1) - S(n) \tag{5}$$

Nous supposerons dans la suite que

$$\sum_{m=0}^{\infty} T(m) = \lim_{n \to \infty} S(n) = \infty \tag{6}$$

pour éviter que le processus $X(t)$ "n'explose" en un temps fini (point d'accumulation du processus). Une chaîne de Markov vérifiant cette condition est dite *régulière*, ce que nous supposerons toujours vrai par défaut (nous ne verrons qu'un exemple où ce n'est pas le cas).

1.2 Distribution des temps de séjour

Les hypothèses H1 et H2 de la définition 1 nous permettent de complètement caractériser la loi de probabilité de la séquence des $T(n)$. Prenons tout d'abord $n = 0$. Alors pour tout $i \in \mathcal{S}$, $t, t' \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
&P(T_i(0) > t + t' \mid T_i(0) > t') \\
&= P(T_i(0) > t + t' \mid X(u) = i \text{ pour tout } u \in [0, t']) \\
&= P(X(v) = i \text{ pour tout } v \in [0, t + t'] \mid X(u) = i \text{ pour tout } u \in [0, t']) \\
&= P(X(v) = i \text{ pour tout } v \in [t', t + t'] \mid X(u) = i \text{ pour tout } u \in [0, t']) \\
&= P(X(v) = i \text{ pour tout } v \in [t', t + t'] \mid X(t') = i) \\
&= P(X(v) = i \text{ pour tout } v \in [0, t] \mid X(0) = i) \\
&= P(T_i(0) > t).
\end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$, la démonstration est identique, en décalant les intervalles de $S(n)$: $[0, t']$ est remplacé par $[S(n), S(n) + t']$, etc. Par conséquent $T_i(n)$ est une v.a. continue sans mémoire, et donc doit être une v.a. exponentielle, car c'est la seule v.a. continue sans mémoire. On notera

$$\nu_i = \frac{1}{E[T_i(n)]}.$$

qui est l'inverse de la durée moyenne pendant laquelle le processus va séjourner dans l'état i (une fois qu'il y est entré), ou encore le taux moyen avec lequel le processus fait une transition quand il est à l'état i.

D'autre part, $T(n)$ et $T(n-1)$ sont des v.a. indépendantes, car sinon le processus $T(n)$ ne pourrait pas être sans mémoire. En effet si $T(n)$ dépendait de $T(n-1)$, la connaissance non seulement du temps de transition $S(n-1)$ mais également du temps passé dans l'état précédent, avant $S(n-1)$, nous donnerait des informations sur $T(n)$, ce qui contredirait l'hypothèse H1 de Markov.

Plus formellement $T(n) = T_i(n)$ et $T(n-1) = T_j(n-1)$ pour un certain $i \in \mathcal{S}$ et un certain $j \in \mathcal{S}$, avec $i \neq j$. Dès lors, en notant $s = S(n)$, on a que pour tout $t, t' \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
&P(T_i(n) > t \mid T_j(n-1) > t') \\
&= P(X(v) = i \text{ pour tout } v \in [s, s + t] \mid X(s) = i, X(u) = j \text{ pour tout } u \in [s - t', s[) \\
&= P(X(v) = i \text{ pour tout } v \in [s, s + t] \mid X(s) = i) \\
&= P(T_i(n) > t).
\end{aligned}$$

Par conséquent, la séquence des temps de séjour dans un même état $\{T(n), n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de v.a. exponentielles indépendantes (mais en général pas identiquement distribuées, car leur moyenne dépend de l'état considéré. Le processus de Poisson est une exception (tous les ν_i sont alors identiques)).

1.3 Chaîne de Markov induite

Chaque fois que la chaîne $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ quitte l'état i, elle doit entrer dans un des états $j \in \mathcal{S}$, avec une probabilité que nous désignons par $\hat{q}_{ij}$, et qui vérifie donc

$$\begin{aligned} \hat{q}_{ii} &= 0 \\ \sum_{j \in \mathcal{S}} \hat{q}_{ij} &= 1 \end{aligned}$$

pour tout $i \in \mathcal{S}$. A partir de $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$, on construit le processus à temps discret $n \in \mathbb{N}$

$$\hat{X}(n) = X(S(n)) \tag{7}$$

qui est donc la séquence des différentes valeurs prises par $X(t)$. Ce processus est clairement une chaîne de Markov à temps discret dont les probabilités de transition de l'état i à l'état j sont les $\hat{q}_{ij}$ car

$$\begin{aligned} & P(\hat{X}(n) = j \mid \hat{X}(n-1) = i, \hat{X}(n-2) = k, \ldots) = \\ & \qquad P(X(S(n)) = j \mid X(S(n-1)) = i, X(S(n-2)) = k, \ldots) \\ = & \quad P(X(S(n)) = j \mid X(S(n-1)) = i) = P(\hat{X}(n) = j \mid \hat{X}(n-1) = i) = \hat{q}_{ij}. \end{aligned}$$

On appelle le processus $\{\hat{X}(n), n \in \mathbb{N}\}$ la *chaîne de Markov induite* (embedded Markov chain) par $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$.

Ceci nous donne une deuxième définition de chaîne de Markov à temps continu, dont nous venons de montrer qu'elle découle de la première. On peut montrer que les deux définitions sont en fait équivalentes.

Définition 2 *Soit le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ à valeurs discrètes dans $\mathcal{S}$, et soit $\{S(n), n \in \mathbb{N}\}$ la séquence des instants de transition d'un état à l'autre. Ce processus est une* chaîne de Markov à temps continu *si et seulement si*

H1'. la séquence des temps de séjour dans un même état $\{T(n), n \in \mathbb{N}\}$, avec $T(n) = S(n+1) - S(n)$, est une suite de v.a. exponentielles indépendantes, et indentiquement distribuées pour chaque état i ;

H2'. le processus $\{\hat{X}(n) = X(S(n)), n \in \mathbb{N}\}$ est une une chaîne de Markov à temps discret homogène.

1.4 Equations de Kolmogorov

Dans le cas continu, les équations de Chapman-Kolmogorov s'écrivent

$$p_{ij}(t_1 + t_2) = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}(t_1) p_{kj}(t_2) \tag{8}$$

pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ (exercice 1). De même on a

$$\pi_i(t+s) = \sum_{k \in \mathcal{S}} \pi_k(t) p_{ki}(s). \tag{9}$$

pour tout $t, s \in \mathbb{R}^+$. En général, les probabilités $p_{ik}(t)$ ne sont cependant pas explicitement données, mais doivent être calculées. On dispose en effet plutôt des quantités

$$q_{ij} = \nu_i \hat{q}_{ij} \quad \text{si} \quad i \neq j \tag{10}$$
$$q_{ij} = -\nu_i \quad \text{si} \quad i = j. \tag{11}$$

ν_i est l'inverse de la durée moyenne de séjour du processus dans l'état i entre deux transitions successives, ou encore le taux moyen avec lequel le processus fait une transition quand il est à l'état i, et $\hat{q}_{ij}$ est la probabilité que lors d'une transition depuis l'état i, $X(t)$ passe à l'état j. Par conséquent, q_{ij}, avec $i \neq j$, est le taux avec lequel le processus entre dans l'état j à partir de l'état i, et q_{ii} est le taux avec lequel le processus quitte l'état i. Notons que

$$q_{ii} = -\nu_i = -\nu_i \sum_{j \neq i} \hat{q}_{ij} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

Ces taux sont rangés dans une matrice Q appelée *générateur infinitésimal* de la chaîne. La raison de l'adjectif infinitésimal provient du fait que pour un très petit Δt

$$\begin{aligned} p_{ij}(\Delta t) &= q_{ij}\Delta t + o(\Delta t) \qquad \text{si } i \neq j & (12)\\ p_{ij}(\Delta t) &= 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t) \qquad \text{si } i = j & (13) \end{aligned}$$

En effet, partant du fait qu'il est beaucoup plus probable de n'y avoir qu'une seule transition dans un intervalle très court, de longeur Δt, que d'en avoir plusieurs, on trouve pour $i \neq j$ [1]

$$\begin{aligned} p_{ij}(\Delta t) &= P(X(\Delta t) = j | X(0) = i) \\ &\approx P(1 \text{ transition en } [0, \Delta t] \text{ et cette transition va de } i \text{ à } j) \\ &\approx (P(T_i(0) \leq \Delta t)\hat{q}_{ij}(P(T_j(1) > \Delta t)) = (1 - e^{-\nu_i \Delta t})\hat{q}_{ij} P(T_j(1) > \Delta t) \\ &= \nu_i \hat{q}_{ij} \Delta t + o(\Delta t) = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} p_{ii}(\Delta t) &= P(X(\Delta t) = i | X(0) = i) \\ &\approx P(0 \text{ transition en } [0, \Delta t]) = P(T_i(0) > \Delta t) \\ &= e^{-\nu_i \Delta t} = 1 - \nu_i \Delta t + o(\Delta t) = 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

A présent nous sommes en mesure de calculer les probabilités $p_{ij}(t)$ et $\pi_i(t)$. Nous faisons le développement pour ces dernières, les calculs pour les probabilités de transition sont similaires.

1. Ce raisonnement encore approximatif peut être rendu rigoureux dans le cas d'un espace d'état fini mais peut rester problématique pour un espace d'états infini.

En prenant $s = \Delta t$ dans (9), on a

$$\begin{aligned}
\pi_i(t+\Delta t) &= \sum_{k\in\mathcal{S}} \pi_k(t)p_{ki}(\Delta t) = \pi_i(t)p_{ii}(\Delta t) + \sum_{k\neq i} \pi_k(t)p_{ki}(\Delta t) \\
&= \pi_i(t)(1+q_{ii}\Delta t + o(\Delta t)) + \sum_{k\neq i} \pi_k(t)(q_{ki}\Delta t + o(\Delta t)) \\
&= \pi_i(t) + \sum_{k\in\mathcal{S}} \pi_k(t)q_{ki}\Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\pi_i(t+\Delta t)-\pi_i(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k\in\mathcal{S}} \pi_k(t)q_{ki}\Delta t + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

En prenant la limite [2] pour $\Delta t \to 0$ on obtient

$$\frac{d\pi_i}{dt}(t) = \sum_{k\in\mathcal{S}} \pi_k(t)q_{ki} \tag{14}$$

qui sont les équations de Kolmogorov pour les probabilités d'état. Sous forme matricielle, elle s'écrit

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt}(t) = \boldsymbol{\pi}(t)Q. \tag{15}$$

On obtient de la même manière pour les $p_{ij}(t)$ deux ensembles possibles d'équations (selon que l'on prenne $t_1 = t$ et $t_2 = \Delta t$ dans (8), ou vice-versa, $t_1 = \Delta t$ et $t_2 = t$) appelés respectivement *équations prédictives ou avant (forward)* ou *équations rétrospectives ou arrière (backward)* de Kolomogorov :

$$\frac{dp_{ij}}{dt}(t) = \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{ik}(t)q_{kj} \quad \text{ou} \quad \frac{dP}{dt}(t) = P(t)Q \tag{16}$$

$$\frac{dp_{ij}}{dt}(t) = \sum_{k\in\mathcal{S}} q_{ik}p_{kj}(t) \quad \text{ou} \quad \frac{dP}{dt}(t) = QP(t), \tag{17}$$

avec chaque fois la condition initiale $P(0) = I$.

1.5 Classification des états

Un état j est *accessible* à partir de l'état i si $p_{ij}(t) > 0$ pour un certain $t > 0$. Deux états i et j *communiquent* s'ils sont accessibles l'un à l'autre, ce que l'on note $i \leftrightarrow j$. Cette relation est réflexive, symétrique et transitive, et définit donc des *classes* d'équivalence, qui sont l'ensemble de tous les états qui communiquent entre eux. Une chaîne de Markov qui ne comporte qu'une seule classe est dite *irréductible*.

2. Ce passage à la limite nécessite une permutation entre l'opérateur limite et la somme sur k. Ceci ne pose aucun problème si le nombre d'états est fini (la somme est finie), mais peut en poser si le nombre d'états est infini. Dans tous les exemples que nous considérerons (modèles de naissance et de mort), cette permutation est valide.

On peut montrer que le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ possède la même structure de classe que la chaîne induite $\{\hat{X}(n) = X(S(n)), n \in \mathbb{N}\}$.

On peut également montrer que si $p_{ij}(t) > 0$ pour un certain $t > 0$, alors $p_{ij}(t) > 0$ pour tout $t > 0$. La question de périodicité pour une chaîne de Markov ne se pose donc pas, contrairement au cas discret.

Enfin, un état i est *récurrent* si la probabilité que le processus repasse par cet état après l'avoir quitté vaut l'unité. Il est *transitoire* sinon. A nouveau, un état est récurrent (transitoire) pour $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ s'il est récurrent (transitoire) pour $\{\hat{X}(n), n \in \mathbb{N}\}$.

Soit i un état récurrent. Il est récurrent positif si l'espérance du temps de retour à l'état i est finie et récurrent nul sinon. On peut montrer que si $X(t)$ est une chaîne irréductible récurrente, alors tous ses états sont soit récurrents positifs, soit récurrents nuls. Si de plus son espace d'état est fini, alors tous ses états ne peuvent être que récurrents positifs.

Une chaîne de Markov à temps continu homogène, irréductible et dont tous les états sont récurrents positifs est dite *ergodique*.

1.6 Comportement asymptotique

Une distribution de probabilité $\boldsymbol{\pi}^\star$ est dite *stationnaire* (ou encore *invariante*) si elle satisfait à l'équation

$$\boldsymbol{\pi}^\star Q = \mathbf{0}. \tag{18}$$

Dans ce cas, si $\boldsymbol{\pi}(0) = \boldsymbol{\pi}^\star$, (15) entraîne que $\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}^\star$ pour tout $t \geq 0$. Le processus est donc stationnaire (au sens strict). Ce raisonnement ne tient la route que pour autant que l'équation (15) soit valable, ce qui n'est pas toujours le cas, rappelons-le, si l'espace d'état $\mathcal{S}$ est infini. On peut néanmoins montrer que la distribution $\boldsymbol{\pi}^\star$ donnée par (18) est encore une distribution invariante, c'est-à-dire telle que

$$\boldsymbol{\pi}^\star P(t) = \boldsymbol{\pi}^\star$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Grâce à la classification de la section précédente, on peut maintenant énoncer les conditions sous lesquelles une chaîne de Markov à temps continu converge vers une distribution stationnaire :

Théorème 1 *Si $X(t)$ est une chaîne de Markov homogène ergodique alors il existe une seule distribution stationnaire donnée par la solution unique de*

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^\star q_{ij} = 0. \tag{19}$$

et

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^\star = 1. \tag{20}$$

De plus, tout vecteur des probabilités d'état tend vers cette distribution stationnaire :

$$\boldsymbol{\pi}(t) \to \boldsymbol{\pi}^\star$$

lorsque $t \to \infty$.

Les équations (19) ont une interprétation assez simple.

En effet, à tout instant t, le nombre de transitions qui ont lieu en $[0, t]$ vers l'état i ne peut différer du nombre de transitions qui ont lieu en $[0, t]$ hors de l'état i que d'au plus une unité. Par conséquent, la proportion sur le long terme de transitions dans l'état i est égale à la proportion de transitions hors de l'état i.

Comme $\pi_i^\star$ est la proportion du temps que le processus passe dans l'état i, et comme ν_i est le taux avec lequel le processus quitte ce même état i (à condition d'y séjourner déjà auparavant), la proportion de transitions hors de l'état i est

$$\pi_i^\star \nu_i. \tag{21}$$

De même, comme $\pi_j^\star$ est la proportion du temps que le processus passe dans l'état j, et comme q_{ji} est le taux avec lequel le processus entre dans l'état i à condition d'être juste auparavant dans l'état j, la proportion de transitions de l'état j vers l'état i est $\pi_j^\star q_{ji}$. Par conséquent, la proportion sur le long terme de transitions dans l'état i est

$$\sum_{j \neq i} \pi_j^\star q_{ji}. \tag{22}$$

En égalant (21) et (22), on retrouve bien (19) qui pour cette raison portent le nom d'*équations de balance (globales).*

1.7 Processus de naissance et de mort

Tous les modèles de chaînes de Markov à temps continu que nous verrons sont des cas particuliers de processus de naissance et mort.

1.7.1 Chaîne de Markov à deux états

Commençons par une chaîne de Markov à deux états (l'état 0 et l'état 1 : $\mathcal{S} = \{0, 1\}$), dont le diagramme de transition des états est représenté à la figure 1 et dont le générateur infinitésimal est

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \tag{23}$$

pour un certain $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

La matrice de transition de la chaîne de Markov induite est, du coup,

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La trajectoire de $\{\hat{X}(n), n \in \mathbb{N}\}$ est donc une suite alternée de 1 et de 0.

Notons que le *signal des télégraphistes* de l'exercice 9 du module 3 est un cas particulier de cette chaîne à deux états, où $\lambda = \mu$: en effet, nous avions défini ce processus comme un processus à temps continu changeant de valeur à chaque arrivée d'un évènement donné par un processus de Poisson de taux λ. Par conséquent, le temps de séjour dans un état est distribué exponentiellement, avec une moyenne de $1/\lambda$ identique pour chacun des deux états, et les probabilités de transition de la chaîne induite sont $\hat{q}_{10} = \hat{q}_{01} = 1$.

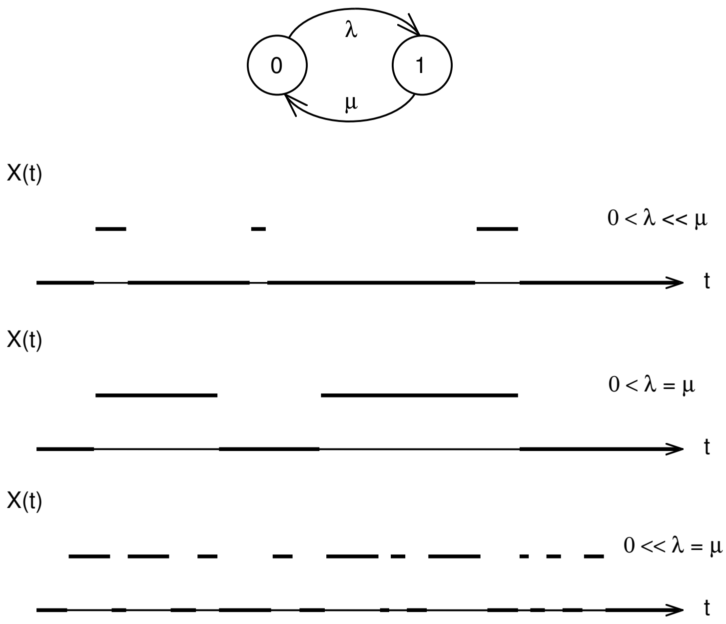

FIGURE 1 – Chaîne de Markov à deux états : diagramme des transitions, et quelques trajectoires typiques pour certaines valeurs de λ et μ.

Les deux états sont récurrents positifs, et la distribution invariante de cette chaîne est solution de $\boldsymbol{\pi}^\star Q = \mathbf{0}$, i.e. de

$$[\pi_0^\star \quad \pi_1^\star] \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} = [0 \quad 0]$$

avec $\pi_0^\star + \pi_1^\star = 1$. On trouve

$$\boldsymbol{\pi}^\star = [\pi_0^\star \quad \pi_1^\star] = \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right]. \tag{24}$$

Les équations (15) s'écrivent

$$\left[\frac{d\pi_0}{dt}(t) \quad \frac{d\pi_1}{dt}(t)\right] = [\pi_0(t) \quad \pi_1(t)] \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

et leur solution est (exercice 2)

$$\pi_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \left(\pi_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) e^{-(\lambda+\mu)t} \tag{25}$$

$$\pi_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \left(\pi_1(0) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) e^{-(\lambda+\mu)t} \tag{26}$$

Observons que lorsque $t \to \infty$, la distribution de probabilité tend bien vers la distribution stationnaire trouvée ci-dessus.

Les équations (16) s'écrivent

$$\begin{bmatrix} \frac{dp_{00}}{dt}(t) & \frac{dp_{01}}{dt}(t) \\ \frac{dp_{10}}{dt}(t) & \frac{dp_{11}}{dt}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

et leur solution est (exercice 2)

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda+\mu} \begin{bmatrix} \mu + \lambda\, e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda - \lambda\, e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \mu - \mu\, e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda + \mu\, e^{-(\lambda+\mu)t} \end{bmatrix}.$$

1.7.2 Processus de naissance pure

Un processus de naissance pure est un processus dans lequel les transitions ne sont possibles que d'un état i à un état $i+1$, et dont les taux infinitésimaux sont donc donnés par

$$q_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i & \text{si } j = i \\ \lambda_i & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{27}$$

Les équations (15) s'écrivent donc

$$\frac{d\pi_0}{dt}(t) = -\lambda_0 \pi_0(t) \tag{28}$$

$$\frac{d\pi_i}{dt}(t) = -\lambda_i \pi_i(t) + \lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t) \qquad \text{si } i \in \mathbb{N}_0 \tag{29}$$

Si tous les $\lambda_i > 0$, tous les états sont transitoires. Les probabilités de transition de la chaîne induite sont simplement $\hat{q}_{ij} = 1$ si $j = i+1$ et $\hat{q}_{ij} = 0$ sinon.

Par exemple, si $\lambda_i = \lambda$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, on retrouve le *processus de Poisson*, et la solution de (28) et (29) est la fonction bien connue

$$\pi_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!}\, e^{-\lambda t}.$$

Si $\lambda_i = i\lambda$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ (on suppose $X(0) \geq 1$), on a un processus (appelé *processus de Yule*) qui compte le nombre d'individus d'une population. Ces individus ne meurent jamais, et donnent naissance à un nouvel individu au bout d'un temps exponentiellement distribué. La distribution de la taille de la population au temps t est alors (exercice 3), pour tout $i \in \mathbb{N}_0$,

$$\pi_i(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{i-1}. \tag{30}$$

Enfin, si $\lambda_i = i^2\lambda$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ (on suppose à nouveau $X(0) \geq 1$), la condition (6) n'est plus vérifiée, et on peut calculer que

$$P\left(\sum_{m=0}^{\infty} T(m) < \infty\right) = 1.$$

Le processus subit une “explosion", i.e. atteint une valeur infinie en un temps (presque sûrement) fini, tellement le taux de transition croît rapidement (cfr Figure 2).

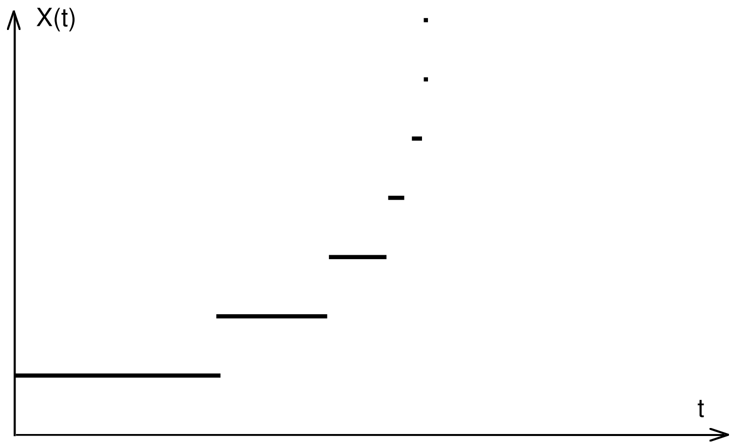

Figure 2 – Une trajectoire typique d'un processus de naissance pure avec explosion en un temps fini.

1.7.3 Processus de naissance et de mort

Un processus de naissance et de mort est un processus dans lequel les transitions ne sont possibles que d'un état aux deux états voisins, comme indiqué par le diagramme de transition des états représenté à la figure 3, et dont les taux infinitésimaux sont donc donnés par

$$q_{ij} = \begin{cases} \mu_i & \text{si } j = i-1 \\ -(\lambda_i + \mu_i) & \text{si } j = i \\ \lambda_i & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{31}$$

si $i \geq 1$ et par

$$q_{ij} = \begin{cases} -\lambda_0 & \text{si } j = 0 \\ \lambda_0 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{si } j \geq 2 \end{cases} \tag{32}$$

si $i = 0$.

Les probabilités de transition non nulles de la chaîne induite sont dès lors

$$\begin{aligned} \hat{q}_{0,1} &= 1 \\ \hat{q}_{i,i+1} &= \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \qquad \text{si } i \in \mathbb{N}_0 \\ \hat{q}_{i,i-1} &= \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \qquad \text{si } i \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

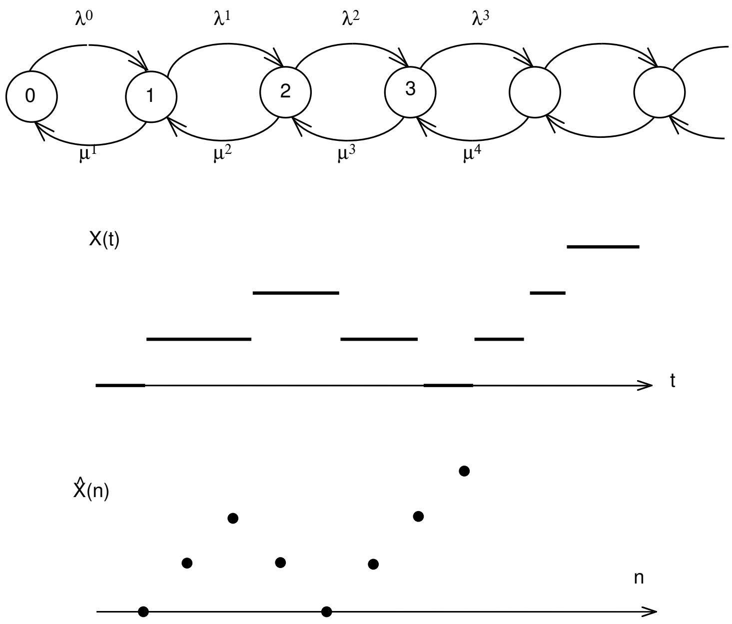

FIGURE 3 – Processus de naissance et de mort : diagramme des transitions, une trajectoire de la chaîne $X(t)$ et de la chaîne induite $\hat{X}(n)$.

C'est donc une marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ "généralisée" au cas où les probabilités de transition dépendent de l'état i.

Les équations de balance du processus de naissance et de mort s'écrivent

$$\begin{aligned} \lambda_0 \pi_0^\star &= \mu_1 \pi_1^\star && (33) \\ (\lambda_i + \mu_i)\pi_i^\star &= \lambda_{i-1}\pi_{i-1}^\star + \mu_{i+1}\pi_{i+1}^\star \qquad \text{si } i \in \mathbb{N}_0 && (34) \end{aligned}$$

qu'on peut encore remplacer, en ajoutant chaque équation de balance à la précédente, par le système d'équations équivalent, avec $i \in \mathbb{N}_0$,

$$\lambda_{i-1}\pi_{i-1}^\star = \mu_i \pi_i^\star. \tag{35}$$

Par récurrence sur i on en déduit

$$\pi_i^\star = \frac{\lambda_{i-1} \dots \lambda_0}{\mu_i \dots \mu_1} \, \pi_0^\star \tag{36}$$

où $\pi_0^\star$ est obtenu par la condition de normalisation $\sum_{i=0}^\infty \pi_i^\star = 1$ et vaut

$$\pi_0^\star = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^\infty \frac{\lambda_{i-1} \dots \lambda_0}{\mu_i \dots \mu_1}}. \tag{37}$$

La condition d'existence de cette distribution stationnaire de probabilité est que

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{\lambda_{i-1} \dots \lambda_0}{\mu_i \dots \mu_1} < \infty. \tag{38}$$

Dans ce cas en effet on peut montrer que tous les états sont récurrents positifs.

Les processus de naissance et de mort sont utilisés pour modéliser un système d'attente dans lequel, lorsqu'il y a i clients dans le système,

(i) le temps d'arrivée du prochain client suit une loi exponentielle, de moyenne $1/\lambda_i$,

(ii) les clients quittent le système après avoir reçu un service, dont la durée (le temps de service) suit une loi exponentielle, de moyenne $1/\mu_i$ (si $i \geq 1$),

(iii) les temps inter - arrivées et les temps de service sont mutuellement indépendants.

Par conséquent

$$\begin{aligned}
P(0 \text{ arrivée en } \Delta t | X(t) = i) &= 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) \\
P(1 \text{ arrivée en } \Delta t | X(t) = i) &= \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) \\
P(2 \text{ arrivées ou plus en } \Delta t | X(t) = i) &= o(\Delta t) \\
P(0 \text{ départ en } \Delta t | X(t) = i) &= 1 - \mu_i \Delta t + o(\Delta t) \\
P(1 \text{ départ en } \Delta t | X(t) = i) &= \mu_i \Delta t + o(\Delta t) \\
P(2 \text{ départs ou plus en } \Delta t | X(t) = i) &= o(\Delta t).
\end{aligned}$$

A partir d'un état i donné, le processus ne peut passer qu'aux états $(i-1)$, i ou $(i+1)$ en un temps infinitésimal $\Delta t \to 0$. En combinant les probabilités de départ et d'arrivée données ci-dessus, on trouve les probabilités de transition de ce processus de Markov, qui sont, pour $i \in \mathbb{N}_0$,

$$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t)$$

si $j \notin \{i-1, i, i+1\}$ et

$$\begin{aligned}
p_{i,i+1}(\Delta t) &= \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) \\
p_{ii}(\Delta t) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)\Delta t + o(\Delta t) \\
p_{i,i-1}(\Delta t) &= \mu_i \Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

sinon. Pour $i = 0$, on trouve de manière similaire

$$\begin{aligned}
p_{00}(\Delta t) &= 1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t) \\
p_{01}(\Delta t) &= \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

De ces probabilités de transitions infinitésimales on déduit directement la matrice Q des taux infinitésimaux (31) et (32). Une autre manière de procéder (exercice 4) consiste à calculer d'abord, à partir du fait que les séquences des temps entre arrivées et des temps de service sont deux suites de v.a. exponentielles indépendantes, les durées moyennes de séjour ininterrompu dans un état i, $1/\nu_i$, et les probabilités de transitions $\hat{q}_{ij}$ de la chaîne induite, pour en déduire les taux infinitésimaux q_{ij}.

On verra de tels systèmes d'attente dans le module suivant, où ils seront notés systèmes M/M/. où le premier M (Markov/Memoryless) signifie que les temps entre arrivées forment une suite de v.a. exponentielles indépendantes, et le second M signifie que les temps de service forment eux aussi une suite de v.a. exponentielles indépendantes. Par exemple, pour une *file M/M/1*, tous les taux de service sont identiques : $\mu_i = \mu$ pour tout $i \in \mathbb{N}_0$, et les arrivées suivent un processus de Poisson de taux λ, de sorte que $\lambda_i = \lambda$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Les probabilités de transition non nulles de la chaîne induite deviennent dès lors

$$\begin{aligned}
\hat{q}_{0,1} &= 1 \\
\hat{q}_{i,i+1} &= p \qquad \text{si } i \in \mathbb{N}_0 \\
\hat{q}_{i,i-1} &= 1-p \qquad \text{si } i \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

avec $p = \lambda/(\lambda+\mu)$. C'est donc la marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ que nous avons étudiée à l'exercice 12bis du module précédent, et dont nous avions vu que tous les états étaient transitoires si $p > 1/2$, i.e. si $\lambda > \mu$, récurrents nuls si $p = 1/2$, i.e. si $\lambda = \mu$, et récurrents positifs si $p < 1/2$, i.e. si $\lambda < \mu$. De fait, pour une file M/M/1, la condition d'existence (38) de la distribution stationnaire devient

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1 \tag{39}$$

Si cette condition est satisfaite, les probabilités d'état stationnaires (36) – qui sont donc les probabilités qu'il y ait, en régime stationnaire, i clients présents dans le système – deviennent

$$\pi_i^\star = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i. \tag{40}$$

1.8 Chaînes réversibles

1.8.1 Définition

Supposons qu'on ait une chaîne de Markov ergodique à l'état stationnaire, et qu'à partir d'un certain temps T, on considère la séquence d'états $\tilde{X}(t) = \{X(T-t), 0 \le t \le T\}$, c'est-à-dire la chaîne originelle en remontant le temps (backward chain).

Remarquons tout d'abord que pour tout $t, t' > 0$ (avec $t + t' \le T$)

$$\begin{aligned}
&P(\tilde{X}(v) = i \text{ pour tout } v \in [t', t+t'] \mid \tilde{X}(t') = i) \\
&\quad = P(X(v) = i \text{ pour tout } v \in [T-(t+t'), T-t'] \mid X(T-t') = i) \\
&\quad = \frac{P(X(v) = i \text{ pour tout } v \in [T-(t+t'), T-t'])}{P(X(T-t') = i)} \\
&\quad = \frac{P(X(v) = i \text{ pour tout } v \in [T-(t+t'), T-t'] \mid X(T-(t'+t)) = i) P(X(T-(t'+t)) = i)}{P(X(T-t') = i)} \\
&\quad = \frac{P(T_i > t)\pi_i^\star}{\pi_i^\star} = e^{-\nu_i t}
\end{aligned}$$

ce qui montre que les temps de séjour de la chaîne renversée sont distribués exponentiellement eux aussi.

De plus, la séquence d'états visités $\hat{\hat{X}}(n)$ est elle-même une chaîne de Markov, dont les probabilités de transition sont

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{q}}_{ij} &= P(\hat{X}(n) = j | \hat{X}(n+1) = i) \\
&= \frac{P(\hat{X}(n+1) = i | \hat{X}(n) = j) P(\hat{X}(n) = j)}{P(\hat{X}(n+1) = i)} = \frac{p_{ji}\hat{\pi}_j^\star}{\hat{\pi}_i^\star}
\end{aligned} \tag{41}$$

où $\hat{\pi}_i^\star, i \in \mathcal{S}$ est la distribution de probabilités d'état invariante de la chaîne induite $\hat{X}(n)$, qui sont données par

$$\hat{\pi}_i^\star = \frac{\pi_i^\star \nu_i}{\sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j^\star \nu_j} \tag{42}$$

comme on peut le vérifier en insérant cette distribution dans

$$\sum_{k \in \mathcal{S}} \hat{\pi}_k^\star \hat{q}_{ki} = \hat{\pi}_i^\star.$$

Si la chaîne de Markov induite $\hat{X}(n)$ est réversible, i.e. si $\hat{\hat{q}}_{ij} = \hat{q}_{ij}$ pour tout $i, j \in \mathcal{S}$, alors la chaîne de Markov à temps continu $X(t)$ est elle-même dite *réversible* (temporellement). Si $X(t)$ est une chaîne réversible, la chaîne renversée $\tilde{X}(t)$ possède donc la même structure probabiliste (i.e., les mêmes probabilités de transition) que la chaîne directe $X(t)$. Comme la chaîne de Markov induite est réversible si

$$\hat{\pi}_i^\star \hat{q}_{ij} = \hat{\pi}_j^\star \hat{q}_{ji},$$

en utilisant (42), on constate qu'une chaîne de Markov ergodique à temps continu est donc réversible si pour tout $i, j \in \mathcal{S}$

$$\pi_i^\star q_{ij} = \pi_j^\star q_{ji}. \tag{43}$$

Cette condition signifie que le taux avec lequel le processus passe de l'état i à l'état j, à savoir $\pi_i^\star q_{ij}$, est égal au taux avec lequel le processus passe de l'état j à l'état i, à savoir $\pi_j^\star p_{ji}$. Les équations (43) forment un second groupe d'équations de balance, appelées *équations de balance détaillées* (ou locales), plus simples que le premier groupe d'équations de balance globale (19) obtenues en “balançant" le taux avec lequel le processus quitte l'état i (21) avec le taux (22) avec lequel le processus arrive à l'état i. Les équations de balance détaillée ne sont cependant valables que si la chaîne est réversible.

1.8.2 Exemples

- **Processus de naissance et de mort.**

  La chaîne induite par un processus de naissance et de mort est réversible, car c'est une marche aléatoire : pour toute trajectoire de ce processus, le nombre de transitions de l'état i à l'état $(i+1)$ ne peut différer du nombre de transitions de l'état $(i+1)$ à l'état i que d'une unité au plus, car entre deux transitions de i à $(i+1)$, il doit nécessairement y avoir eu une transition de $(i+1)$ à i et vice-versa (en effet, la seule manière de revenir à l'état i à partir d'un état $j \geq i$ est de repasser par $(i+1)$).

Par conséquent, la proportion sur le long terme de transitions de i à $(i+1)$ est égale à la proportion de transitions de $(i+1)$ à i, et donc cette chaîne est réversible. Les équations de balance détaillées sont donc

$$\lambda_i \pi_i^\star = \mu_{i+1} \pi_{i+1}^\star. \tag{44}$$

et coïncident avec l'ensemble d'équations (35).

La réversibilité du processus de naissance et de mort a d'importantes conséquences pour les files de type M/M/., comme nous verrons à la sous-section suivante.

- **Processus de naissance et de mort à espace d'état fini.**

  Considérons une chaîne de Markov dont l'espace d'état est $\mathcal{S}$. On dit que la chaîne est tronquée à l'ensemble $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ si q_{ij} est mis à zéro chaque fois que $i \in \mathcal{S}'$ et $j \notin \mathcal{S}'$. De la sorte, les transitions hors de $\mathcal{S}'$ ne sont plus autorisées, mais celles à l'intérieur de $\mathcal{S}'$ continuent aux mêmes taux que dans le cas non tronqué. Un résultat très utile est que si la chaîne non tronquée est réversible, alors la chaîne tronquée est elle aussi réversible, et ses probabilités d'état stationnaires sont, pour tout $i \in \mathcal{S}'$,

$$\pi_i^{\star\mathcal{S}'} = \frac{\pi_i^\star}{\sum_{j\in\mathcal{S}'} \pi_j^\star}$$

  où $\pi_i^\star$ sont les probabilités d'état stationnaires de la chaîne non tronquée.

  Par exemple, les probabilités d'état stationnaires du processus de naissance et de mort tronqué à $\mathcal{S}' = \{0, 1, 2, \ldots, s\}$ sont

$$\pi_i^{\star\mathcal{S}'} = \frac{\lambda_{i-1}\ldots\lambda_0}{\mu_i\ldots\mu_1}\,\pi_0^{\star\mathcal{S}'} \tag{45}$$

  où $\pi_0^{\star\mathcal{S}'}$ est obtenu par la condition de normalisation $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^{\star\mathcal{S}'} = 1$ et vaut

$$\pi_0^{\star\mathcal{S}'} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{\lambda_{i-1}\ldots\lambda_0}{\mu_i\ldots\mu_1}}. \tag{46}$$

  Remarquons que comme l'espace d'états $\mathcal{S}'$ est fini, si la chaîne est irréductible, tous ses états sont nécessairement récurrents positifs et la chaîne est ergodique, sans qu'elle doive satisfaire à la condition (38).

- **Processeur de type M/M/1 avec pannes.**

  On considère tout d'abord un processeur qui ne tombe jamais en panne et qui est modélisé par une file M/M/1 : les tâches arrivent suivant un processus de Poisson de taux λ, sont traitées par le processeur dans l'ordre de leur arrivée, les temps de traitement étant distribués exponentiellement, avec une moyenne de $1/\mu$. Cette file M/M/1 est réversible, et les probabilités de trouver i tâches (jobs) dans le système sont données par (40).

  Supposons ensuite que le processeur puisse tomber en panne, et que le temps qui s'écoule entre les pannes soit distribué exponentiellement, avec un temps moyen de $1/\gamma$. Quand il y

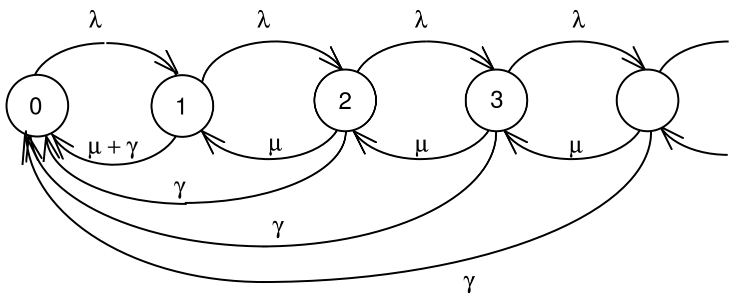

Figure 4 – Processeur de type M/M/1 avec pannes : diagramme des transitions.

a une panne, toutes les tâches (jobs) dans le système sont perdues. La diagramme entre transitions de ce système est montré à la figure 4.

Les équations de balance globale de cette chaîne sont

$$\lambda\pi_0^\star = \mu\pi_1^\star + \gamma\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i^\star \tag{47}$$

$$(\lambda+\mu+\gamma)\pi_i^\star = \lambda\pi_{i-1}^\star + \mu\pi_{i+1}^\star \qquad \text{si } i \in \mathbb{N}_0. \tag{48}$$

Les équations (48) sont des équations aux récurrences homogènes du 2ème degré, comme nous en avons déjà rencontré au module précédent, et dont la solution générale est

$$\pi_i^\star = K_a\alpha^i + K_b\beta^i$$

où α et β les deux racines du trinôme du second degré $\mu z^2 - (\lambda+\mu+\gamma)z + \lambda$ et où deux constantes K_a et K_b doivent être déterminées par (47) et le fait que $\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i^\star = 1$ et $\pi_i^\star \geq 0$. La solution finale sera calculée à l'exercice 8. Cette chaîne n'est pas réversible, et on pourra vérifier que la distribution stationnaire ne satisfait pas à (43).

1.8.3 Théorème de Burke

Soit $X(t)$ le nombre de clients dans une file M/M/1 au temps t. Les instants auxquels ce processus augmente d'une unité sont les instants d'arrivées des clients dans le système, et sont donc distribués selon un processus de Poisson, de taux λ. Le système M/M/1 étant une chaîne de Markov à temps continu réversible, la chaîne renversée $\tilde{X}(t)$ possède les mêmes caractéristiques que la chaîne directe $X(t)$. Par conséquent, la suite des instants auxquels une trajectoire de $X(t)$ parcourue dans le sens des t décroissants augmente d'une unité constitue également un processus de Poisson, de taux λ. Comme les instants auquels le processus renversé augmente d'une unité coïncident avec les instants auxquels le processus direct décroît d'une unité (figure 5), c'est-à-dire les instants où les clients quittent le système, nous venons de montrer que le processus de départ des clients d'une file M/M/1 est également un processus de Poisson, de taux λ.

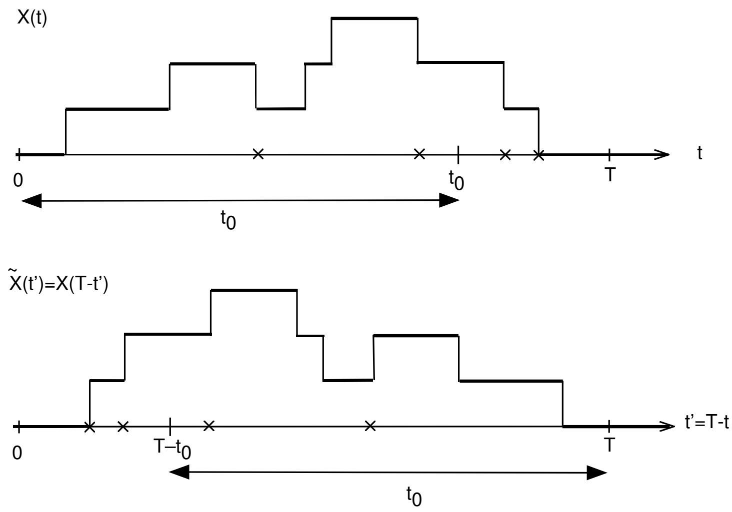

FIGURE 5 – Une trajectoire de la chaîne directe d'un processus M/M/1 (en haut) et la trajectoire du processus renversé (en bas). Les croix marquent les instants de départ de clients dans le processus direct, et donc d'arrivées de clients dans le processus renversé.

Théorème 2 *Considérons un système M/M/1 à l'état stationnaire, dans lequel le taux d'arrivées est λ. Alors*

(i) le processus de départ est un processus de Poisson de taux λ,

(ii) à chaque instant t, le nombre de clients présents dans le système est indépendant de la séquence des temps de départ avant t.

Nous venons de montrer la partie (i) de ce théorème, connu sous le nom de théorème de Burke. La partie (ii) provient du fait que pour un temps t_0 fixé, le nombre de départs dans le processus direct avant t_0 est identique au nombre d'arrivées dans le processus renversé après $T - t_0$ (figure 5). Ce dernier est un processus de Poisson de taux λ, indépendant de l'état de $\tilde{X}$ au temps $T - t_0$. Par conséquent, le processus de départ du processus direct est indépendant de l'état de ce processus X au temps t_0 .

1.9 Ergodisme

Nous avons déjà mentionné qu'une chaîne de Markov homogène irréductible, apériodique et dont tous les états sont récurrents positifs est dite *ergodique*. Ce terme est justifié par le théorème suivant, que nous ne demontrons pas :

Théorème 3 *Si $X(t)$ est une chaîne ergodique, dont la distribution stationnaire est $\boldsymbol{\pi}^\star = [\pi_0^\star \ \pi_1^\star \ \ldots]$ alors pour toute fonction bornée $f : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$,*

$$P\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))dt \to \sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_i^\star f(i) \quad \text{pour } T \to \infty\right) = 1. \tag{49}$$

En particulier, pour $f(x) = 1_{\{x=i\}}$ (i.e., $f(x) = i$ si $x = i$ et $f(x) = 0$ sinon), on a

$$P\left(\frac{1}{T}\int_0^T 1_{\{X(t)=i\}}dt \to \pi_i^\star \quad \text{pour } T \to \infty\right) = 1 \tag{50}$$

ce qui montre que la proportion de temps passé dans chaque état avant un certain temps T tend vers $\pi_i^\star$ sur le long terme ($T \to \infty$).

D'autre part, si $f(x) = x$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))dt &= \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt = < \; X(t) \; >_T \\ \sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_i^\star f(i) &= \sum_{i\in\mathcal{S}} i\pi_i^\star = \mu_X \end{aligned}$$

où μ_X est l'espérance de la chaîne X à l'état stationnaire, si bien que (49) devient

$$P\left(< \; X(t) \; >_T \to \mu_X \quad \text{pour } T \to \infty\right) = 1,$$

ce qui montre qu'une chaîne de Markov ergodique l'est par rapport à sa moyenne. Notons que l'équation ci-dessus signifie que $< \; X(t) \; >_T$ converge vers μ_X avec probabilité 1, ce qui est une forme d'ergodisme différente que celle en moyenne quadratique considérée au module 3.

2 Application : dimensionnement de centraux téléphoniques

L'application la plus importante des chaînes de Markov à temps continu dans les systèmes de communication est l'ingénierie du trafic, et sera développée au module suivant consacré aux files d'attente proprement dites. Les modèles markoviens M/M/. sont les files d'attente les plus simples à analyser, et sont de bons modèles pour les systèmes de télétrafic dans lesquels l'hypothèse de temps inter-arrivées et de temps de service exponentiels est valable. C'est malheureusement loin d'être le cas pour des réseaux comme l'Internet, comme on le verra plus tard, mais c'est assez bien le cas pour les systèmes de téléphonie.

2.1 Centraux téléphoniques sans attente et formule d'Erlang-B

Dans un réseau téléphonique, ainsi que dans les réseaux de communication à commutation par circuit, il ne peut y avoir qu'un nombre maximum de connections à un instant donné. Il est alors intéressant de calculer la probabilité qu'un appel échoue car toutes les lignes sont occupées. L'utilisateur doit réessayer plus tard.

On suppose que les appels sont poissonniens, de taux λ, et que les durées des appels sont distribuées exponentiellement, avec une durée moyenne $1/\mu$. Soit s le nombre de lignes. Quelle est la probabilité qu'un appel entrant soit rejeté ?

Ce système (qu'on désignera dans le module suivant par système M/M/s/s) est un processus de naissance de mort, avec $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots, s-1, s\}$, qui compte le nombre de lignes occupées, et dans lequel les taux de transition d'un état à l'autre dépendent cette fois de l'état n, $0 \leq n \leq s$:

$$\begin{array}{rcll} \lambda_n & = & \lambda & \text{si } 0 \leq n \leq s-1 \\ \mu_n & = & n\mu & \text{si } 1 \leq n \leq s \end{array}$$

A partir de (45) et (46), on trouve alors

$$\pi_n^\star = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\,\pi_0^\star$$

avec

$$\pi_0^\star = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s}(\lambda/\mu)^n/n!}.$$

La probabilité qu'un appel soit rejeté est simplement la probabilité qu'un appel entrant trouve les s lignes ocupées :

$$\begin{array}{rcl} P(\text{rejet au temps } t) & = & P(X(t) = s \mid \text{un appel est juste arrivé après } t) \\ & = & \lim\limits_{\Delta t \to 0} P(X(t) = s \mid \text{un appel est arrivé dans } [t, t+\Delta t[\,) \\ & = & \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P(\text{ un appel est arrivé dans } [t, t+\Delta t[\; \mid X(t) = s)P(X(t) = s)}{P(\text{ un appel est arrivé dans } [t, t+\Delta t[\,)} \\ & = & \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P(\text{ un appel est arrivé dans } [t, t+\Delta t[\,)P(X(t) = s)}{P(\text{ un appel est arrivé dans } [t, t+\Delta t[\,)} \\ & = & P(X(t) = s) = \pi_s(t) \end{array}$$

si bien qu'à l'état stationnaire, cette probabilité d'appel bloqué (blocking probability) est

$$P(\text{rejet}) = \pi_s^\star = \frac{(\lambda/\mu)^s/s!}{\sum_{n=0}^{s}(\lambda/\mu)^n/n!} = B(s, \lambda/\mu) \tag{51}$$

Cette formule très importante en téléphonie porte le nom de *formule d'Erlang-B*. Elle permet de calculer, en fonction de l'*intensité du trafic* $\rho = \lambda/\mu$, mesurée en Erlang, la probabilité de blocage (rejet) d'un appel lorsqu'il y a un total de s lignes pour le central, et est notée $B(s, \rho)$.

2.2 Centraux téléphoniques avec attente et formule d'Erlang-C

Si maintenant les appels qui ne trouvent pas de ligne disponible peuvent être mis en attente, on a à nouveau un processus de naissance et de mort (on verra au module suivant que c'est le système M/M/s), avec $\mathcal{S} = \mathbb{N}$ et les taux de transition

$$\begin{array}{rcll} \lambda_n & = & \lambda & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ \mu_n & = & n\mu & \text{si } 1 \leq n \leq s \\ & = & s\mu & \text{si } n \geq s. \end{array}$$

La solution de ce système sera établie à l'exercice 9. La probabilité de blocage est cette fois la probabilité qu'un appel entrant doive attendre qu'une ligne se libère, et vaut (X étant à l'état stationnaire)

$$P(\text{attente}) = P(X \geq s) = \frac{\rho^s/s!}{(1-\rho/s)\sum_{n=0}^{s-1}\rho^n/n! + \rho^s/s!} = C(s, \rho) \tag{52}$$

Cette formule porte le nom de *formule d'Erlang-C*. Elle permet de calculer, en fonction de l'*intensité du trafic* $\rho = \lambda/\mu$, mesurée en Erlang, la probabilité de blocage (attente) d'un appel lorsqu'il y a un total de s lignes pour le central, et est notée $C(s, \rho)$.

2.3 Dimensionnement d'un système de téléphonie mobile cellulaire

Les systèmes de téléphonie cellulaire, comme le GSM (Global System for Mobile communications), couvrent les régions à desservir par une grille de cellules généralement hexagonales, comme représenté à la figure 6. Lorsque la technique d'accès utilise le multiplexage en fréquence (FDMA), éventuellement en combinaison avec du multiplexage temporel (TDMA) – ce qui est le cas le plus fréquent à l'heure actuelle – cette topologie permet de réutiliser des fréquences identiques ("frequency reuse") pour plusieurs cellules suffisamment distantes pour que l'interférence entre co-canaux ("co-channel interference", interférence entre canaux partageant la même fréquence) soit dans des limites acceptables.

La superficie de chaque cellule est déterminée tout d'abord par les *caractéristiques physiques de propagation*, comme les caractéristiques de l'antenne de la station de base, la topologie du relief à l'intérieur de la cellule, les interférences entre canaux de même cellule à des fréquences différentes (" adjacent channel interference") mais surtout entre canaux de cellules voisines à la même fréquence ("co-channel interference").

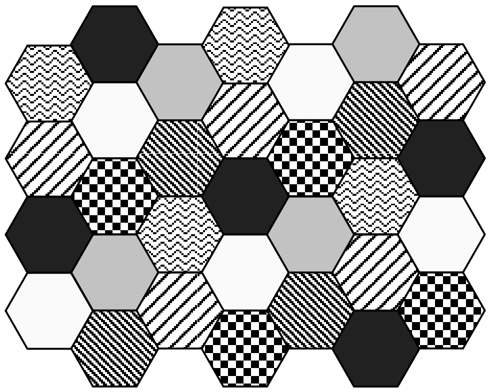

FIGURE 6 – Assignement de canaux fixes dans un système cellulaire avec réutilisation de 7 groupes de fréquences différentes.

Le deuxième ensemble de facteurs influençant la taille de chaque cellule est la *probabilité de blocage d'un appel*, qui doit être (en général) inférieure à 0.02 à l'heure de pointe, et qui peut en première approximation seulement être estimée par la formule d'Erlang-B (51) (ou la formule d'Erlang-C (52) si les appels sont maintenus en attente lorsque tous les canaux sont occupés). Si une cellule est surchargée, avant de la diviser en deux ou trois, ce qui coûte des antennes supplémentaires, et complique le pattern de réutilisation des fréquences, il est possible d'emprunter certains canaux à des cellules voisines moins surchargées ("channel borrowing" ou "directed retry").

Une complexité supplémentaire, propre à la téléphonie mobile et d'autant plus importante que les cellules sont petites, est que les appels ont deux origines : d'une part, les nouveaux appels proprement dits ("Originating Calls (OC)"), issus dans la cellule elle-même à un taux λ_{OC}, et d'autre part, les appels ayant débuté dans une autre cellule, mais devant se poursuivre dans la cellule considérée à cause déplacement du mobile dans la cellule ("Handoff Calls (HC)"), avec un taux λ_{HC}. Ces derniers doivent avoir priorité pour l'acquisition de nouveaux canaux, car il est préférable de ne pas offrir le service que de l'interrompre brutalement. Différentes possibilités existent, de la simple priorité des appels HC à la réservation exclusive d'un nombre fixé de canaux de garde pour ces appels. On analysera un tel système à l'exercice 10.

3 Exercices

1. Etablir les équations de Chapman-Kolmogorov (8).
2. Calculer les probabilités de transition et d'état de la chaîne de Markov à temps continu à deux états de la section 1.7.1.
3. (a) Vérifier que les probabilités d'état du processus de Yule sont données par (30).
   (b) Que vaut l'espérance de la taille de la population au temps t ?
4. On considère le processus de naissance et de mort de la section 1.7.3.
   (a) Montrer que
   $$\begin{aligned} \nu_0 &= 1/E[T_0] = \lambda_0 \\ \nu_i &= 1/E[T_i] = \lambda_i + \mu_i \qquad \text{si } i \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$
   (Hint : pour la seconde équation, utiliser le résultat de l'exercice 7 du module 5)
   (b) Soient X et Y deux v.a. exponentielles indépendantes de paramètres respectifs λ_X et λ_Y. Montrer que
   $$P(X > Y) = \frac{\lambda_Y}{\lambda_X + \lambda_Y}.$$
   (c) A partir du résultat précédent, montrer que les probabilités de transition de la chaîne induite sont
   $$\begin{aligned} \hat{q}_{0,1} &= 1 \\ \hat{q}_{i,i+1} &= \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \qquad \text{si } i \in \mathbb{N}_0 \\ \hat{q}_{i,i-1} &= \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \qquad \text{si } i \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$
5. Calculer la fonction d'auto-corrélation de la chaîne de Markov à temps continu à deux états de la section 1.7.1, lorsque $\pi_0(0) = \pi_1(0) = 1/2$. Vérifiez que lorsque $\lambda = \mu$, votre résultat coïncide bien avec celui que vous aviez obtenu à l'exercice 9 du module 3. Le processus est-il stationnaire au sens strict ?

6. On modélise très simplement un locuteur par un système ON-OFF qui est la chaîne de Markov à temps continu à deux états de la section 1.7.1, où l'état 1 (ON) correspond à une période d'activité du locuteur, et l'état 0 (OFF) à une période de silence.

   Soit un groupe de N locuteurs indépendants, et soit $X(t)$ le nombre de ces locuteurs actifs au temps t.

   (a) Dessiner le diagramme de transitions d'états de la chaîne $X(t)$

   (b) Calculer la loi de probabilité de X à l'état stationnaire. Auriez-vous pu obtenir ce résultat directement, sans passer par la résolution des équations de balance ?

   (c) Quel est le nombre moyen de locuteurs actifs à l'état stationnaire ?

7. On considère un processus de naissance et de mort (le système M/M/∞) dans lequel

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda \quad \text{si } i \in \mathbb{N} \\ \mu_i &= i\mu \quad \text{si } i \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

   (a) Initialement, $P(X(0) = 0) = 1$. Vérifier que les probabilités d'état au temps t sont

$$\pi_i(t) = P(X(t) = i) = \frac{1}{i!}\left[(1 - e^{-\mu t})\frac{\lambda}{\mu}\right]^i \exp\left[-(1 - e^{-\mu t})\frac{\lambda}{\mu}\right]$$

   (b) Calculer $E[X(t)]$ (Hint : passer par la fonction génératrice $G_{X(t)}(z;t)$).

   (c) Que deviennent les résultats précédents lorsque $t \to \infty$?

8. Calculer les probabilités de trouver n tâches dans le système du processeur avec pannes dont le diagramme des transitions entre états est donné à la figure 4.

9. Etablir la formule d'Erlang-C (52).

10. On considère un système de téléphonie cellulaire, dans lequel les nouveaux appels proprement dits ("Originating Calls (OC)") sont issus suivant un processus de Poisson de taux λ_{OC}, et les appels transférés d'autres cellules ("Handoff Calls (HC)"), sont générés avec un taux λ_{HC}. La durée de tous les appels est distribuée exponentiellement, avec un taux μ.

    Il y a un total de $s + g$ canaux disponibles pour la cellule, parmi lesquels g canaux de garde sont réservés à l'usage exclusif des appels HC. Ainsi, s'il y a plus de g canaux libres, tous les appels sont acceptés, qu'ils soient OC ou HC. Par contre, s'il y a déjà s canaux ou plus occupés, mais moins de $s + g$ canaux pris, seuls les appels sont HC sont acceptés, les appels OC sont rejetés. Si tous les $s + g$ canaux sont occupés, tous les appels sont rejetés.

    (a) Dessiner le diagramme des transitions de ce système.

    (b) Calculer la probabilité d'interruption de service (blocage) d'un appel HC.

    (c) Calculer la probabilité de rejet (blocage) d'un appel OC.