

Module 5: Processus de Poisson

1 Processus de Poisson sur $\mathbb{R}^+$

1.1 Processus de comptage

Un processus stochastique $\{N(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ (où $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des réels non négatifs) est un *processus de comptage* si $N(t)$ représente le nombre d'événements se déroulant dans l'intervalle de temps $[0, t]$. Il possède donc les propriétés suivantes:

1. C'est un processus à temps continu et à valeurs entières non négatives.
2. $N(0) = 0$. (Cette condition initiale est arbitraire: on aurait pu prendre une autre valeur, ou un autre temps que 0.)
3. Si $t_1 < t_2$ alors $N(t_1) \leq N(t_2)$.
4. Le nombre d'événements se déroulant dans l'intervalle $]t_1, t_2]$ est donné par $N(t_2) - N(t_1)$.

Au processus de comptage $N(t)$ sont associés deux autres processus stochastiques. Le premier est la *séquence des temps d'arrivée* $\{S(n), n \in \mathbb{N}_0\}$ où $S(n)$ décrit le temps où se produit l'arrivée du n ème événement. Le second est la *séquence des temps entre arrivées* $\{T(n), n \in \mathbb{N}\}$ où $T(n)$ décrit l'intervalle de temps séparant l'arrivée du n ème et du $(n+1)$ ème événements. Ces deux séquences sont donc à présent des processus à temps discret et à valeurs continues.

Les trois processus $N(t)$, $S(n)$ et $T(n)$ sont liés par les relations suivantes.

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S(n) \leq t \quad (1)$$

$$S(n) = \sum_{m=0}^{n-1} T(m) = T(0) + T(1) + \dots + T(n-1). \quad (2)$$

$$T(n) = S(n+1) - S(n) \quad \text{si } n \geq 1 \quad \text{et} \quad T(0) = S(1) \quad (3)$$

On peut en fait remplacer (1) par l'équation plus précise

$$N(t) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : S(n) \leq t\} \quad (4)$$

$$S(n) = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : N(t) = n\}. \quad (5)$$

1.2 Définition et loi de probabilité d'un processus de Poisson

Une première définition de processus de Poisson homogène est la suivante.

Définition 1 Un processus de Poisson homogène d'intensité (taux) $\lambda > 0$ est un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ qui satisfait aux trois hypothèses suivantes:

H1. le processus est à accroissements indépendants: des événements se déroulant dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants, i.e.

$$P(\{N(t+T) - N(t) = n_0\} \cap \{N(t) = n_1\}) = P(N(t+T) - N(t) = n_0)P(N(t) = n_1)$$

H2. le processus est homogène dans le temps, ce qui signifie que ses accroissements sont stationnaires: le nombre d'évènements se déroulant dans un intervalle de temps ne dépend que de sa longueur, i.e.

$$P(N(t+T) - N(t) = n_0) = P(N(T) = n_0)$$

H3. la probabilité que deux évènements ou plus se produisent dans un petit intervalle de temps Δt est négligeable par rapport à la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul évènement. Plus précisément,

$$\begin{aligned} P(N(\Delta t) = 1) &= \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ P(N(\Delta t) \geq 2) &= o(\Delta t) \end{aligned}$$

où λ est un paramètre positif (appelé intensité) et où la fonction $f(\cdot)$ est " $o(\Delta t)$ " si

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

On en déduit que

$$P(N(\Delta t) = 0) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Une définition alternative est la suivante:

Définition 2 Un processus de Poisson homogène d'intensité (taux) $\lambda > 0$ est un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ qui satisfait aux deux hypothèses suivantes:

H1'. le processus est à accroissements indépendants: des évènements se déroulant dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants, i.e.

$$P(\{N(t+T) - N(t) = n_0\} \cap \{N(t) = n_1\}) = P(N(t+T) - N(t) = n_0)P(N(t) = n_1)$$

H2'. Le nombre d'évènements se déroulant dans un intervalle de temps de longueur T suit une loi de Poisson, i.e. pour tout $t, T \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$P(N(t+T) - N(t) = n) = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}.$$

Théorème 1 Les deux définitions 1 et 2 sont équivalentes.

Les deux hypothèses H1 et H1' sont identiques, il faut montrer que H2' est équivalente à la combinaison de H2 et H3. Il est immédiat de vérifier que H2' $\Rightarrow$ H2 et H3. Il reste à montrer que H2 et H3 $\Rightarrow$ H2'.

On cherche la loi de probabilité de $N(t)$, c'est -à -dire les probabilités

$$P(N(t) = n) = p_n(t).$$

Calculons d'abord $P(N(t + \Delta t) = 0) = p_0(t + \Delta t)$, en utilisant les hypothèses H1 à H3. On trouve

$$\begin{aligned} p_0(t + \Delta t) &= P(\{N(t + \Delta t) - N(t) = 0\} \cap \{N(t) = 0\}) \\ &= P(N(\Delta t) = 0)P(N(t) = 0) = (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))p_0(t) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = \left(-\lambda + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right)p_0(t)$$

qui devient, en prenant la limite pour $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\frac{dp_0}{dt}(t) = -\lambda p_0(t). \quad (6)$$

Ensuite, pour $n > 0$, on trouve de manière similaire à partir du théorème des probabilités totales

$$\begin{aligned} p_n(t + \Delta t) &= \sum_{k=0}^n P(N(t + \Delta t) - N(t) = k | N(t) = n - k)P(N(t) = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^n P(N(\Delta t) = k)P(N(t) = n - k) \\ &= (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))p_n(t) + (\lambda\Delta t + o(\Delta t))p_{n-1}(t) + \sum_{k=2}^n o(\Delta t)p_{n-k}(t) \\ &= (1 - \lambda\Delta t)p_n(t) + (\lambda\Delta t)p_{n-1}(t) + o(\Delta t) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

qui devient, en prenant la limite pour $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\frac{dp_n}{dt}(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t). \quad (7)$$

L'ensemble des équations différentielles (6) et (7) est connu sous le nom d'*équations de Kolmogorov*. Elles décrivent l'évolution de la loi de probabilité de la v.a. $N(t)$ au cours du temps t à partir de la distribution initiale de $N(0)$, qui est $p_0(0) = 1$ et $p_n(0) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}_0$.

On peut les résoudre en calculant la fonction génératrice $G_N(z; t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)z^n$, ce qui fait l'objet de l'exercice 1. Une autre manière de procéder est de calculer directement leur solution par récurrence sur n . Pour $n = 0$, la solution de (6) est

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

tandis que pour $n > 0$, on peut vérifier que la solution de (7) est

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Par conséquent la loi de probabilité de la v.a. $N(t)$ n'est autre que la loi de Poisson, que nous avons définie au module 1 comme loi limite de la loi binomiale.

En appliquant l'hypothèse H2 une fois de plus, on trouve $P(N(t+T) - N(t) = n) = p_n(T)$, ce qui établit l'équivalence entre les deux définitions.

1.3 Propriétés

Le processus de Poisson homogène possède les propriétés suivantes:

P1. Comme $N(t)$ est une v.a. de Poisson, sa fonction génératrice est

$$G_N(z; t) = e^{\lambda t(z-1)},$$

sa moyenne est

$$\mu_N(t) = E[N(t)] = \lambda t$$

tandis que sa variance est

$$\sigma_N^2(t) = E[N^2(t)] - \mu_N^2(t) = \lambda t.$$

P2. Sa fonction d'auto-corrélation est, comme nous le verrons à l'exercice 2,

$$R_N(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2).$$

P3. La *superposition* de M processus de Poisson indépendants $N_i(t)$ de taux λ_i , $1 \leq i \leq M$ est encore un processus de Poisson $N(t)$, de taux $\lambda = \sum_{i=1}^M \lambda_i$ (cfr exercice 3).

P4. La *décomposition* d'un processus de Poisson $N(t)$ de taux λ en M processus différents, telle que la probabilité qu'un événement de ce processus fasse partie du processus i ($1 \leq i \leq M$) est égale à p_i ($\sum_{i=1}^M p_i = 1$) donne encore naissance à M processus de Poisson $N_i(t)$ indépendants, de taux $p_i \lambda$, $1 \leq i \leq M$.

Démontrons cette propriété dans le cas où $M = 2$, l'extension à M quelconque se faisant par récurrence sur M . Dans ce cas, $p_2 = 1 - p_1$ et notant que la distribution de $N_1(t)$ connaissant $N(t)$ est une loi binomiale de paramètre p_1 :

$$P(N_1(t) = n_1 | N(t) = n_1 + n_2) = C_{n_1+n_2}^{n_1} p_1^{n_1} (1 - p_1)^{n_2},$$

on calcule successivement

$$\begin{aligned} P(N_1(t) = n_1, N_2(t) = n_2) &= P(N_1(t) = n_1, N(t) = n_1 + n_2) \\ &= P(N_1(t) = n_1 | N(t) = n_1 + n_2) P(N(t) = n_1 + n_2) \\ &= C_{n_1+n_2}^{n_1} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \frac{(\lambda t)^{n_1+n_2}}{(n_1 + n_2)!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(p_1 \lambda t)^{n_1}}{n_1!} e^{-p_1 \lambda t} \frac{(p_2 \lambda t)^{n_2}}{n_2!} e^{-p_2 \lambda t} \end{aligned} \quad (8)$$

d'où

$$\begin{aligned}
P(N_1(t) = n_1) &= \sum_{n_2=0}^{\infty} P(N_1(t) = n_1, N_2(t) = n_2) \\
&= \frac{(p_1 \lambda t)^{n_1}}{n_1!} e^{-p_1 \lambda t} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{(p_2 \lambda t)^{n_2}}{n_2!} e^{-p_2 \lambda t} \\
&= \frac{(p_1 \lambda t)^{n_1}}{n_1!} e^{-p_1 \lambda t}
\end{aligned}$$

ce qui montre que $N_1(t)$ est un processus de Poisson de taux $p_1 \lambda$ (il est clair que le processus est à accroissements indépendants, car les événements appartenant à $N_1(t)$ proviennent de $N(t)$, qui est lui-même à accroissements indépendants). De même, le processus $N_2(t)$ est un processus de Poisson de taux $p_2 \lambda$. Enfin, les deux processus sont indépendants à cause de (8).

1.4 Séquence des temps d'arrivée et inter-arrivées

Calculons à présent la loi de probabilité des temps d'arrivées et entre arrivées.

P5. La *séquence des temps d'arrivée* $\{S(n), n \in \mathbb{N}_0\}$ suit une loi d'Erlang (cfr exercice 4):

$$f_{S(n)}(s; n) = \frac{\lambda(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s} \quad (9)$$

avec $s \in \mathbb{R}^+$.

P6. La *séquence des temps entre arrivées* $\{T(n), n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de v.a. exponentielles i.i.d.:

$$f_{T(n)}(t; n) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (10)$$

avec $t \in \mathbb{R}^+$.

En effet, comme le processus de Poisson est à accroissement indépendants, les événements arrivant après la n ième arrivée sont indépendants des événements qui sont arrivés avant. Dès lors, $T(n) = S(n+1) - S(n)$ est indépendant de $S(n), S(n-1), \dots, S(1)$ et de $T(n-1), T(n-2), \dots, T(0)$. Calculons à présent la probabilité de l'évènement $\{T(0) > t\}$:

$$P(T(0) > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

ce qui montre que $T(0)$ est une v.a. exponentielle. De même, la probabilité de l'évènement $\{T(n) > t\}$ pour $n \geq 1$ est

$$\begin{aligned}
P(T(n) > t) &= P(T(n) > t | S(n) = s_n) = P(N(s_n + t) - N(s_n) = 0 | S(n) = s_n) \\
&= P(N(s_n + t) - N(s_n) = 0) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

ce qui montre que $T(n)$ est une v.a. exponentielle de moyenne $1/\lambda$.

En fait la propriété P6 nous permet d'énoncer une troisième définition du processus de Poisson:

Définition 3 Soit $\{T(n), n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires exponentielles i.i.d. de moyennes $1/\lambda$, à partir de laquelle on forme la séquence

$$S(n) = \sum_{m=0}^{n-1} T(m).$$

Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ obtenu en posant $N(t) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : S(n) \leq t\}$ est un processus de Poisson homogène d'intensité (taux) $\lambda > 0$.

Rappelons que la v.a. exponentielle est sans mémoire, comme on l'a vu au module 1: quels que soient $t, t' \in \mathbb{R}^+$,

$$P(T(n) > t + t' | T(n) > t') = P(T(n) > t).$$

On peut montrer que c'est la seule v.a. continue possédant cette propriété.

2 Processus et bruit impulsif de Poisson sur $\mathbb{R}$

2.1 Processus de Poisson sur $\mathbb{R}$

Dans les applications du processus de Poisson au télétrafic et à l'analyse de performances dans les réseaux de communication, on n'a besoin de définir $N(t)$ que pour $t \geq 0$. Néanmoins, les applications aux dispositifs physiques ou optiques utilisent en général des processus définis sur tous les $t \in \mathbb{R}$. Ceci ne pose pas de difficulté majeure: on remplace l'hypothèse 1 définissant un processus de comptage par l'hypothèse qu'un processus de comptage (ou encore processus ponctuel ("point process")) défini sur $\mathbb{R}$ est un processus à temps continu et à valeurs entières, et en gardant les trois autres hypothèses inchangées. Comme $N(0) = 0$, le processus $N(t)$ prend des valeurs négatives (ou nulles) pour $t \leq 0$ et positives (ou nulles) pour $n \geq 0$. Le nombre d'arrivées dans un intervalle $[t_1, t_2]$ avec $t_1 < t_2$, qu'on note parfois $N([t_1, t_2])$, reste lui un nombre naturel. La séquence des temps d'arrivée est définie sur $\mathbb{Z}$: $\{S(n), n \in \mathbb{Z}\}$, avec $\dots \leq S(-2) \leq S(-1) \leq S(0) \leq 0 < S(1) \leq S(2) \leq \dots$. Enfin, la séquence des temps entre arrivées consécutives $\{T(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est liée à la précédente par

$$T(n) = S(n+1) - S(n) \tag{11}$$

définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

L'extension de la définition de processus de Poisson se fait également sans peine, en levant la restriction $t \in \mathbb{R}^+$. Par exemple, la définition 2 devient:

Définition 4 Un processus de Poisson homogène d'intensité (taux) $\lambda > 0$ sur $\mathbb{R}$ est un processus de comptage $\{N(t), t \in \mathbb{R}\}$ qui satisfait aux deux hypothèses suivantes:

H1'. le processus est à accroissements indépendants: des événements se déroulant dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants, i.e. pour tout $T, T' \geq 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$

$$P(\{N(t+T) - N(t) = n_0\} \cap \{N(t) - N(t-T') = n_1\}) = P(N(t+T) - N(t) = n_0)P(N(t) - N(t-T') = n_1)$$

H2'. Le nombre d'événements se déroulant dans un intervalle de temps de longueur T suit une loi de Poisson, i.e. pour tout $T \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$P(N(t+T) - N(t) = n) = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}.$$

La séquence des $\{T(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est à nouveau une suite de v.a. exponentielles i.i.d. de moyennes $1/\lambda$. Le fait que $T(0)$ soit encore une v.a. exponentielle de moyenne $1/\lambda$, bien qu'elle soit définie par (11) comme $T(0) = S(1) - S(0)$ et non plus par (3) comme $T(0) = S(1)$ est dû à l'hypothèse des accroissements indépendants, et au fait qu'on a posé par hypothèse que $N(0) = 0$: pour tout $s_1 > 0$ et $s_0 \leq 0$,

$$\begin{aligned} P(S(1) > s_1 | S(0) = 0) &= P(S(1) > s_1 | N(0) = 0, S(0) = 0) \\ &= P(S(1) > s_1 | N(0) = 0, S(0) = s_0) = P(S(1) > s_1 | S(0) = s_0) \end{aligned}$$

d'où

$$P(T(0) > s_1 | S(0) = 0) = P(T(0) > s_1 - s_0 | S(0) = s_0) = P(T(0) > s_1 - s_0 | T(0) \geq -s_0),$$

ce qui montre que $T(0)$ est une v.a. continue sans mémoire et est donc exponentielle.

On peut vérifier que toutes les propriétés P1 à P4 sont valables pour $t \in \mathbb{R}$ au lieu de $t \in \mathbb{R}^+$.

2.2 Bruit impulsif de Poisson (Shot noise)

Le processus stochastique

$$X_h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - S(n)) \quad (12)$$

où $h(t)$ est une fonction déterministe, et où $\{S(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est la séquence des temps d'arrivée d'un processus de Poisson homogène $\{N(t), t \in \mathbb{R}\}$ est appelé *bruit impulsif de Poisson* (Poisson shot noise), comme représenté au bas de la figure 1.

Remarquons que si $h(t)$ est l'échelon unité :

$$h(t) = 1_{\mathbb{R}_0^+}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0, \end{cases}$$

ce processus est le processus de Poisson défini à la section précédente: $X_{1_{\mathbb{R}_0^+}}(t) = N(t)$. Dans ce cas, ses deux premiers moments sont donnés par les propriétés P1 et P2 à la section précédente..

Le processus stochastique

$$\hat{X}_h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n h(t - S(n)) \quad (13)$$

où $h(t)$ est une fonction déterministe, où $\{S(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est la séquence des temps d'arrivée d'un processus de Poisson homogène $\{N(t), t \in \mathbb{R}\}$, et où $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables

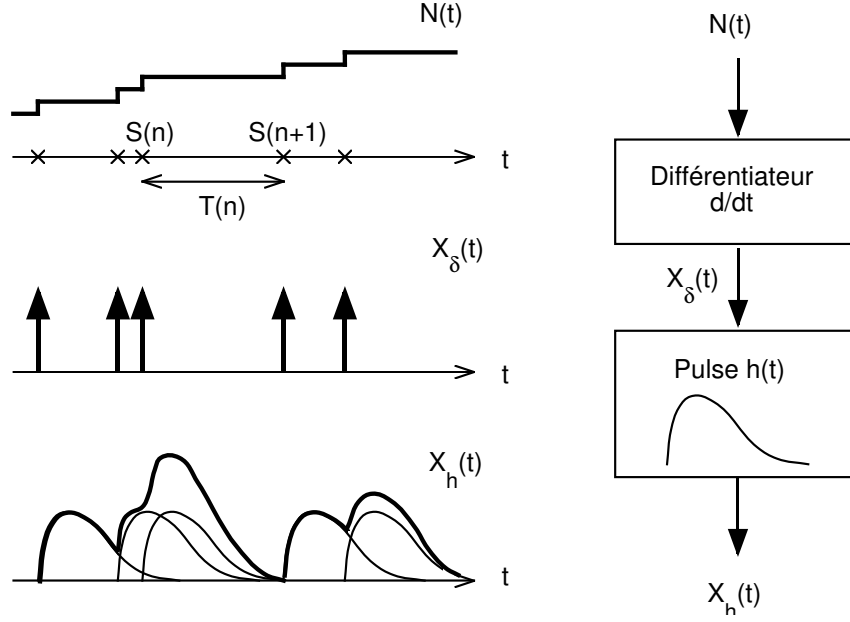


Figure 1: Bruit impulsif de Poisson $X_h(t)$.

aléatoires i.i.d. et indépendantes de $N(t)$ est appelé *bruit impulsif de Poisson composé*. Si $A_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le processus est le bruit impulsif de Poisson.

Nous allons calculer les moments de X_h dans le cas général (12) en utilisant les distributions de Dirac et le lemme suivant.

Lemme 1 Soit $X(t)$ un processus de moyenne $\mu_X(t)$ et de fonction d'auto-corrélation $R_X(t_1, t_2)$, et soit $X'(t)$ le processus obtenu en dérivant $X(t)$ par rapport à t ¹:

$$X'(t) = \frac{dX}{dt}(t).$$

Alors

$$\begin{aligned} \mu_{X'}(t) &= E[X'(t)] = \frac{d\mu_X}{dt}(t) \\ R_{X'}(t_1, t_2) &= E[X'(t_1)X'(t_2)] = \frac{\partial^2 R_X}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Nous avons déjà rencontré cette propriété au module 3 pour des processus WSS (en posant $\tau = t_1 - t_2$, $\partial^2 R_X / \partial t_1 \partial t_2(t_1, t_2) = -d^2 R_X / d\tau^2(\tau)$), ce lemme l'étend aux processus non stationnaires. Il résulte de la linéarité des opérateurs d'espérance et de dérivation:

$$E[X'(t)] = E\left[\frac{dX}{dt}(t)\right] = \frac{d}{dt} E[X(t)]$$

¹en utilisant les distributions de Dirac aux points de singularité

et

$$\begin{aligned} E[X'(t_1)X'(t_2)] &= E\left[\frac{dX}{dt}(t_1)X'(t_2)\right] = \frac{\partial}{\partial t_1}E[X(t_1)X'(t_2)] \\ &= \frac{\partial}{\partial t_1}E\left[X(t_1)\frac{dX}{dt}(t_2)\right] = \frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}E[X(t_1)X(t_2)] \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant prêts pour le calcul des deux premiers moments de (12) dans le cas particulier où $h(t) = \delta(t)$. En effet, dans ce cas

$$X_\delta(t) = \frac{dX_{1_{\mathbb{R}_0^+}}}{dt}(t) = \frac{dN}{dt}(t),$$

et le lemme précédent entraîne que si λ est l'intensité de $N(t)$,

$$\begin{aligned} \mu_{X_\delta}(t) &= E[X_\delta(t)] = \frac{d}{dt}E[N(t)] = \lambda \\ R_{X_\delta}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2 R_N}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}(\lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_1}(\lambda^2 t_1 + \lambda 1_{\mathbb{R}_0^+}(t_1 - t_2)) = \lambda^2 + \lambda \delta(t_1 - t_2), \end{aligned}$$

ce qui montre que le processus $X_\delta(t)$ est WSS (si du moins si on tolère une puissance moyenne infinie à cause de l'impulsion de Dirac, comme nous l'avons fait dans le module 3). Par conséquent il possède une densité spectrale de puissance qui vaut

$$S_{X_\delta}(f) = \lambda^2 \delta(f) + \lambda.$$

Le processus (12) pour une forme générale de pulse $h(t)$ (on suppose seulement qu'elle est absolument intégrable), est obtenu en convoluant le processus $X_\delta(t)$ avec $h(t)$ (cfr Figure 1):

$$X_h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)X_\delta(s)ds.$$

Comme $h(t)$ est absolument intégrable, sa transformée de Fourier $H(f)$ est bien définie, et on peut appliquer le théorème 2 du module 3 pour obtenir

$$S_{X_h}(f) = |H(f)|^2 S_{X_\delta}(f) = \lambda^2 H^2(0) \delta(f) + \lambda |H(f)|^2.$$

En prenant la transformée de Fourier inverse on trouve

$$R_{X_h}(\tau) = \lambda^2 H^2(0) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 e^{2\pi j f \tau} df.$$

De même, $E[X_h(t)] = \lambda H(0)$ comme on l'a vu au module 3. Par conséquent, on a établi les formules suivantes, connues sous le nom de théorème de Campbell:

P7. Si $h(t)$ est une fonction absolument intégrable, la moyenne et la variance de (12) valent respectivement

$$\mu_{X_h} = E[X_h(t)] = \lambda H(0) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(s) ds \quad (14)$$

$$\sigma_{X_h}^2 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h^2(s) ds. \quad (15)$$

La seconde égalité (15) est due au théorème de Parseval (cfr cours de traitement du signal).

L'extension de cette propriété à (13) est comme suit (exercice 11):

P8. Si $h(t)$ est une fonction absolument intégrable, la moyenne et la variance de (13) valent respectivement

$$\mu_{\hat{X}_h} = E[\hat{X}_h(t)] = \lambda \mu_A H(0) = \lambda \mu_A \int_{-\infty}^{\infty} h(s) ds \quad (16)$$

$$\sigma_{\hat{X}_h}^2 = \lambda(\mu_A^2 + \sigma_A^2) \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \lambda(\mu_A^2 + \sigma_A^2) \int_{-\infty}^{\infty} h^2(s) ds, \quad (17)$$

où $\mu_A = E[A_n]$ et $\sigma_A^2 = \text{VAR}[A_n] = E[(A_n - \mu_A)^2]$.

3 Application: rapport signal/bruit d'un photodétecteur

Les fibres optiques sont capables de transmettre de l'information sous forme d'énergie lumineuse sur de longues distances, sur une large bande de fréquences et avec peu d'atténuation, ce qui en fait le milieu de transmission idéal pour les communications numériques. Un lien optique consiste en une source (une diode LED ou un laser) connectée à une fibre se terminant par un photodétecteur, qui convertit le signal lumineux $X_s(t)$ en (photo)courant électrique, comme représenté à la figure 2. Nous nous intéressons à ces derniers, qui sont deux types: la photodiode PIN (pour des débits de l'ordre de 100 Mbits/sec) et la photodiode à avalanche (pour des débits de l'ordre d'1 Gbit/sec). Le photodétecteur lui-même est suivi par un amplificateur, transformant le photocourant en une tension électrique, qui est ensuite filtrée puis échantillonnée avant le système de décision. Cette dernière partie suit les mêmes principes que ceux du détecteur vu à l'application 2 du module 3, mais ici on doit considérer différentes sources de bruit:

- le *bruit thermique* $V_{th}(t)$, dû au circuit de réception et surtout à l'amplificateur, qu'on peut supposer blanc gaussien à bande étroite (celle du filtre qui suit l'amplificateur),
- le *courant d'obscurité* $I_d(t)$, qui résulte de l'excitation thermique des porteurs de la photodiode, même sans lumière incidente, et qui est un processus ponctuel,
- le *bruit de grenaille* $I_{sh}(t)$ qui représente les écarts entre le courant "utile" $I_s(t)$, proportionnel au signal modulant $X_{elec}(t)$ (et donc porteur de l'information), et le photocourant réellement reçu $I_i(t)$, qui est un processus ponctuel. $I_{sh}(t) = I_i(t) - I_s(t)$ avec $E[I_s(t)] = E[I_i(t)]$.

Nous allons étudier les rapports SNR (Signal to Noise Ratio) dans les deux types de photodiodes et comparer les influences des différentes sources de bruit.

3.1 Photodiode PIN

En plus des régions dopées en électrons (n) et en trous (p), communes à toute diode classique, une photodiode présente une grande zone non dopée (i pour intrinsèque), comme montré par le schéma de gauche à la figure 3. Les photons du signal optique véhiculé par la fibre sont absorbés par le matériau constituant la photodiode (Si, Ge, GaAs, InGaAs, AlGaAs, ...), et créent une paire électron/trou. La diode fonctionne en polarisation inverse, produisant de ce fait un champ électrique dans la zone dite de déplétion, qui inclut la zone i de la diode. Ce champ électrique sépare les électrons et les trous et les envoie vers les contacts électriques, créant de ce fait un courant électrique.

Tous les photons ne peuvent être convertis en paire électrons/trous, car certains d'entre eux se recombinent (surtout ceux créés aux extrémités de la zone de déplétion). L'efficacité quantique η représente le nombre de photons incidents convertis en paires de porteurs. Elle est une fonction du matériau utilisé et de la géométrie de la diode: plus la région de déplétion est grande, plus l'efficacité augmente.

La théorie quantique prédit que le processus des arrivées des photons est un processus de Poisson. Les porteurs (charges) mettent un certain temps à parcourir la zone de déplétion de la diode avant d'arriver aux électrodes, si bien que le courant produit est bien modélisé par un bruit impulsif de Poisson

$$I_i(t) = e \sum_n h(t - S'(n))$$

où e est la charge d'un électron ($e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Coulombs), où $S'(n)$ est la séquence des temps d'arrivée des photons, et où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle de la photodiode PIN, qui modélise le transit des électrons au travers de la zone de déplétion. Sa forme typique est représentée à la partie droite de la figure 3.

Le nombre moyen de paires de porteurs créés par unité de temps λ_i est proportionnel à la puissance optique incidente $P_s(t)$ (elle-même proportionnelle à $X_{elec}(t)$). En effet, chaque photon a une énergie $h\nu$ où $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Joules · sec est la constante de Planck et ν est la fréquence optique. Par conséquent

$$\lambda_i = \frac{\eta P_s}{h\nu}.$$

Dans la suite, nous ne considérerons que le cas particulier où P_s est constante. Le théorème de Campbell implique alors que

$$E[I_i(t)] = e\lambda_i \int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds = \frac{\eta e P_s}{h\nu} \int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds.$$

Comme on a posé $I_s = E[I_i(t)]$, le courant de bruit de grenaille est dès lors

$$I_{sh}(t) = I_i(t) - I_s(t) = e \sum_n h(t - S'(n)) - \frac{\eta e P_s}{h\nu} \int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds.$$

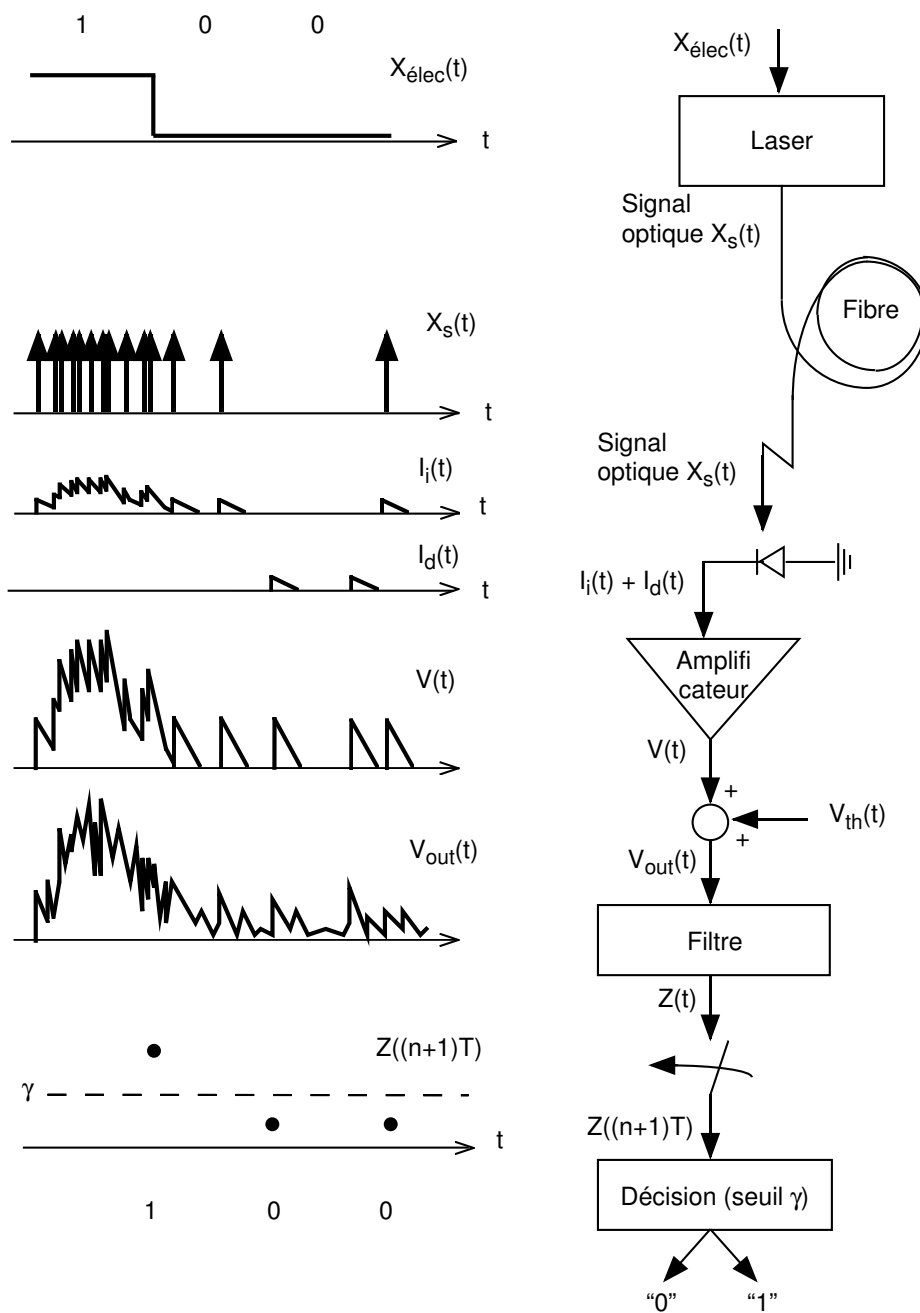


Figure 2: Eléments d'un système de détection optique directe.

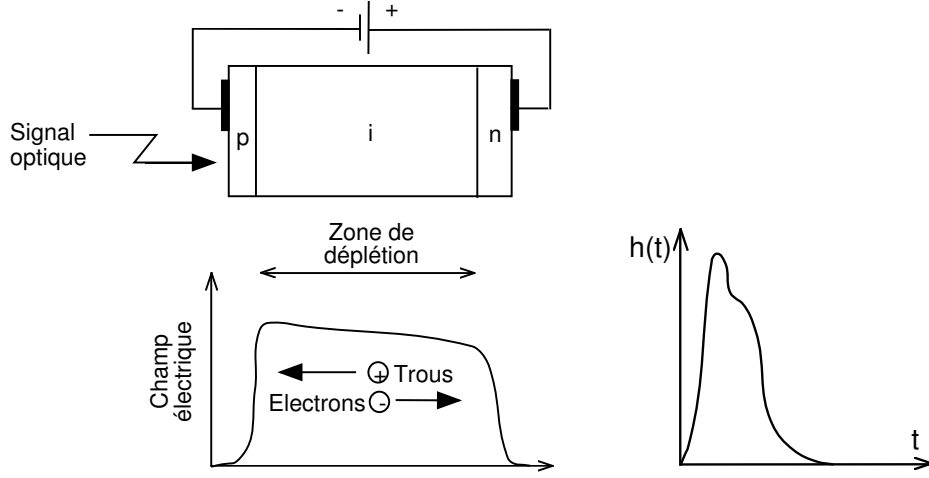


Figure 3: Schéma d'une photodiode PIN et champ électrique créé par une polarisation inverse de la photodiode (à gauche). Forme de la réponse impulsionnelle d'une photodiode (à droite). Sa largeur horizontale correspond, grosso modo, à la largeur de la zone de déplétion divisée par la vitesse de déplacement des charges.

A cette composante de bruit impulsif, il faut ajouter le courant d'obscurité (dark current) qui provient de l'émission spontanée de paires de porteurs dans le matériau de la photodiode, par excitation thermique et non plus lumineuse. Ce courant est à nouveau un bruit impulsif de Poisson

$$I_d(t) = e \sum_n h(t - S''(n))$$

d'intensité λ_d et où les temps $S''(n)$ sont indépendants des temps $S'(n)$.

Comme les deux processus de Poisson dont sont dérivés $I_i(t)$ et $I_d(t)$ sont indépendants, leur somme est encore un processus de Poisson d'intensité $\lambda_i + \lambda_d$ (propriété P3). Notons $\{S(n), n \in \mathbb{Z}\}$ la séquence des temps d'arrivée de ce dernier processus ($\{S(n)\} = \{S'(n)\} \cup \{S''(n)\}$). Si g est le gain de l'amplificateur (qui est supposé linéaire et dont la réponse impulsionnelle, si elle n'est pas une impulsion de Dirac, est prise en compte dans $h(t)$), ce courant total est amplifié et converti en une tension

$$V(t) = g(I_i(t) + I_d(t)) = ge \sum_n h(t - S(n))$$

à laquelle vient s'ajouter une tension de bruit thermique $V_{th}(t)$, de moyenne nulle et de variance σ_{th}^2 , si bien que la tension à la sortie de l'amplificateur est

$$V_{out}(t) = ge \sum_n h(t - S(n)) + V_{th}(t). \quad (18)$$

Le rapport signal sur bruit de la photodiode est défini par (avec P_s constant)

$$SNR = \frac{E^2[V(t)|\lambda_d = 0]}{VAR[V_{out}(t)]} \quad (19)$$

Le théorème de Campbell nous permet de calculer que

$$\begin{aligned} E[V(t)|\lambda_d = 0] &= ge\lambda_i \int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds = \frac{\eta ge P_s}{h\nu} \int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds \\ VAR[V_{out}(t)] &= g^2 e^2 \left(\frac{\eta P_s}{h\nu} + \lambda_d \right) \int_{-\infty}^{\infty} h^2(s)ds + \sigma_{th}^2 \end{aligned}$$

d'où pour la photodiode PIN

$$SNR_{PIN} = \frac{\left((\eta P_s / h\nu) \int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds \right)^2}{(\eta P_s / h\nu + \lambda_d) \int_{-\infty}^{\infty} h^2(s)ds + \sigma_{th}^2 / g^2 e^2}. \quad (20)$$

En général, le dénominateur est dominé par le terme dû au bruit thermique $V_{th}(t)$, qui détermine donc le rapport signal/bruit.

3.2 Photodiode à avalanche

Pour diminuer l'influence du bruit thermique de l'amplificateur, il faut amplifier le très faible photo-courant déjà en amont de celui-ci. Ceci est réalisable grâce aux photodiodes à avalanche (APD), qui sont des photodiodes en polarisation inversée comme les photodiodes PIN, mais avec la différence que la tension de polarité inverse est tellement grande que les charges libérés par un photon incident ont suffisamment d'énergie pour entrer en collision avec les atomes de la structure du semi-conducteur. Ces derniers sont alors ionisés, provoquant une émission secondaire de charges. Le nombre de paires électron/trou générées par l'arrivée du n ème photon est une variable aléatoire A_n , dont la moyenne μ_A est le gain de l'APD. La valeur du gain est contrôlée par la tension de polarisation inverse appliquée à la diode, elle varie dans une plage allant de 1 à 200 environ. Le rapport $F = E[A_n^2] / \mu_A^2 = 1 + \sigma_A^2 / \mu_A^2$ est appelé facteur d'excès de bruit (excess noise factor); il dépend du matériau constitutif de la diode, et est lié au gain par une formule expérimentale du type

$$F = k\mu_A + (2 - 1/\mu_A)(1 - k) \quad (21)$$

où k est un paramètre dépendant du matériau considéré.

Les v.a. A_n sont supposées i.i.d. La tension à la sortie de l'amplificateur devient

$$V_{out}(t) = ge \sum_n A_n h(t - S(n)) + V_{th}(t) \quad (22)$$

et le rapport signal/bruit d'un détecteur APD s'écrit, grâce à la propriété P8,

$$SNR_{APD} = \frac{\left((\eta P_s / h\nu) \int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds \right)^2}{F (\eta P_s / h\nu + \lambda_d) \int_{-\infty}^{\infty} h^2(s)ds + \sigma_{th}^2 / g^2 e^2 \mu_A^2}. \quad (23)$$

On constate que la variance du bruit thermique est divisée par le carré du gain, mais que la contribution du bruit de grenaille et d'obscurité augmente avec F , qui peut être de l'ordre de μ_A (si $k \approx 1$ dans (21)). Les bruits impulsifs sont donc prépondérants pour les diodes APD.

Pour comparer les SNRs des deux types de photorécepteurs, divisons (23) par (20). Désignant par

$$\xi = \frac{\sigma_{th}^2/g^2e^2}{(\eta P_s/h\nu + \lambda_d) \int_{-\infty}^{\infty} h^2(s)ds + \sigma_{th}^2/g^2e^2} \quad (24)$$

la fraction du dénominateur de (20) due au bruit thermique (i.e. la contribution relative du bruit thermique dans un photorécepteur sans gain interne, ce qui fait de $1 - \xi$ la contribution relative des bruits de grenaille et de courant d'obscurité dans ce même photorécepteur), on obtient

$$\frac{SNR_{APD}}{SNR_{PIN}} = \frac{1}{F(1 - \xi) + (1/\mu_A^2)\xi}. \quad (25)$$

On constate directement que si la contribution du bruit thermique est faible, le photodétecteur à avalanche est pire que le photodétecteur PIN. D'autre part, comme F augmente avec μ_A , il existe une valeur optimale du gain μ_A minimisant le dénominateur (cfr exercice 15). Au delà de cette valeur, le bruit impulsif est trop amplifié. Enfin, signalons que les diodes APD peuvent présenter un courant d'obscurité plus important aux grandes longueurs d'onde 1.3–1.6 μm , ce qui réduit voire annihile leur avantage sur le bruit.

4 Exercices

A moins que ce soit explicitement indiqué, les processus de Poisson considérés dans ces exercices sont définis pour $t \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que la loi de probabilité solution des équations de Kolmogorov (6) et (7) est la loi de Poisson à partir de la fonction génératrice de $N(t)$.
2. Etablir la propriété P2. Hint: commencer par écrire $R_N(t_1, t_2)$ sous la forme

$$R_N(t_1, t_2) = E[N(t_1)N(t_2)] = E[N(t_1)(N(t_1) + (N(t_2) - N(t_1)))]$$

si $t_1 \leq t_2$, et vice-versa si $t_2 \leq t_1$.

3. Démontrer que si $N_1(t)$ et $N_2(t)$ sont deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives λ_1 et λ_2 , alors le processus résultant de leur superposition, $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$, est un processus de Poisson de taux $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.
4. Etablir la propriété P5 de deux manières différentes:
 - (a) à partir de $\{N(t), t \in \mathbb{R}^+\}$, en utilisant (1);
 - (b) à partir de $\{T(n), n \in \mathbb{N}\}$, en utilisant (2) (et les fonctions caractéristiques).

5. On peut lier le processus de Poisson non seulement à la loi exponentielle mais aussi à la loi uniforme de la manière suivante.

Soit $N(t)$ la variable aléatoire comptant le nombre d'arrivées (poissonniennes) dans l'intervalle $[0, t]$. Supposons qu'il y ait exactement une arrivée dans cet intervalle. Quelle est alors la probabilité que cette arrivée ait eu lieu avant un temps t' déterminé ($0 < t' < t$) ?

6. Soit a une constante telle que $0 < a < 2$, et T une v.a. dont la moyenne est $E[T] = 1$.
 - (a) Calculer $E[T|T \geq a]$ si T est distribuée exponentiellement.
 - (b) Calculer $E[T|T \geq a]$ si T est distribuée uniformément dans l'intervalle $[0, 2]$. Comparer avec la réponse trouvée en a.
7. Soient T_1 et T_2 deux v.a. exponentielles indépendantes, de paramètres λ_1 et λ_2 . Quelle est la loi de probabilité de $T = \min\{T_1, T_2\}$?
8. Un professeur donne deux rendez-vous à ses étudiants à la même heure. Un des deux arrive à l'heure, l'autre arrive avec 5 minutes de retard. La durée de chaque rendez-vous est distribuée exponentiellement, avec une valeur moyenne de 30 minutes. Quelle est l'espérance du temps écoulé entre l'arrivée du premier étudiant et le départ du second ?
9. Cet exercice considère un réseau informatique à canal partagé entre plusieurs utilisateurs non coordonnés, qui émettent épisodiquement des paquets de données ("bursty traffic", faible charge).

Rappels sur CSMA/CD: Le protocole d'accès le plus simple consiste à laisser les utilisateurs transmettre leurs paquets de données quand ils le désirent. Evidemment, un nombre élevé de collisions seront provoquées par la transmission simultanée de plusieurs paquets (on parle de "contention"), auquel cas ceux-ci devront être retransmis plus tard, après un temps aléatoire. La performance d'un système ALOHA, même synchronisé ("Slotted ALOHA": les transmissions ne sont autorisées qu'à des instants déterminés multiples du temps de transmission), reste cependant très mauvaise.

Une première amélioration consiste à laisser les utilisateurs d'un système ALOHA synchronisé "écouter" le canal pour vérifier qu'il soit libre avant d'émettre le paquet: ce sont les protocoles d'*accès multiple à détection de porteuse* ("Carrier Sense Multiple Access protocols", CSMA). Tant que le canal est occupé, aucun utilisateur ne transmet, ce qui limite fortement le nombre de collisions. L'utilisateur qui était en attente d'émission émet dès que le canal se libère (*1-persistent CSMA*).

Une amélioration supplémentaire est la *détection de collision* ("CSMA with Collision Detection", CSMA/CD). Si deux stations sentent le canal libre à un certain temps, elles commencent à émettre simultanément, ce qui provoque une collision entre les deux paquets, qui sont perdus. Comme cette collision est immédiatement détectée, il n'est pas nécessaire de terminer l'émission des deux paquets, puisqu'ils sont perdus et devront être transmis plus tard. Ceci permet de gagner du temps et donc d'encore améliorer la performance du système.

Le standard IEEE 802.3 est un exemple de protocole 1-persistent CSMA/CD, et est le protocole utilisé par le réseau local *Ethernet*.

Exercice: Deux stations veulent envoyer un gros fichier sur un réseau de ce type, dans lequel les temps de propagation sont supposés négligeables, de sorte qu'une collision n'a jamais lieu, chaque station percevant quasi immédiatement si le canal est occupé ou non. La première station commence à émettre 1 seconde avant l'autre. La durée de transmission de chaque fichier est distribuée exponentiellement, avec une moyenne de 2 secondes. Quelle est l'espérance du temps qui s'écoule entre le moment où la première station commence à émettre et celui où la seconde a fini de transmettre ?

10. Soit $\{A_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ une suite de v.a. i.i.d, de moyennes μ_A et de variances σ_A^2 , et soit $N(t)$ un processus de Poisson homogène de taux $\lambda > 0$, indépendant des A_n . Le processus

$$\hat{N}(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} A_n \quad (26)$$

est appelé *processus de Poisson composé* ou *généralisé*. Remarquons que si $A_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $\hat{N}(t) = N(t)$, et on retrouve le processus de Poisson homogène.

- (a) Etablir que $E[\hat{N}(t)] = \mu_A \lambda t$.
- (b) Calculer $E[\hat{N}^2(t)]$.
- (c) Etablir que sa fonction d'auto-corrélation est

$$R_{\hat{N}}(t_1, t_2) = \lambda^2 \mu_A^2 t_1 t_2 + \lambda(\sigma_A^2 + \mu_A^2) \min(t_1, t_2).$$

(Même hint que pour l'exercice 2).

- 11. Etablir la propriété P8 (utiliser les résultats de l'exercice précédent (dont on peut montrer aisément la validité pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$).
- 12. Soit $\{N(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$, et soit $T > 0$. On forme le processus stochastique $X(t)$ défini par $X(t) = N(t+T) - N(t)$.
 - (a) Calculer la moyenne de $X(t)$.
 - (b) Calculer la fonction d'auto-corrélation de $X(t)$.
 - (c) Ce processus est-il stationnaire au sens large ?
 - (d) Quelle est la loi de probabilité de $X(t)$? En d'autres termes, que vaut $P(X(t) = n)$ pour toute valeur possible de n ?
 - (e) Ce processus est-il stationnaire au sens strict ?
 - (f) Ce processus est-il ergodique par rapport à sa moyenne ?
- 13. Lorsque la puissance P_s du signal optique est suffisamment grande, le courant d'obscurité et le bruit thermique peuvent être négligés dans un photodétecteur PIN. Si l'efficacité quantique $\eta = 1$, le rapport SNR (20) atteint alors une valeur maximale où le seul bruit

considéré est l'inévitable bruit de grenaille, dû aux effets quantiques: cette limite est appelée limite quantique du rapport SNR.

Si le photorécepteur est à illumination latérale, sa réponse impulsionnelle a une forme approximativement triangulaire:

$$h(t) = h_0 \left(1 - \frac{vt}{w_d} \right)$$

si $0 \leq t \leq w_d/v$ et $h(t) = 0$ sinon, où v est la vitesse des charges et w_d est la largeur de la zone de déplétion. Quelle est la limite quantique du rapport SNR dans ce cas ?

14. La limite quantique sur la probabilité d'erreur P_e est également une limite fondamentale, obtenue en l'absence de toute autre imperfection que le bruit quantique (de grenaille), pour un signal optique modulé en tout ou rien (i.e. le bit "0" correspond à l'absence de signal quantique, le bit "1" correspond à l'arrivée d'au moins un photon sur la durée T du bit.) En reprenant le formalisme du module 3, on appelle E_b l'énergie transmise par un bit "1" (vu qu'un bit "0" correspond à une absence d'énergie transmise), qui vaut donc ici $P_s T$. Le nombre moyen de photons reçus pendant une période T sera donc égal à $E_b/h\nu$. On suppose les probabilités d'apparition des deux bits "0" et "1" dans la séquence à transmettre égales.

Aucune erreur ne peut être commise si aucun signal n'est transmis pendant une période T , puisqu'aucun photon ne sera reçu. Par conséquent la seule cause d'erreur possible est de ne recevoir aucun photon pendant une durée T alors qu'un bit "1" était transmis. Quelle est cette probabilité d'erreur P_e (en fonction de l'énergie E_b et de la fréquence optique ν) ?

15. On considère un photodétecteur à avalanche pour lequel la contribution relative du bruit thermique sans gain interne (24) valeur optimale du gain μ_A que vous choisiriez si le paramètre k dans (21) est

- (a) $k = 1$?
- (b) $k = 0$?

16. Un processus de Poisson bi-dimensionnel est un processus ponctuel dans lequel des événements arrivent aléatoirement dans le plan $\mathbb{R}^2$ de telle sorte que (i) le nombre d'arrivées dans une région quelconque de surface a suit une loi de Poisson de paramètre λa , et (ii) les nombres d'événements se déroulant dans des régions disjointes (sans recouvrement) sont indépendants.

On considère un réseau radio dans lequel les noeuds ne peuvent transmettre des paquets d'information qu'à certains autres noeuds proches d'eux physiquement (pour des contraintes de puissance de transmission dans la couche radio).

On suppose que les noeuds du réseau sont distribués selon un processus de Poisson bi-dimensionnel sur $\mathbb{R}^2$, de taux λ . On suppose aussi qu'un noeud est isolé du réseau (pas de connectivité: il ne peut joindre aucun autre noeud) si sa distance au noeud le plus proche (selon la distance euclidienne habituellement utilisée) est supérieure à une valeur x déterminée par la puissance de transmission. Si X désigne cette distance, isolé si $X > x$.

- (a) Quelle est la probabilité qu'un noeud pris arbitrairement soit isolé du réseau (qui sera fonction de x et de λ) ?
- (b) Que vaut l'espérance de X ?