

Module 3: Processus stochastiques à temps continu: analyse au second ordre

1 Processus stochastiques à temps continu

Nous commençons ce module par une introduction générale aux processus stochastiques, avant de passer aux propriétés spécifiques au second ordre. Nous faisons l'exposé pour des processus à valeurs réelles, nous introduirons brièvement les adaptations purement techniques à apporter dans le cas de processus à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1.1 Processus stochastiques à valeurs réelles: définitions

Si une *variable aléatoire* $X(\zeta)$ est une fonction de l'espace des événements Ω vers $\mathbb{R}$, un *processus stochastique* $X(t, \zeta)$ est une fonction à la fois des résultats des événements ζ et du temps t . Selon que le temps t est continu ou discret, on parlera de processus stochastique continu ou discret. Dans ce module, nous abordons uniquement les processus à temps continu ($t \in \mathbb{R}$). En échantillonnant le processus $X(t, \zeta)$ aux temps $t_1, t_2, \dots, t_n$, on obtient n variables aléatoires $X_1 = X(t_1, \zeta), X_2 = X(t_2, \zeta), \dots, X_n = X(t_n, \zeta)$. Le processus stochastique est spécifié par la collection de toutes les fonctions de répartition jointes du n ème ordre obtenues pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, où $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et tous les instants $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$:

$$F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P(X(t_1) \leq x_1; \dots; X(t_n) \leq x_n).$$

La densité de probabilité jointe du n ème ordre est

$$f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$$

Dans ce module, on se contentera cependant en général d'une description partielle d'un processus stochastique par ses moments d'ordre 1 et 2, c'est-à-dire sa *moyenne*

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x; t) dx \quad (1)$$

et sa *fonction d'auto-corrélation*

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (2)$$

On suppose de manière générale que ces deux grandeurs sont finies pour tout t, t_1, t_2 . La seule exception sera celle d'un bruit blanc. La *fonction d'auto-covariance* est

$$C_X(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))] = R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2). \quad (3)$$

Lorsque $t_1 = t_2 = t$, $C_X(t, t) = \text{VAR}[X(t)]$ est la variance de $X(t)$ tandis que $R_X(t, t) = E[X^2(t)]$ est la puissance moyenne de $X(t)$. Le *coefficient d'autocorrélation* est

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{C_X(t_1, t_1)C_X(t_2, t_2)}}. \quad (4)$$

Dans le cas de processus stochastiques multiples, on peut encore définir la *cross-corrélation* et la *cross-covariance* respectivement par

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 y_2 f_{X(t_1)Y(t_2)}(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2 \quad (5)$$

et

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(Y(t_2) - \mu_Y(t_2))] = R_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2). \quad (6)$$

Les deux processus sont dits *orthogonaux* ssi $R_{XY}(t_1, t_2) = 0$ pour tout t_1, t_2 et *non corrélés* ssi $C_{XY}(t_1, t_2) = 0$ pour tout t_1, t_2 .

1.2 Quelques processus stochastiques particuliers

1.2.1 Sinusoïde à phase aléatoire

Soit $\Phi(\zeta)$ une variable aléatoire, et soit $X(t, \Phi(\zeta))$ le processus

$$X(t, \Phi(\zeta)) = a \sin(2\pi f_0 t + \Phi(\zeta)) \quad (7)$$

où a et f_0 sont deux constantes. Dans un premier cas, on suppose que Φ peut prendre une des deux valeurs 0 et π de manière équiprobable (Φ est donc une v.a. de Bernoulli de paramètre 1/2). Les deux trajectoires (réalisations) possibles du processus X sont donc

$$\begin{aligned} X(t, \Phi(\zeta) = 0) &= a \sin(2\pi f_0 t) \\ X(t, \Phi(\zeta) = \pi) &= a \sin(2\pi f_0 t + \pi) = -a \sin(2\pi f_0 t). \end{aligned}$$

Si on fige t à une valeur particulière $t = t_0$, $X(t_0, \Phi(\zeta))$ est une variable aléatoire de Bernoulli, prenant les valeurs $\pm \sin(2\pi f_0 t_0)$ avec la même probabilité. Si on fige ζ , et donc Φ , à une valeur particulière, mettons $\Phi(\zeta) = 0$, $X(t_0, 0)$ devient une fonction déterministe du temps, en l'occurrence $a \sin(2\pi f_0 t)$. La moyenne de ce processus est

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = a \sin(2\pi f_0 t)(1/2) + (-a \sin(2\pi f_0 t))(1/2) = 0$$

et sa fonction d'auto-corrélation est

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] &= E[X(t_1)X(t_2)|\Phi = 0](1/2) + E[X(t_1)X(t_2)|\Phi = \pi](1/2) \\ &= a^2 \sin(2\pi f_0 t_1) \sin(2\pi f_0 t_2)/2 + a^2 \sin(2\pi f_0 t_1) \sin(2\pi f_0 t_2)/2 \\ &= a^2 \sin(2\pi f_0 t_1) \sin(2\pi f_0 t_2) \\ &= \frac{a^2}{2} [\cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)) - \cos(2\pi f_0(t_1 + t_2))]. \end{aligned}$$

Dans un second cas, on suppose que Φ est une variable aléatoire uniformément distribuée entre 0 et 2π . Contrairement à l'exemple précédent, $X(t)$ est à présent une variable aléatoire continue. On calcule de manière similaire (exercice 1) que

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = 0$$

tandis que

$$R_X(t_1, t_2) = \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)). \quad (8)$$

1.2.2 Sinusoïdes en quadrature, à amplitudes aléatoires

Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes, de moyennes nulles et de même variances σ^2 , à partir desquelles on forme le processus

$$X(t) = A \cos(2\pi f_0 t) + B \sin(2\pi f_0 t), \quad (9)$$

où f_0 est une constante. On calcule alors que la moyenne de ce processus est

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[A] \cos(2\pi f_0 t) + E[B] \sin(2\pi f_0 t) = 0$$

et que sa fonction d'auto-corrélation est (exercice 1)

$$R_X(t_1, t_2) = \sigma^2 \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)). \quad (10)$$

On constate que si $\sigma^2 = a^2/2$, les deux processus (7) et (9) sont caractérisés par des moments d'ordre 1 et 2 identiques. En général, les deux processus sont cependant différents.

1.2.3 Processus gaussien

$X(t)$ est un processus gaussien si les v.a. $X_1 = X(t_1), X_2 = X(t_2), \dots, X_n = X(t_n)$ sont des v.a. gaussiennes jointes pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tous les temps $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Il est donc entièrement spécifié par sa moyenne et sa fonction de covariance. Pour rappel, sa densité jointe de probabilité s'écrit

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\det \Gamma_X|}} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu_X)^T \Gamma_X^{-1} (\mathbf{x} - \mu_X)} \quad (11)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [X(t_1) \dots X(t_n)]^T \\ \mathbf{x} &= [x_1 \dots x_n]^T \\ \mu_X &= [E[X(t_1)] \dots E[X(t_n)]]^T \\ \Gamma_X &= \begin{bmatrix} C_X(t_1, t_1) & C_X(t_1, t_2) & \dots & C_X(t_1, t_n) \\ C_X(t_2, t_1) & C_X(t_2, t_2) & \dots & C_X(t_2, t_n) \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ C_X(t_n, t_1) & C_X(t_n, t_2) & \dots & C_X(t_n, t_n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comme $X_1 = X(t_1), X_2 = X(t_2), \dots, X_n = X(t_n)$ sont des v.a. gaussiennes multivariées pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tous les temps $t_1, \dots, t_n$, les processus gaussiens jouissent de nombreuses propriétés très utiles en pratique. En particulier, ils sont entièrement déterminés par leurs moments d'ordre 1 et 2, et donc l'analyse au second ordre est suffisante pour les caractériser complètement. De plus, en étendant la propriété d'une somme de v.a. gaussiennes jointes d'être encore une v.a. gaussienne aux intégrales, on a que si $X(t)$ est un processus gaussien, alors le processus $Y(t) = \int X(t)dt$ est encore un processus gaussien.

1.2.4 Processus Markovien

Un processus $X(t)$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, pour toute suite d'instants $t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} \in \mathbb{R}$ et toutes suite de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$

$$P(X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} | X(t_k) = x_k, \dots, X(t_1) = x_1) = P(X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} | X(t_k) = x_k) \quad (12)$$

est un processus de Markov. Nous reviendrons sur ces processus dans les modules ultérieurs.

1.2.5 Processus à accroissements indépendants

Un processus $X(t)$ est à accroissements indépendants si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ et pour toute suite d'instants $t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k$, les variables aléatoires $(X(t_k) - X(t_{k-1})), (X(t_{k-1}) - X(t_{k-2})), \dots, (X(t_2) - X(t_1))$ sont indépendantes. Deux exemples importants de processus à accroissements indépendants sont les processus de Wiener et de Poisson.

1.2.6 Processus de Wiener

Nous étudierons ce processus à la fin du cours. $X(t)$ est un processus de Wiener (ou encore mouvement Brownien) s'il est à accroissements indépendants, et si pour tout $t_1 < t_2$, la v.a. $(X(t_2) - X(t_1))$ suit une loi gaussienne $N(0, t_2 - t_1)$. On verra que sa moyenne vaut

$$\mu_X(t) = 0$$

et sa fonction d'auto-corrélation

$$R_X(t_1, t_2) = \min\{t_1, t_2\}. \quad (13)$$

Le processus de Wiener est un processus gaussien.

1.2.7 Processus de Poisson

Nous étudierons ce processus au module 5. Pour l'instant nous nous contentons d'en donner la définition suivante: $X(t)$ est un processus de Poisson (homogène) de paramètre $\lambda > 0$ s'il est à accroissements indépendants, et si le nombre d'événements dans un intervalle quelconque $[t_1, t_2]$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t_2 - t_1)$:

$$P(X(t_2) - X(t_1) = n) = \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^n}{n!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}.$$

On calculera que sa moyenne vaut

$$\mu_X(t) = \lambda t$$

et sa fonction d'auto-corrélation

$$R_X(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min\{t_1, t_2\}. \quad (14)$$

1.2.8 Martingale

Un processus $X(t)$ est une martingale si pour tout t_1, t_2 avec $t_1 < t_2$

$$E[X(t_2)|X(s), s \leq t_1] = X(t_1). \quad (15)$$

Nous verrons que le processus de Wiener est une martingale.

1.2.9 Modulation d'amplitude de pulse (PAM ou Pulse Amplitude Modulation)

Un des signaux les plus importants en communications numériques est la suite de “pulses” $\{g(t - kT), k \in \mathbb{Z}\}$, modulée en amplitude par la suite de variables aléatoires $\{A_k, k \in \mathbb{Z}\}$ de manière à former le processus

$$X_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT). \quad (16)$$

On suppose que¹

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt &< \infty \\ \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt &< \infty \\ E[A_k] &= \mu_A \\ E[A_k A_l] &= R_A(k - l) \end{aligned}$$

La moyenne de ce processus vaut alors

$$\mu_{X_c}(t) = \mu_A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT). \quad (17)$$

¹Les deux premières conditions permettent de garder les moments du signal fini, les deux dernières signifient en fait que la suite des v.a. A_k est stationnaire au sens large. Dans les calculs qui suivent, les opérations d'espérance, d'intégration sur $\mathbb{R}$, de sommation sur $\mathbb{Z}$ peuvent être formellement interchangées (théorème de Fubini) si on suppose en plus que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |R_A(n)| < \infty$, ce qui imposerait de prendre $\mu_A = 0$, ou de centrer tous les A_k (i.e., de considérer les v.a. $A'_k = A_k - \mu_A$).

D'autre part, on considérera également un décalage D de l'instant de départ du premier pulse après l'origine des temps $t = 0$ (le pulse $k = 0$), qui est uniformément distribué entre 0 et T et indépendant des A_k , de sorte que le processus PAM devient

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT - D). \quad (18)$$

La moyenne de ce processus est

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= \mu_A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E[g(t - kT - D)] = \frac{\mu_A}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^T g(t - kT - s) ds \\ &= \frac{\mu_A}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{t-(k+1)T}^{t-kT} g(s') ds' = \frac{\mu_A}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s') ds' \end{aligned} \quad (19)$$

tandis que sa fonction d'auto-corrélation est

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t_1 - kT - D) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} A_l g(t_2 - lT - D) \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} E[A_k A_l] E[g(t_1 - kT - D) g(t_2 - lT - D)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} R_A(k - l) \frac{1}{T} \int_0^T g(t_1 - kT - s) g(t_2 - lT - s) ds \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} R_A(k - l) \int_{t_1-(k+1)T}^{t_1-kT} g(s') g(t_2 - t_1 + (k - l)T + s') ds' \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_A(n) \int_{t_1-(k+1)T}^{t_1-kT} g(s') g((t_2 - t_1) + nT + s') ds' \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_A(n) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{t_1-(k+1)T}^{t_1-kT} g(s') g((t_2 - t_1) + nT + s') ds' \right] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_A(n) \int_{-\infty}^{+\infty} g(s') g((t_2 - t_1) + nT + s') ds'. \end{aligned} \quad (20)$$

La forme de pulse la plus répandue est le pulse rectangulaire d'amplitude a et de longueur T

$$g(t) = a \cdot 1_{[0,T]}(t) = \begin{cases} a & \text{if } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (21)$$

Le processus PAM $X(t)$ est alors appelé *séquence binaire aléatoire*. Dans ce cas, (19) devient

$$\mu_X(t) = \frac{\mu_A}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot 1_{[0,T]}(s') ds' = \frac{a\mu_A}{T} \int_0^T ds' = a\mu_A. \quad (22)$$

Si nous supposons de plus que les variables aléatoires A_k sont indépendantes, alors

$$\begin{aligned} R_A(0) &= E[A_k^2] = \sigma_A^2 + \mu_A^2 \\ R_A(n) &= E[A_k A_{k-n}] = E[A_k]E[A_{k-n}] = \mu_A^2 \end{aligned}$$

et (20) devient

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \frac{a^2}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_A(n) \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[0,T]}(s') 1_{[0,T]}((t_2 - t_1) + nT + s') ds' \\ &= \frac{a^2}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_A(n) \int_0^T 1_{[0,T]}((t_2 - t_1) + nT + s') ds' \\ &= \frac{a^2}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_A(n) \int_{(t_2-t_1)+nT}^{(t_2-t_1)+(n+1)T} 1_{[0,T]}(s'') ds'' \\ &= \frac{a^2}{T} \left[R_A(0) \int_{(t_2-t_1)}^{(t_2-t_1)+T} 1_{[0,T]}(s'') ds'' + \sum_{n \neq 0} R_A(n) \int_{(t_2-t_1)+nT}^{(t_2-t_1)+(n+1)T} 1_{[0,T]}(s'') ds'' \right] \\ &= \frac{a^2}{T} \left[(\mu_A^2 + \sigma_A^2) \int_{(t_2-t_1)}^{(t_2-t_1)+T} 1_{[0,T]}(s'') ds'' + \sum_{n \neq 0} \mu_A^2 \int_{(t_2-t_1)+nT}^{(t_2-t_1)+(n+1)T} 1_{[0,T]}(s'') ds'' \right] \\ &= \frac{a^2}{T} \left[\sigma_A^2 \int_{(t_2-t_1)}^{(t_2-t_1)+T} 1_{[0,T]}(s'') ds'' + \mu_A^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{(t_2-t_1)+nT}^{(t_2-t_1)+(n+1)T} 1_{[0,T]}(s'') ds'' \right] \\ &= \frac{a^2}{T} \left[\sigma_A^2 \int_{(t_2-t_1)}^{(t_2-t_1)+T} 1_{[0,T]}(s'') ds'' + \mu_A^2 \int_{-\infty}^{\infty} 1_{[0,T]}(s'') ds'' \right] \\ &= \frac{a^2}{T} \left[\sigma_A^2 \int_{(t_2-t_1)}^{(t_2-t_1)+T} 1_{[0,T]}(s'') ds'' + \mu_A^2 T \right]. \end{aligned}$$

Notant que

$$\int_{(t_2-t_1)}^{(t_2-t_1)+T} 1_{[0,T]}(s'') ds'' = \begin{cases} T - |t_1 - t_2| & \text{si } |t_1 - t_2| < T \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on trouve finalement

$$R_X(t_1, t_2) = \begin{cases} a^2 \sigma_A^2 \left(1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T}\right) + a^2 \mu_A^2 & \text{si } |t_1 - t_2| < T \\ a^2 \mu_A^2 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (23)$$

La fonction d'auto-covariance de X est

$$C_X(t_1, t_2) = \begin{cases} a^2 \sigma_A^2 \left(1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T}\right) & \text{si } |t_1 - t_2| < T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On verra à l'exercice 2 comment retrouver directement (et plus simplement) ce résultat sans passer par (20) mais en conditionnant $X(t_1)X(t_2)$ sur la valeur de D et en utilisant le théorème des probabilités totales.

1.3 Stationnarité

1.3.1 Stationnarité au sens strict et au sens large

Un processus stochastique $X(t)$ est *stationnaire*, ou plus précisément *stationnaire au sens strict* (SSS), ssi toutes ses propriétés statistiques sont indépendantes de l'origine des temps. En d'autres termes, quels que soient $n \in \mathbb{N}_0$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$,

$$F_{X(t_1)\dots X(t_n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F_{X(t_1+c)\dots X(t_n+c)}(x_1, \dots, x_n; t_1 + c, \dots, t_n + c). \quad (24)$$

Notons en particulier que pour $n = 1$ cette définition implique que pour tout $t, c \in \mathbb{R}$, $F_{X(t)}(x, t) = F_{X(t+c)}(x, t+c)$, et donc que la fonction de répartition du premier ordre ne dépend pas du temps: $F_{X(t)}(x, t) = F_{X(t)}(x)$. Un processus stochastique $X(t)$ est *stationnaire au sens large* (WSS pour "wide sense stationary"), ou encore stationnaire du second ordre, ssi sa moyenne ne dépend pas du temps t et sa fonction d'auto-corrélation (ou de covariance) ne dépend que de la différence entre les deux instants auxquels elle est évaluée:

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= \mu_X \\ R_X(t_1, t_2) &= R_X(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

La stationnarité au sens strict implique toujours celle au sens large, mais l'inverse n'est pas toujours vrai. Un cas particulier où les deux types de stationnarité sont équivalents est celui d'un processus gaussien. La fonction d'auto-corrélation d'un processus stationnaire au sens large possède les propriétés suivantes:

P1. Si X est réel, elle est paire:

$$R_X(\tau) = R_X(-\tau).$$

Cette propriété est une conséquence directe de la définition de stationnarité au sens large.

P2. Son module est toujours inférieur à la puissance moyenne:

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0) = E[X^2(t)].$$

Cette propriété est une conséquence directe du fait que la valeur absolue du coefficient de corrélation est toujours inférieur à 1, comme démontré aux exercices du module 2.

1.3.2 Exemples

Il est aisé en général de vérifier la stationnarité au sens large d'un processus, il est par contre beaucoup plus difficile de déterminer s'il est aussi stationnaire au sens strict.

- **Processus gaussien.** Un processus gaussien étant toujours entièrement déterminé par ses moments du premier et du second ordre, les stationnarités au sens large et au sens strict sont équivalentes pour ce type de processus.

- **Processus à accroissements stationnaires, processus de Poisson et de Wiener.** On remarque directement à partir de (13) et (14) que les processus de Poisson homogène et de Wiener ne sont pas stationnaires au sens large, ni donc au sens strict. Par contre, leurs accroissements sont stationnaires: pour tout $t, \tau \geq 0$, la distribution de $(X(t + \tau) - X(t))$ ne dépend pas de t . Ces processus sont des processus à *accroissements stationnaires*.
- **Train de pulses modulés en amplitude.** La moyenne (17) dépendant en général du temps t , le processus (16) n'est pas stationnaire au sens large. Néanmoins, en introduisant un décalage aléatoire uniformément distribué entre 0 et T , on constate à partir de (19) et (20) que le processus (18) est stationnaire au sens large (pour autant que A_k soit tel que $E[A_k] = \mu_A$ et $E[A_k A_k + n] = R_A(n)$ (on verra au module suivant que ceci définit la WSS de la suite de v.a. A_k)). En fait le processus (16) possède une forme plus faible de stationnarité que la stationnarité au sens large, appelée *cyclo-stationnarité*. Un processus $X(t)$ est *cyclo-stationnaire* de période T ssi le processus $X'(t) = X(t - D)$ où D est une v.a. uniformément distribuée entre 0 et T et indépendante de $X(t)$ est WSS.
- **Sinusoïde à phase aléatoire.** Analysons maintenant la stationnarité de la sinusoïde à phase aléatoire (7). Lorsque Φ est une v.a. de Bernoulli, le processus n'est pas WSS (et donc pas SSS). Par contre, lorsque Φ est uniformément distribuée dans $[0, 2\pi]$, le processus est WSS. Nous allons voir que le processus est même SSS. Pour établir ceci, il faut montrer que pour tout entier $n \geq 1$, pour toute suite de temps $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ et pour tout c , (24) est vérifiée, ou de façon équivalente que

$$\Phi_{X(t_1) \dots X(t_n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \Phi_{X(t_1+c) \dots X(t_n+c)}(\omega_1, \dots, \omega_n). \quad (25)$$

Nous allons de fait passer par l'outil commode que sont les fonctions caractéristiques, et établir (25). En effet, en faisant le changement de variable $\psi = \varphi - 2\pi f_0 c$ et en remarquant que $\exp[j \sum_{k=1}^n \omega_k \sin(2\pi f(t_k + c) + \psi)]$ est une fonction périodique de ψ de période 2π ,

on calcule que

$$\begin{aligned}
\Phi_{X(t_1)\dots X(t_n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) &= E \left[\exp \left[j \sum_{k=1}^n \omega_k X(t_k) \right] \right] \\
&= E \left[\exp \left[j \sum_{k=1}^n \omega_k \sin(2\pi f_0 t_k + \Phi) \right] \right] \\
&= (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \exp \left[j \sum_{k=1}^n \omega_k \sin(2\pi f_0 t_k + \varphi) \right] d\varphi \\
&= (1/2\pi) \int_{-2\pi f_0 c}^{2\pi - 2\pi f_0 c} \exp \left[j \sum_{k=1}^n \omega_k \sin(2\pi f_0 (t_k + c) + \psi) \right] d\psi \\
&= (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \exp \left[j \sum_{k=1}^n \omega_k \sin(2\pi f_0 (t_k + c) + \psi) \right] d\psi \\
&= E \left[\exp \left[j \sum_{k=1}^n \omega_k X(t_k + c) \right] \right] \\
&= \Phi_{X(t_1+c)\dots X(t_n+c)}(\omega_1, \dots, \omega_n)
\end{aligned}$$

ce qui montre que $X(t)$ est SSS.

- **Sinusoïdes en quadrature, à amplitudes aléatoires.** La moyenne du processus (9) étant nulle et sa fonction d'auto-corrélation (10) ne dépendant que de $t_1 - t_2$, ce processus est WSS. A moins que A et B soient deux v.a. normales (cfr exercice 4), le processus n'est toutefois pas SSS. En effet, prenons l'exemple où A est une v.a. dont le domaine est $[-1, 1]$ et B une v.a. normale. Alors, si $x \geq 1$,

$$F_{X(0)}(x; 0) = P(A \leq x) = 1 > 1 - Q(x) = P(B \leq x) = F_{X(1/4f_0)}(x; 1/4f_0).$$

1.3.3 Processus conjointement stationnaires

Deux processus réels $X(t)$ et $Y(t)$ sont conjointement stationnaires au sens large s'ils sont stationnaires au sens large et si leur fonction de cross-corrélation ne dépend que de la différence entre les deux instants auxquels elle est évaluée:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2).$$

La fonction de cross-corrélation de ces deux processus a les propriétés suivantes:

P3. Si X et Y sont réels,

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau).$$

P4. Son module est toujours inférieur aux deux bornes suivantes:

$$\begin{aligned}
|R_{XY}(\tau)| &\leq \sqrt{R_X(0)R_Y(0)} \\
|R_{XY}(\tau)| &\leq (R_X(0) + R_Y(0))/2.
\end{aligned}$$

La démonstration de ces propriétés est laissée à titre d'exercice.

1.4 Ergodisme

1.4.1 Ergodisme par rapport à la moyenne

Soit $X(t)$ un processus stationnaire au sens large. La moyenne *d'ensemble* de ce processus

$$\mu_X = E[X(t)]$$

peut être estimée par la moyenne *temporelle* d'une de ces réalisations $x(t)$

$$\langle x(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

Au lieu d'une réalisation particulière, si on considère l'ensemble des réalisations possibles, on peut définir la variable aléatoire

$$\langle X(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$$

qui est un estimateur de la moyenne μ_X . La qualité de cet estimateur dépend du fait que

$$\begin{aligned} E[\langle X(t) \rangle_T] &\rightarrow \mu_X \\ \text{VAR}[\langle X(t) \rangle_T] &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

quand $T \rightarrow \infty$. Si ces conditions sont vérifiées (notons que $\langle X(t) \rangle_T$ converge alors en moyenne quadratique vers μ_X), le processus est *ergodique par rapport à sa moyenne*. La première des conditions l'est toujours, cet estimateur étant non biaisé:

$$E[\langle X(t) \rangle_T] = \frac{1}{T} \int_0^T E[X(t)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mu_X dt = \mu_X.$$

Pour que $\langle X(t) \rangle_T \rightarrow \mu_X$ quand $T \rightarrow \infty$ au sens des moindres carrés, il faut encore que

$$\text{VAR}[\langle X(t) \rangle_T] = E[(\langle X(t) \rangle_T - \mu_X)^2] \rightarrow 0$$

quand $T \rightarrow \infty$. Comme

$$\begin{aligned}
VAR[\langle X(t) \rangle_T] &= E[(\langle X(t) \rangle_T - \mu_X)^2] \\
&= E[(\frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt - \mu_X)(\frac{1}{T} \int_0^T X(s) ds - \mu_X)] \\
&= E[(\frac{1}{T} \int_0^T (X(t) - \mu_X) dt)(\frac{1}{T} \int_0^T (X(s) - \mu_X) ds)] \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E[(X(t) - \mu_X)(X(s) - \mu_X)] dt ds \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T C_X(t-s) dt ds \\
&= \frac{1}{T^2} \int_{-T}^T C_X(\tau)(T - |\tau|) d\tau \\
&= \frac{2}{T} \int_0^T C_X(\tau)(1 - \frac{\tau}{T}) d\tau
\end{aligned}$$

on a établi la condition nécessaire et suffisante d'ergodisme de $X(t)$ par rapport à sa moyenne:

Théorème 1 *Un processus WSS $X(t)$ est ergodique par rapport à sa moyenne si et seulement si*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T C_X(\tau)(1 - \frac{\tau}{T}) d\tau = 0. \quad (26)$$

Une condition suffisante d'ergodisme est la suivante.

Corollaire 1 *Un processus WSS $X(t)$ est ergodique par rapport à sa moyenne si*

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} C_X(\tau) = 0. \quad (27)$$

En effet, soit $\varepsilon > 0$ un réel positif quelconque. Alors (27) entraîne qu'il existe $T_0 > 0$ tel que $|C_X(\tau)| < \varepsilon$ pour tout $\tau > T_0$. Dès lors si $T \geq T_0$

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^T C_X(\tau)(1 - \frac{\tau}{T}) d\tau \right| &\leq \int_0^T |C_X(\tau)|(1 - \frac{\tau}{T}) d\tau \\
&\leq \int_0^T |C_X(\tau)| d\tau = \int_0^{T_0} |C_X(\tau)| d\tau + \int_{T_0}^T |C_X(\tau)| d\tau \\
&\leq \int_0^{T_0} C_X(0) d\tau + \int_{T_0}^T \varepsilon d\tau = C_X(0)T_0 + \varepsilon(T - T_0)
\end{aligned}$$

dont on tire que pour $T \geq T_0$

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T C_X(\tau)(1 - \frac{\tau}{T}) d\tau \right| \leq C_X(0) \frac{T_0}{T} + \varepsilon \left(1 - \frac{T_0}{T}\right).$$

Lorsque $T \rightarrow \infty$, le membre de droite tend vers ε , et comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la condition (26) est vérifiée.

1.4.2 Autres formes d'ergodisme

De manière similaire, un processus $X(t)$ stationnaire est *ergodique par rapport à sa variance* si

$$\begin{aligned} E[< X^2(t) >_T - \mu_X^2] &\rightarrow \sigma_X^2 \\ VAR[< X^2(t) >_T - \mu_X^2] &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

et *ergodique par rapport à sa fonction d'auto-corrélation* si

$$\begin{aligned} E[< X(t+\tau)X(t) >_T] &\rightarrow R_X(\tau) \\ VAR[< X(t+\tau)X(t) >_T] &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

où

$$< X(t+\tau)X(t) >_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t+\tau)X(t)dt$$

est un estimateur de la fonction d'auto-corrélation. En posant $Z(t, \tau) = X(t+\tau)X(t)$, on se ramène à l'étude faite ci-dessus. Une forme plus forte d'ergodisme est l'ergodisme en distribution: un processus SSS est *ergodique par rapport à sa fonction de répartition* si les moyennes temporelles des fonctions des estimées de ses fonctions de répartition convergent en moyenne quadratique vers les fonctions de répartition.

1.4.3 Exemples

Le théorème 1 et le corollaire 1 permettent de vérifier facilement si un processus WSS est ergodique par rapport à sa moyenne.

- **Sinusoïde à phase aléatoire.** En appliquant le théorème 1, on vérifie que (7), avec Φ uniforme, est un processus ergodique par rapport à sa moyenne si $f_0 \neq 0$. De fait, quelle que soit la valeur φ_0 que prend la variable aléatoire Φ , $X(t, \varphi_0) = a \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ sera toujours une sinusoïde centrée en zéro. Donc sa moyenne temporelle évaluée sur l'entière de la trajectoire sera toujours nulle. On peut de même vérifier que ce processus est ergodique par rapport à sa variance (exercice 5). Par contre, si $f_0 = 0$, (26) n'est plus vérifiée, et par conséquent le processus n'est plus ergodique par rapport à sa moyenne. De fait, pour une valeur de Φ fixée à un φ_0 particulier, $X(t, \varphi_0) = a \sin(\varphi_0)$ est maintenant une constante par rapport au temps t . Par conséquent, sa moyenne temporelle sera toujours confondue avec sa valeur $a \sin(\varphi_0)$, et ne coïncidera plus avec la vraie moyenne d'ensemble qui est nulle.

- **Sinusoïde à phase et amplitude aléatoires.** Considérons maintenant le processus

$$X(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \Phi) \quad (28)$$

où Φ est une v.a. uniforme sur $[0, 2\pi]$ et A est une v.a. de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$, prenant les valeurs a_1 ou a_2 , et indépendante de Φ . On vérifie à nouveau grâce à (26) que ce processus est ergodique par rapport à sa moyenne. Par contre, il n'est pas ergodique par rapport à sa variance, puisque certaines réalisations du processus auront une amplitude a_1 et d'autres a_2 .

- **Séquence binaire aléatoire.** La condition (27) permet d'établir directement son ergodisme par rapport à sa moyenne.

1.5 Densité spectrale de puissance d'un processus continu

1.5.1 Définition et propriétés

Soit $X(t)$ un processus continu stationnaire au sens large. Sa *densité spectrale de puissance* $S_X(f)$ est la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation:

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (29)$$

Celle-ci est bien définie si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_X(\tau)| d\tau < \infty. \quad (30)$$

En fait, si la moyenne du processus n'est pas identiquement nulle, cette condition n'est pas satisfaite, car $|R_X(\tau)| = |C_X(\tau)| + \mu_X^2$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$. On peut alors soit utiliser les impulsions de Dirac, et écrire

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \mu_X^2 \delta(f)$$

ou, de préférence, travailler avec le processus centré $X'(t) = X(t) - \mu_X$, pour lequel $R_{X'}(\tau) = C_{X'}(\tau)$. On verra cependant à la fin du cours que certains processus WSS de moyennes nulles ne vérifient tout de même pas (30): ce sont les processus à dépendances à long terme. La fonction d'auto-corrélation peut être obtenue par la transformée inverse

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df. \quad (31)$$

Ces relations sont connues sous le nom de relations de Wiener-Kintchine. En particulier, la puissance moyenne de $X(t)$ est

$$E[X^2(t)] = R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df. \quad (32)$$

Si X est réel, sa densité spectrale de puissance possède les propriétés suivantes:

P1. Comme $R_X(\tau)$ est une fonction paire, sa transformée de Fourier est réelle et est une fonction paire de f .

P2. De plus, on peut montrer qu'elle est une fonction non négative: $S_X(f) \geq 0$ pour toute fréquence f .

P3. La fonction $h(f) = S_X(f)/R_X(0)$ est une densité de probabilité. En effet, par la propriété P2, elle est non négative, et (32) entraîne que $\int_{-\infty}^{+\infty} h(f) df = 1$.

La *densité spectrale mutuelle de puissance* (en anglais: "cross-power spectral density") de deux processus X et Y est la transformée de Fourier de leur fonction de cross-corrélation:

$$S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (33)$$

En général, la densité spectrale mutuelle de puissance est une fonction complexe de f .

1.5.2 Exemples de densités spectrales

Donnons à présent quelques exemples de densités spectrales de puissance.

- **Sinusoïde à phase aléatoire.** La densité spectrale du processus (7), avec Φ uniforme, est

$$S_X(f) = \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{a^2}{4} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)). \quad (34)$$

- **Bruit blanc.** Un processus extrêmement important dans les systèmes de communication est le bruit blanc. Le *bruit blanc* $N(t)$ est un processus stochastique WSS dont la densité spectrale de puissance est une constante $N_0/2$ pour toutes les fréquences (d'où son nom, par analogie avec la lumière blanche):

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2}, \quad (35)$$

ce qui entraîne que sa fonction d'auto-corrélation est

$$R_N(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \quad (36)$$

Notons que cette définition entraîne que $R_N(0) = \infty$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse initiale que $R_N(0) < \infty$ et rend ce processus irréalisable en pratique. En fait, une définition mathématiquement rigoureuse du bruit blanc est basée sur le processus de Wiener. Le bruit blanc est un modèle idéalisé de bruit avec lequel il est particulièrement facile de travailler. Par exemple, le bruit thermique dans les résistances électriques peut être assimilé à un bruit blanc sur une large gamme de fréquences. On ajoute souvent l'hypothèse que la distribution de $N(t)$ suit une loi gaussienne, on parle alors de *bruit blanc gaussien*. La moyenne par défaut d'un bruit blanc est nulle.

- **Bruit blanc à bande étroite.** Un bruit blanc à bande limitée (ou étroite) $N(t)$ est un processus stochastique dont la densité spectrale de puissance est une constante valant $N_0/2$ seulement pour une bande de fréquences de largeur $2B$, centrée autour de la fréquence f_0 (spectre passe-bande) :

$$S_N(f) = \begin{cases} N_0/2 & \text{si } f_0 - B < |f| < f_0 + B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (37)$$

La fonction d'auto-corrélation de ce bruit blanc à bande étroite est

$$R_N(\tau) = 2N_0B \cos(2\pi f_0\tau) \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau} = 2N_0B \cos(2\pi f_0\tau) \text{sinc}(2B\tau). \quad (38)$$

- **Train de pulses modulés en amplitude.** En prenant la transformée de Fourier de (20), on trouve

$$\begin{aligned}
S_X(f) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi j f \tau} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_A(n) \int_{-\infty}^{+\infty} g(s') g(\tau + nT + s') ds' \right] d\tau \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_A(n) e^{2\pi j f n T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi j f s'} g(s') e^{-2\pi j f (\tau + nT + s')} g(\tau + nT + s') ds' d\tau \\
&= \frac{1}{T} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_A(n) e^{2\pi j f n T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi j f s'} g(s') ds' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi j f t} g(t) dt \right] \\
&= \frac{1}{T} G(f) G(-f) \hat{S}_A(e^{-2\pi j f T})
\end{aligned} \tag{39}$$

où $G(f)$ est la transformée de Fourier du pulse $g(t)$:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

et $\hat{S}_A(e^{-2\pi j f T})$ est la transformée de Fourier discrète de la suite de v.a. A_k , évaluée en fT :

$$\hat{S}_A(e^{-2\pi j f T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_A(n) e^{-2\pi j f n T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_A(n) e^{2\pi j f n T} = \hat{S}_A(e^{2\pi j f T}).$$

Cette dernière expression est en fait la densité spectrale des v.a. A_k , comme nous le verrons au module suivant. Pour le pulse rectangulaire (21), $G(f) = a(e^{-2\pi j f T} - 1)$ et dans le cas où les A_k sont indépendants, $\hat{S}_A(e^{-2\pi j f T}) = \sigma_A^2 + \mu_A^2 \delta(f)$, d'où on tire que

$$S_X(f) = a^2 (T \sigma_A^2 \text{sinc}^2(fT) + \mu_A^2 \delta(f)),$$

ce qui est de fait la transformée de Fourier de (23).

1.6 Réponse de système linéaire à des signaux aléatoires

1.6.1 Analyse harmonique

Un système transformant un signal d'entrée $x(t)$ en un signal de sortie $y(t) = T(x(t))$ est *linéaire* si $T[ax_1(t) + bx_2(t)] = aT(x_1(t)) + bT(x_2(t))$. Il est *invariant dans le temps* si $y(t - \tau) = T(x(t - \tau))$. La fonction de transfert d'un système linéaire et invariant dans le temps (LTI) est la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle, c'est-à-dire

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Cette transformée existe toujours si $h(t)$ est absolument intégrable:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty. \quad (40)$$

Si l'entrée du système $X(t)$ est un processus stationnaire au sens large, la sortie du système $Y(t)$ est un processus stochastique donné par le produit de convolution

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)X(t-s)ds.$$

Sa moyenne vaut (la condition (40) permet en fait d'interchanger les opérations d'espérance et d'intégration)

$$E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)X(t-s)ds\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)E[X(t-s)]ds = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\mu_X ds = H(0)\mu_X \quad (41)$$

et est donc indépendante du temps. Sa fonction d'auto-corrélation étant

$$\begin{aligned} E[Y(t)Y(t-\tau)] &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)X(t-s)ds \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)X(t-\tau-r)dr\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)E[X(t-s)X(t-\tau-r)]dsdr \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)R_X(\tau-s+r)dsdr, \end{aligned}$$

le processus $Y(t)$ est stationnaire au sens large. On peut donc calculer sa densité spectrale de puissance:

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)R_X(\tau-s+r)e^{-j2\pi f\tau}d\tau dsdr \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)R_X(u)e^{-j2\pi f(u+s-r)}dudsd r \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)e^{-j2\pi fs}ds \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)e^{j2\pi fr}dr \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(u)e^{-j2\pi fu}du \\ &= H(f)H^*(f)S_X(f) \end{aligned}$$

où l'astérisque $\star$ désigne le complexe conjugué. Par conséquent on a établi le résultat suivant.

Théorème 2 *La densité spectrale de la réponse $Y(t)$ d'un système linéaire et invariant dans le temps dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ est absolument intégrable et dont la transmittance est $H(f)$, à un processus $X(t)$ WSS de densité spectrale $S_X(f)$ est*

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f). \quad (42)$$

On peut également calculer les densités spectrales mutuelles $S_{XY}(f)$ et $S_{YX}(f)$. On trouve

$$S_{YX}(f) = H(f)S_X(f) \quad (43)$$

$$S_{XY}(f) = H^*(f)S_X(f). \quad (44)$$

1.6.2 Exemples

Certaines des densités spectrales des exemples de la section 1.5.2 peuvent en fait être facilement calculées en utilisant le théorème 2.

- **Bruit blanc à bande étroite.** On constate directement que la densité spectrale (37) est obtenue en filtrant un bruit blanc par un filtre passe-bande idéal de largeur de bande $2B$, centré à la fréquence f_0 , dont la transmittance est

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_0 - B < |f| < f_0 + B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Train de pulses modulés en amplitude.** On peut également voir un train de pulses modulés en amplitude $X(t)$ comme un train d'impulsions de Dirac

$$A^d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \delta(t - kT - D), \quad (45)$$

dont la densité spectrale de puissance est

$$S_{A^d}(f) = \frac{1}{T} \hat{S}_A(e^{-2\pi j f T}),$$

qui est “mis en forme” par un filtre de transmittance $G(f)$ avant d’être transmis sur un canal. Si celui-ci est linéaire, il peut être modélisé par une transmittance $H(f)$, qui n’est pas constante pour un canal dispersif. La forme des pulses à la sortie du canal est donc modifiée, et un pulse influencera ceux qui le suivent, créant de *l’interférence intersymbole*. La densité spectrale du processus à la sortie du canal sera

$$S_Y(f) = \frac{1}{T} |H^2(f)| |G^2(f)| \hat{S}_A(e^{-2\pi j f T}).$$

Le codage de l’information à transmettre, contenue dans la suite de v.a. A_k , doit être adapté au canal. C’est le problème du codage en ligne (line coding), qui sera traité en détail dans le cours de Communications numériques. Deux approches sont possibles. La première consiste à agir sur la forme du pulse, c’est-à-dire sur $G(f)$: au lieu du pulse rectangulaire (21), on prendra un pulse de forme un peu plus compliquée mais qui permet de travailler dans la bande passante du canal (c’est-à-dire dans les fréquences f pour lesquelles $H(f)$ est élevé). Par exemple, si le canal ne transmet pas la composante DC du signal ($H(0) = 0$), on peut utiliser le pulse

$$g(t) = \begin{cases} a & \text{si } 0 \leq t < T/2 \\ -a & \text{si } T/2 \leq t < T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec les v.a. A_k prenant les valeurs 1 ou -1 : on obtient le *code de Manchester*. L'autre solution est de corrélérer les A_k entre eux, de manière à modifier $\hat{S}_A(e^{-2\pi j f T})$. Par exemple, le *code duobinaire* remplace les A_k par $B_k = A_k + A_{k-1}$, et les codent sur trois niveaux au lieu de deux. Les *codes différentiels* remplacent les A_k par une suite récursivement calculée par $B_k = A_k \oplus B_{k-1}$.

- **Dérivation d'un processus WSS.** Soit $X(t)$ un processus WSS de densité spectrale $S_X(f)$, et soit $Y(t)$ le processus obtenu en dérivant $X(t)$:

$$Y(t) = \frac{dX}{dt}(t).$$

On peut réécrire cette opération comme la sortie d'un système linéaire de transmittance $H(f) = 2\pi j f$. Dès lors la densité spectrale de $Y(t)$ est

$$S_Y(f) = 4\pi f^2 S_X(f)$$

et sa fonction d'auto-corrélation

$$R_Y(\tau) = -\frac{d^2 R_X}{d\tau^2}(\tau).$$

1.7 Processus à valeurs complexes

Les notions précédentes s'étendent sans difficulté aux processus $X(t) \in \mathbb{C}$ avec $t \in \mathbb{R}$, en adaptant les définitions de la section 1.1 comme suit

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X^*(t_2)] \\ C_X(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X^*(t_2) - \mu_X^*(t_2))] = R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X^*(t_2) \\ R_{XY}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)Y^*(t_2)] \\ C_{XY}(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(Y^*(t_2) - \mu_Y^*(t_2))] = R_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_Y^*(t_2). \end{aligned}$$

Si le processus $X(t) \in \mathbb{C}$ est WSS, sa moyenne est constante et sa fonction d'auto-corrélation est telle que

$$R_X(\tau) = R_X(t, t - \tau) = E[X(t)X^*(t - \tau)] = R_{X^*}(t - \tau, t) = R_{X^*}(-\tau).$$

De même $R_X(0) = E[|X(t)|^2]$. Par contre la densité spectrale de puissance $S_X(f)$ est toujours une fonction à valeurs réelles.

2 Application 1: Distorsion de fréquence en radiocommunication avec un mobile

Une onde polarisée verticalement, de champ électrique $\mathcal{E}_e = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$, est captée par une antenne mobile se déplaçant à une vitesse v dans une direction faisant un angle ψ avec celle de la propagation de l'onde (cfr figure 1(a)). L'effet Doppler déplace alors la fréquence d'émission f_0 d'une quantité $F_d = f_0 v \cos \psi / c$, où $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec est la vitesse de propagation de l'onde, si bien que le champ électrique reçu devient

$$\mathcal{E} = A \cos(2\pi(f_0 + F_d)t + \phi).$$

Le spectre du champ reçu est simplement une raie monochromatique déplacée de la quantité F_d par rapport à la raie du spectre du champ émis. Néanmoins, ce spectre n'est valable que si le

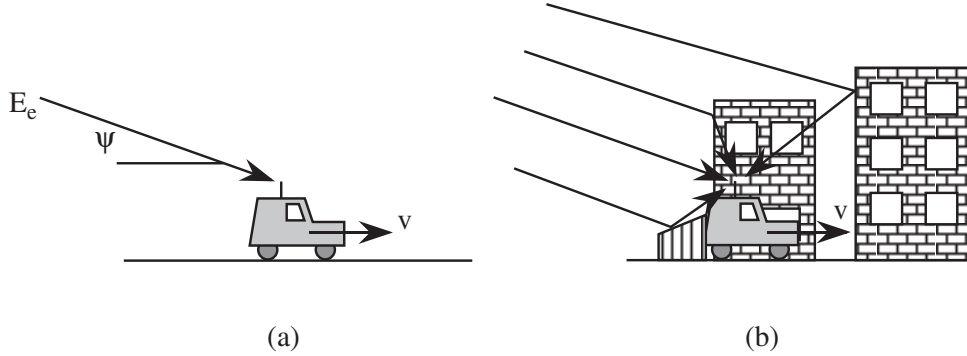


Figure 1: Radiocommunication avec un mobile: onde directe (a) et propagation par trajets multiples (b).

véhicule transportant l'antenne se déplace dans un milieu bien dégagé, de sorte que seule l'onde directe est captée. Au contraire, dans un milieu urbain, cette antenne reçoit les contributions des ondes réfléchies par les nombreux obstacles (Bâtiments,...) que rencontre l'onde incidente, si bien que le champ capté devient

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i = A \sum_{i=1}^N \cos(2\pi(f_0 + F_{di})t + \Phi_i)$$

où chaque fréquence Doppler

$$F_{di} = f_0 v \cos \Psi_i / c = f_{dmax} \cos \Psi_i$$

dépend de l'angle Ψ_i entre l'onde i et la direction du véhicule (figure 1(b)). Comme les réflecteurs sont répartis de manière quelconque autour du véhicule, on modélise la distribution des angles d'arrivées Ψ_i par une distribution uniforme de probabilité :

$$f_{\Psi_i}(\psi_i) = 1/2\pi \quad \text{pour } -\pi \leq \psi_i \leq \pi.$$

On suppose que les phases Φ_i sont des v.a. indépendantes et uniformément distribuées dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, et qu'elles sont également indépendantes des angles Ψ_i . La question qui se pose maintenant est de savoir comment la raie monochromatique du spectre d'émission va être transformée à la réception. Il faut donc calculer le spectre $S_{\mathcal{E}}(f)$. Calculons d'abord la fonction d'auto-corrélation $R_{\mathcal{E}}(t, t - \tau)$. On a

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{E}}(t, t - \tau) &= E[\mathcal{E}(t)\mathcal{E}(t - \tau)] \\ &= A^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E[\cos(2\pi(f_0 + F_{di})t + \Phi_i) \cos(2\pi(f_0 + F_{dj})(t - \tau) + \Phi_j)]. \end{aligned}$$

Les seuls termes non nuls de cette somme sont ceux pour lesquels $i = j$, d'où

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{E}}(t, t - \tau) &= A^2 \sum_{i=1}^N E[\cos(2\pi(f_0 + F_{di})t + \Phi_i) \cos(2\pi(f_0 + F_{di})(t - \tau) + \Phi_i)] \\ &= \frac{A^2}{2} \sum_{i=1}^N E[\cos(2\pi(f_0 + F_{di})\tau)] + \frac{A^2}{2} \sum_{i=1}^N E[\cos(2\pi(f_0 + F_{di})(2t - \tau) + 2\Phi_i)] \\ &= \frac{A^2}{2} \sum_{i=1}^N E[\cos(2\pi(f_0 + F_{di})\tau)] \\ &= \frac{A^2}{2} \sum_{i=1}^N E[\cos(2\pi(f_0 + f_{dmax} \cos \Psi_i)\tau)] \\ &= \frac{A^2}{2} \sum_{i=1}^N E[\cos(2\pi f_0 \tau) \cos(2\pi f_{dmax} \tau \cos \Psi_i) - \sin(2\pi f_0 \tau) \sin(2\pi f_{dmax} \tau \cos \Psi_i)] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \sum_{i=1}^N E[\cos(2\pi f_{dmax} \tau \cos \Psi_i)] \\ &\quad - \frac{A^2}{2} \sin(2\pi f_0 \tau) \sum_{i=1}^N E[\sin(2\pi f_{dmax} \tau \cos \Psi_i)] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi f_{dmax} \tau \cos \psi_i) d\psi_i \\ &\quad - \frac{A^2}{2} \sin(2\pi f_0 \tau) \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2\pi f_{dmax} \tau \cos \psi_i) d\psi_i \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) N J_0(2\pi f_{dmax} \tau) \end{aligned}$$

où $J_0(x)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro, représentée à la partie gauche de la figure 2. Le processus est donc stationnaire au sens large, sa fonction d'auto-corrélation est

$$R_{\mathcal{E}}(\tau) = \frac{NA^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) J_0(2\pi f_{dmax} \tau). \quad (46)$$

Sa densité spectrale de puissance vaut

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{E}}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\mathcal{E}}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
&= \frac{NA^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0\tau) J_0(2\pi f_{dmax}\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
&= \frac{NA^2}{2\pi f_{dmax} \sqrt{1 - (\frac{f-f_0}{f_{dmax}})^2}} + \frac{NA^2}{2\pi f_{dmax} \sqrt{1 - (\frac{f+f_0}{f_{dmax}})^2}} \quad (47)
\end{aligned}$$

et est représentée à la figure 2. La raie monochromatique à la fréquence f_0 est donc transformée en un spectre continu centré sur cette même fréquence et d'une largeur de $2f_{dmax}$, ce qui provoque une modulation parasite de fréquence. On peut montrer que la propagation par trajets multiples affecte non seulement la fréquence mais aussi l'amplitude de l'onde reçue (évanouissement ("fading") de Rayleigh).

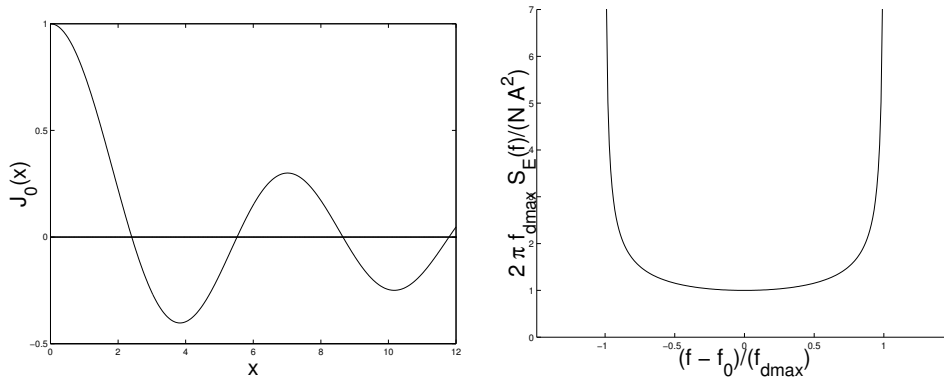


Figure 2: Fonction de Bessel $J_0(x)$ (gauche) et spectre de l'onde reçue par trajets multiples (droite).

3 Application 2: Taux d'erreur d'un signal PAM

Reprenons le train de pulses rectangulaires (21) modulés en amplitude, avec les variables A_k indépendantes et suivant une loi de Bernoulli, prenant la valeur 1 (bit "1") avec la probabilité p et -1 (bit "0") avec la probabilité $(1-p)$. Nous avons déjà mentionné qu'un canal dispersif dégrade la qualité du signal reçu à cause de l'interférence intersymbole. Une autre source d'erreurs est due au fait que le canal est soumis à des perturbations aléatoires, modélisées ici par un bruit blanc gaussien additif. Le schéma général d'un système de transmission binaire en bande de base (c'est-à-dire sans modulation à une fréquence de porteuse) est donné à la Figure 3. Les données binaires A_k sont d'abord mises en forme par le pulse rectangulaire $g(t)$ pour former le signal $X(t)$ donné par (18), puis transmises sur un canal de réponse impulsionnelle $h(t)$ soumis

à un bruit blanc gaussien additif $N(t)$, indépendant de $X(t)$. Le signal à la sortie du canal $Y(t)$ est alors filtré par un filtre de réponse impulsionnelle $r(t)$, puis échantillonné toutes les T unités de temps. Un détecteur décide alors, sur base de ces échantillons $\{Z(nT), n \in \mathbb{Z}\}$, si le signal initialement émis correspondait au bit “1” ou “0”. Nous allons voir l’effet du bruit dans le cas le plus simple d’un canal non dispersif (dont la transmittance est $H(f) = 1$) mais bruité. De plus nous supposons que les signaux Y et X sont parfaitement synchronisés, si bien que le signal à la sortie du canal est

$$Y(t) = X(t + D) + N(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k a 1_{[0,T]}(t - kT) + N(t). \quad (48)$$

Le filtre à la réception est adapté à la forme du pulse. Pour un pulse rectangulaire, on peut montrer (cfr cours de communications numériques) que le meilleur filtrage consiste à intégrer $Y(t)$ entre 0 et T . Le résultat est divisé par T , et le processus $Z(t)$ ainsi obtenu est échantillonné toutes les T unités de temps, de sorte que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} Z((n+1)T) &= \frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} Y(t) dt = \frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k a 1_{[0,T]}(t - kT) + N(t) \right] dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} A_k a 1_{[0,T]}(t - kT) dt + \frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} N(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} A_n a 1_{[0,T]}(t - nT) dt + \frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} N(t) dt \\ &= a A_n + \frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} N(t) dt. \end{aligned} \quad (49)$$

La distribution de $Z((n+1)T)$ connaissant A_n est donc une gaussienne, de moyenne

$$\begin{aligned} E[Z((n+1)T) | A_n = 1] &= a \\ E[Z((n+1)T) | A_n = -1] &= -a \end{aligned}$$

et de variance

$$\begin{aligned} \text{VAR}[Z((n+1)T) | A_n = 1] &= \text{VAR}[Z((n+1)T) | A_n = -1] \\ &= \frac{1}{T^2} E \left[\int_{nT}^{(n+1)T} \int_{nT}^{(n+1)T} N(t) N(s) dt ds \right] \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{nT}^{(n+1)T} E[N(t) N(s)] dt ds \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{nT}^{(n+1)T} R_N(t - s) dt ds \\ &= \frac{N_0}{2T^2} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{nT}^{(n+1)T} \delta(t - s) dt ds = \frac{N_0}{2T}. \end{aligned}$$

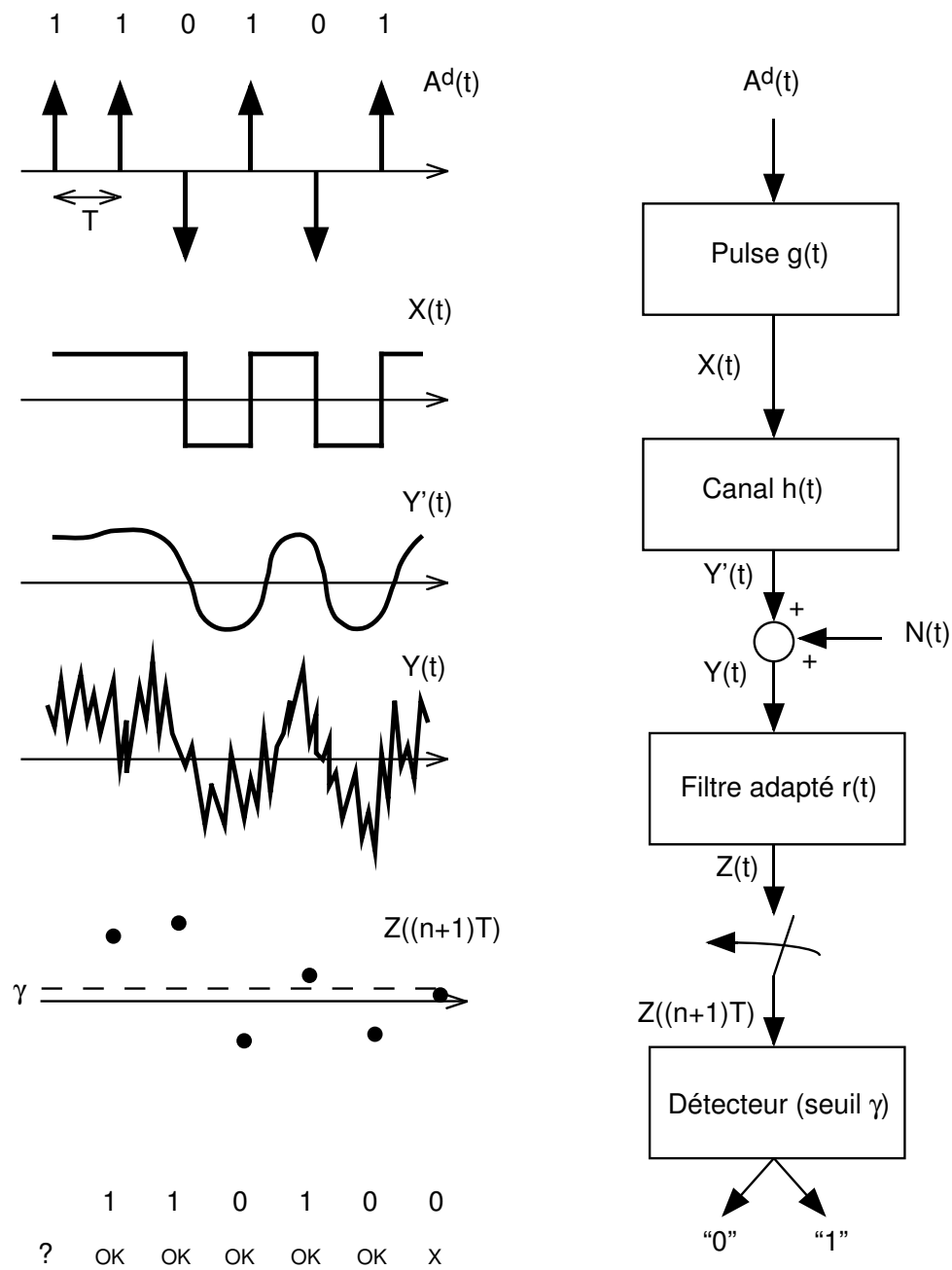


Figure 3: Schéma général d'un système de transmission binaire en bande de base.

Par conséquent

$$f_{Z|A=1}(z|A_n = 1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T}} \exp\left(-\frac{(z-a)^2}{N_0/T}\right) \quad (50)$$

$$f_{Z|A=-1}(z|A_n = -1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T}} \exp\left(-\frac{(z+a)^2}{N_0/T}\right). \quad (51)$$

Le détecteur décide du bit reçu en comparant $Z(nT)$ avec un seuil γ : si $Z((n+1)T) \geq \gamma$, la sortie du détecteur est “1”, et “0” sinon. Deux questions se posent alors: (i) comment déterminer le seuil γ qui minimise la probabilité d’erreur à la réception, et (ii) une fois cette valeur déterminée, que vaut cette probabilité d’erreur P_e ? (i) **Seuil optimal.** Le récepteur optimal effectue le test d’hypothèse binaire suivant: il décide que le symbole reçu correspond au bit “1” (i.e., à $A_n = 1$, c’est la première hypothèse H_0) si

$$P(A_n = 1|Z((n+1)T) = z) > P(A_n = -1|Z((n+1)T) = z) \quad (52)$$

et au bit “0” (i.e., à $A_n = -1$, c’est l’autre hypothèse H_1) dans le cas contraire. En effet, cette décision est la meilleure possible sur base de l’observation de la valeur de $Z((n+1)T)$. Par conséquent, il choisit la première hypothèse $H_0 : A_n = 1$ ou la seconde $H_1 : A_n = -1$ selon que le rapport

$$\frac{P(A_n = 1|Z((n+1)T) = z)}{P(A_n = -1|Z((n+1)T) = z)}$$

est supérieur ou inférieur à l’unité. En appliquant la formule de Bayes

$$P(A_n = \pm 1|Z((n+1)T) = z) = \frac{f_{Z|A=\pm 1}(z|A_n = \pm 1)P(A_n = \pm 1)}{f_Z(z)}$$

et en se souvenant que $P(A_n = 1) = p = 1 - P(A_n = -1)$, ceci revient à comparer le rapport

$$L(z) = \frac{f_{Z|A=1}(z|A_n = 1)}{f_{Z|A=-1}(z|A_n = -1)} \quad (53)$$

à $(1-p)/p$. Le rapport $L(z)$ est appelé *rapport de vraisemblance*, et s’écrit, à partir de (50) et (51)

$$L(z) = \exp\left(\frac{4az}{N_0/T}\right). \quad (54)$$

Le seuil optimal γ est celui pour lequel $L(\gamma) = (1-p)/p$. Il vaut donc

$$\gamma = \frac{N_0}{4aT} \ln\left(\frac{1-p}{p}\right). \quad (55)$$

Soulignons qu’on suppose ici la probabilité a priori p d’émission des symboles binaires connue.

(ii) **Probabilité de décision erronée.** On peut maintenant calculer la probabilité d’erreur P_e

$$\begin{aligned} P_e &= P(Z((n+1)T) \geq \gamma|A_n = -1)P(A_n = -1) + P(Z((n+1)T) < \gamma|A_n = 1)P(A_n = 1) \\ &= (1-p) \int_{\gamma}^{\infty} f_{Z|A=-1}(z|A_n = -1)dz + p \int_{-\infty}^{\gamma} f_{Z|A=1}(z|A_n = 1)dz \end{aligned} \quad (56)$$

Pour alléger les calculs, supposons que $p = 1/2$ (l'émission des deux symboles est supposée équiprobable). Alors le seuil optimal est $\gamma = 0$, et la probabilité d'erreur devient

$$\begin{aligned}
P_e &= \frac{1}{2\sqrt{\pi N_0/T}} \left[\int_0^\infty \exp\left(-\frac{(z+a)^2}{N_0/T}\right) dz + \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{(z-a)^2}{N_0/T}\right) dz \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\int_{a/\sqrt{N_0/T}}^\infty \exp(-\xi^2) d\xi + \int_{-\infty}^{-a/\sqrt{N_0/T}} \exp(-\xi^2) d\xi \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a/\sqrt{N_0/T}}^\infty \exp(-\xi^2) d\xi.
\end{aligned} \tag{57}$$

On désigne par *énergie transmise par bit* (par pulse) la quantité

$$E_b = \int_{-\infty}^\infty g^2(t) dt = a^2 T.$$

En insérant cette notation dans (57) et en introduisant la fonction d'erreur complémentaire

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-\xi^2) d\xi = 2Q(\sqrt{2}x), \tag{58}$$

la probabilité d'erreur devient finalement

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right), \tag{59}$$

et est représentée à la Figure 4.

4 Application 3: Détecteur quadratique

Un détecteur quadratique, représenté à la figure 5, est utilisé pour extraire dans certains cas de l'information d'un signal modulé (démodulation non cohérente d'un signal modulé en amplitude). Supposons qu'il soit excité par un signal $X(t)$ formé d'un signal utile $S(t)$ corrompu par un bruit additif gaussien $N(t)$: $X(t) = S(t) + N(t)$. Les deux processus $S(t)$ et $N(t)$ sont indépendants et de moyenne nulle. La fonction d'autocorrélation du signal $Y(t)$ à la sortie du détecteur est alors

$$\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y(t-\tau)] = E[X^2(t)X^2(t-\tau)] = E[(S(t) + N(t))^2(S(t-\tau) + N(t-\tau))^2] \\
&= E[S^2(t)S^2(t-\tau)] + 2E[N^2(t)]E[S^2(t)] + 4E[N(t)N(t-\tau)]E[S(t)S(t-\tau)] \\
&\quad + E[N^2(t)N^2(t-\tau)] \\
&= E[S^2(t)S^2(t-\tau)] + 2R_N(0)R_S(0) + 4R_N(\tau)R_S(\tau) + E[N^2(t)N^2(t-\tau)] \\
&= R_{S^2}(\tau) + R_{S,N}(\tau) + R_{N^2}(\tau)
\end{aligned}$$

Dans cette somme, le premier terme

$$R_{S^2}(\tau) = E[S^2(t)S^2(t-\tau)]$$

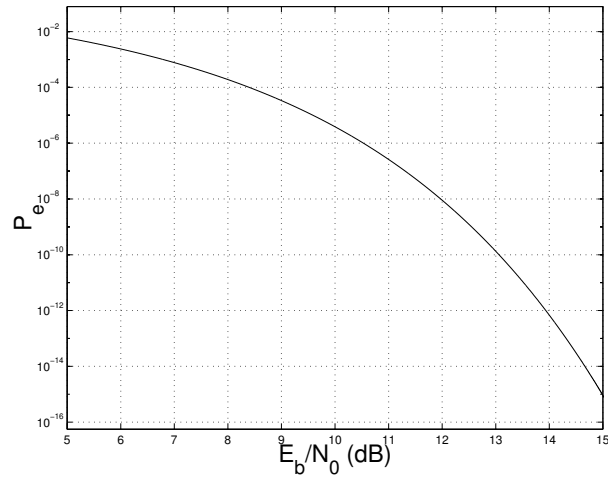


Figure 4: Probabilité d'erreur P_e d'un récepteur PAM binaire en bande de base, en fonction du rapport E_b/N_0 (en décibels).

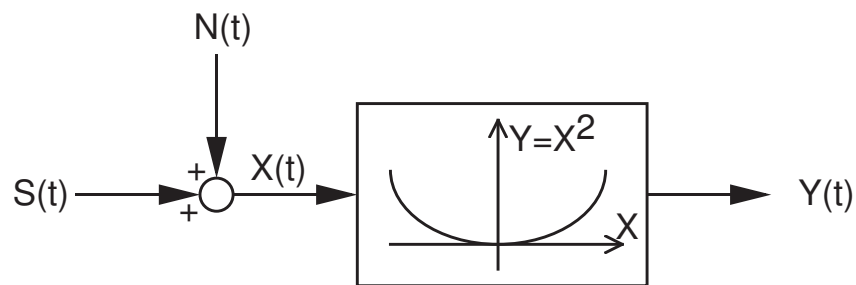


Figure 5: Détecteur quadratique.

ne dépend que du signal utile, ceux du milieu

$$R_{S,N}(\tau) = 2R_N(0)R_S(0) + 4R_N(\tau)R_S(\tau)$$

expriment l'interaction entre le signal utile et le bruit, tandis que le dernier ne dépend que du bruit. Comme $N(t)$ est gaussien, on peut écrire ce dernier terme comme

$$R_{N^2}(\tau) = E[N^2(t)N^2(t-\tau)] = 2E^2[N(t)N(t-\tau)] + E[N^2(t)]E[N^2(t-\tau)] = 2R_N^2(\tau) + R_N^2(0).$$

A titre d'exemple, prenons $S(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Phi)$ où Φ est une v.a. uniformément distribuée dans $[0, 2\pi]$, dont la densité spectrale de puissance $S_S(f)$ et la fonction d'autocorrélation $R_S(\tau)$ sont respectivement données par (34) et (8), et $N(t)$ un bruit blanc gaussien à bande étroite centré sur la même fréquence f_0 , et dont la densité spectrale de puissance $S_N(f)$ et la fonction d'autocorrélation $R_N(\tau)$ sont respectivement données par (37) et (38). Dans ce cas, on peut calculer que

$$\begin{aligned} R_{S^2}(\tau) &= \frac{A^4}{4} (1 + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 \tau)) \\ R_{S,N}(\tau) &= 2R_N(0)R_S(0) + 4R_N(\tau)R_S(\tau) = N_0 B A^2 (1 + 2\text{sinc}(B\tau) \cos^2(2\pi f_0 \tau)) \\ R_{N^2}(\tau) &= 2R_N^2(\tau) + R_N^2(0) = N_0^2 B^2 (1 + 2\text{sinc}^2(B\tau) \cos^2(2\pi f_0 \tau)) \end{aligned}$$

dont les transformées de Fourier correspondantes sont

$$\begin{aligned} S_{S^2}(f) &= \frac{A^4}{4} (\delta(f) + \frac{1}{4} \delta(f - 2f_0) + \frac{1}{4} \delta(f + 2f_0)) \\ S_{S,N}(f) &= 2R_N(0)R_S(0)\delta(f) + 4S_N(f) * S_S(f) = N_0 B A^2 \delta(f) + A^2 (S_N(f + f_0) + S_N(f - f_0)) \\ S_{N^2}(f) &= 2S_N(f) * S_N(f) + R_N^2(0)\delta(f) = N_0^2 B^2 \delta(f) + 2S_N(f) * S_N(f). \end{aligned}$$

Les expressions devenant un peu lourdes à écrire, il est plus commode de représenter graphiquement ces densités spectrales (figure 6) dont la somme est la densité spectrale de $Y(t)$:

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= (\frac{A^4}{4} + N_0 B (A^2 + N_0 B)) \delta(f) + \frac{A^4}{16} (\delta(f - 2f_0) + \frac{1}{4} \delta(f + 2f_0)) \\ &\quad + A^2 (S_N(f + f_0) + S_N(f - f_0)) + 2S_N(f) * S_N(f). \end{aligned} \quad (60)$$

La densité spectrale de $Y(t)$ est

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{A^4}{4} + N_0 B (A^2 + N_0 B) + \frac{A^4}{8} \cos(4\pi f_0 \tau) \\ &\quad + 2N_0 B A^2 \text{sinc}(B\tau) \cos^2(2\pi f_0 \tau) (1 + \text{sinc}(B\tau)). \end{aligned} \quad (61)$$

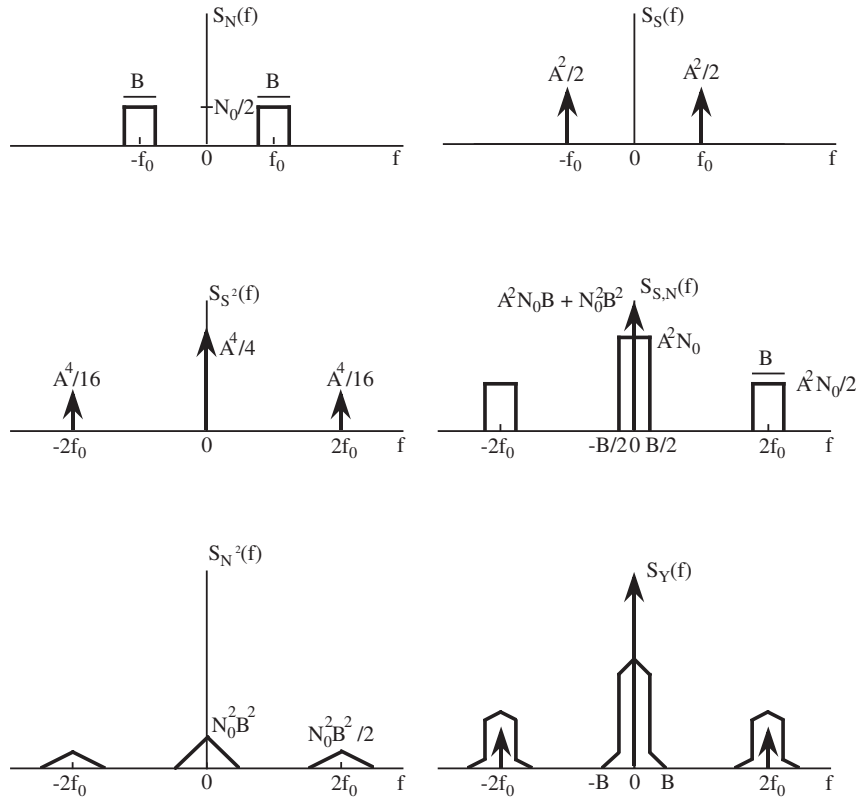


Figure 6: Densités spectrales du détecteur quadratique: à l'entrée $S_S(f)$ et $S_N(f)$, à la sortie $S_{S^2}(f)$, $S_{S,N}(f)$, $S_{N^2}(f)$ et $S_Y(f)$.

5 Exercices

Formules utiles: toutes les formules trigonométriques et les propriétés de la transformée de Fourier.

1. Calculez la fonction d'auto-corrélation de la sinusoïde à phase aléatoire (7).
2. Calculez la fonction d'auto-corrélation et la densité spectrale de puissance de la séquence binaire aléatoire sans passer par (20) mais en conditionnant $X(t_1)X(t_2)$ sur la valeur de D et en utilisant le théorème des probabilités totales.
3. L'amplitude d'un signal $X(t)$ change toutes les T secondes et est comprise entre 0 et 1 (cfr fig. 7). Toutes les valeurs comprises entre 0 et 1 sont équiprobables, et l'amplitude dans un intervalle est indépendante de l'amplitude dans un intervalle précédent. Le premier instant de changement D est une v.a. uniformément répartie dans l'intervalle de temps $[0, T]$.
 - (a) Quelle est la fonction d'auto-corrélation de $X(t)$?
 - (b) Dessinez la fonction d'auto-corrélation $R_X(\tau)$.
 - (c) Quel est le spectre de puissance de $X(t)$? Conseil: Décomposez $R_x(\tau)$ en une somme de deux fonctions simples dont vous connaissez les transformées de Fourier.

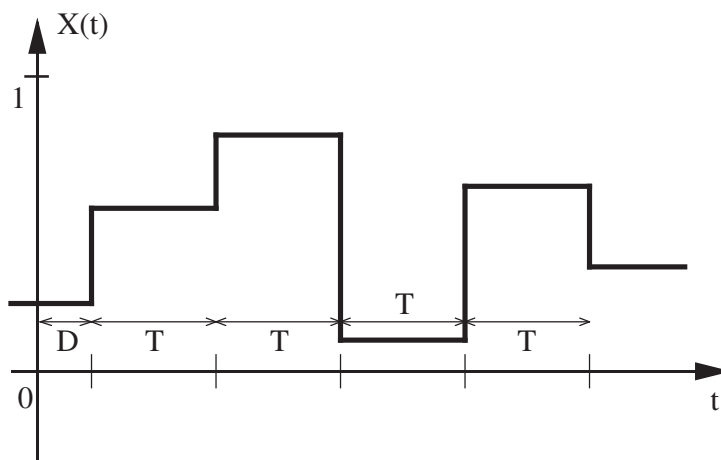


Figure 7: Signal de l'exercice 3.

4. On veut analyser le système de la fig. 8. Soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux processus indépendants et stationnaires au sens large, de moyennes nulles et de même fonction d'auto-corrélation $R_{X_1}(\tau) = R_{X_2}(\tau) = R_X(\tau)$. On construit le signal modulé

$$Y(t) = X_1(t) \cos \omega_0 t + X_2(t) \sin \omega_0 t \quad (62)$$

où ω_0 est une constante.

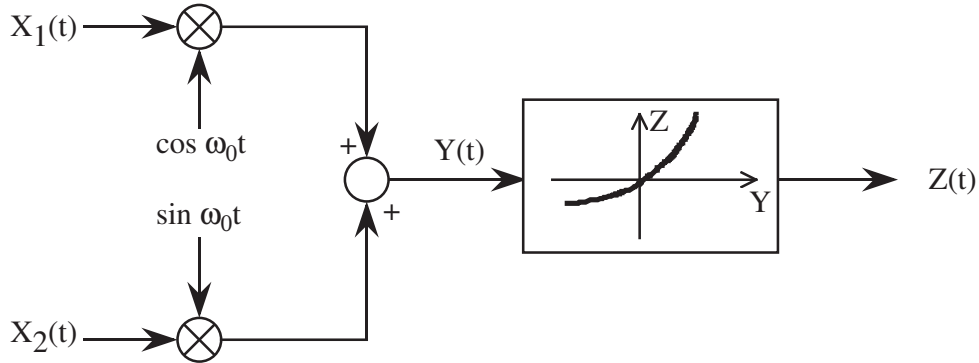


Figure 8: Système de l'exercice 4.

- (a) Exprimer la fonction d'auto-corrélation de $Y(t)$ en fonction de $R_X(\tau)$.
- (b) Le processus $Y(t)$ est-il stationnaire au sens large ?
- (c) L'hypothèse d'indépendance de X_1 et de X_2 est-elle obligatoire pour que le processus $Y(t)$ soit stationnaire au sens large ?
- (d) Exprimer la densité spectrale de puissance $S_Y(f)$ en fonction de $S_X(f)$.

Pour la suite des sous questions, on suppose dorénavant que $X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont en plus des processus gaussiens.

- (e) Quelle est la densité de probabilité de $Y(t)$?
- (f) Le processus $Y(t)$ est-il SSS ?
- (g) Le signal $Y(t)$ passe par une non-linéarité

$$Z(t) = Y(t) - \beta Y^2(t).$$

Exprimer la fonction d'auto-corrélation de $Z(t)$ en fonction de $R_Y(\tau)$, puis de $R_X(\tau)$.

5. On reprend la sinusoïde à phase et amplitude aléatoires (28):

$$X(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \Phi)$$

où Φ est une v.a. uniforme sur $[0, 2\pi]$ et A est une v.a. de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$, prenant les valeurs a_1 ou a_2 , et indépendante de Φ .

- (a) Démontrez que ce processus est WSS.
- (b) Démontrez que ce processus est ergodique par rapport à sa moyenne.
- (c) Démontrez que ce si $|a_1| \neq |a_2|$, le processus n'est pas ergodique par rapport à sa variance.
- (d) Par contre, démontrez que si $A = a_1 = a_2$ (on retrouve alors la sinusoïde à phase aléatoire et à amplitude déterministe (7)), le processus est ergodique par rapport à sa variance. (N.B. c'est aussi le cas si $a_1 = -a_2$).

6. Etablissez les relations (43) et (44).
7. Un bruit blanc continu passe à travers un filtre passe-bas idéal de largeur de bande B (i.e., sa fonction de transfert est $H(f) = 1$ pour $|f| \leq B$ et $H(f) = 0$ pour $|f| > B$) Quelle est la fonction d'auto-corrélation du signal de sortie ?
8. Soit $X(t) = A \sin(\omega_0 t + \Phi)$ où Φ est une v.a. uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, et A et ω_0 deux constantes. Calculer de deux manières différentes la fonction d'auto-corrélation de $Y(t) = X(t) - X(t - d)$ où d est une constante.
9. Le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ appelé "signal des télégraphistes" est un processus à temps continu qui prend les valeurs 0 et 1, et qui change de valeur à des instants donnés par un processus de Poisson, ce qui implique que la probabilité d'avoir k changements de valeur en t secondes est donnée par

$$\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

En $t = 0$, le signal prend la valeur 0 ou 1 avec la même probabilité:

$$P(X(0) = 0) = P(X(0) = 1) = 1/2.$$

Remarque: pour les calculs qui suivent, il est utile de rappeler le développement en série de Taylor de $ch(x)$ qui est

$$ch(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}.$$

- (a) Calculer la moyenne μ_X de ce processus.
 - (b) Calculer la fonction d'auto-corrélation $R_X(\tau)$ de ce processus. Montrer qu'il est stationnaire au sens large.
 - (c) Calculer la fonction d'auto-covariance $C_X(\tau)$ de ce processus.
 - (d) Que vaut la densité spectrale de puissance $S_X(f)$ de ce processus ?
 - (e) Ce processus est-il ergodique par rapport à sa moyenne ?
10. Cet exercice prépare la résolution de l'exercice 11. Soient X_1 et X_2 deux v. a. gaussiennes jointes de moyennes nulles, de mêmes écart-types $\sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} = \sigma$ et dont le coefficient de corrélation ρ peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre -1 et 1 . On souhaite calculer la probabilité

$$P(X_1 \geq 0, X_2 \geq 0) \tag{63}$$

Pour visualiser les différents changements de variables des sous-questions qui suivent, il est commode de représenter dans le plan (x_1, x_2) une courbe de niveau (ellipse) le long de laquelle la densité jointe de probabilité $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ est constante.

- (a) Que vaut (63) dans le cas particulier où les deux v.a. X_1 et X_2 ne sont pas corrélées ?
- (b) Dans le cas général où $-1 \leq \rho \leq 1$, déterminer une transformation linéaire de ces variables qui les décorrèle.

- (c) Si Y_1 et Y_2 sont les v.a. non corrélées obtenues en (b), déterminer un changement linéaire de ces variables de façon à obtenir deux v. a. Z_1 et Z_2 de même écart-type.
- (d) Evaluer (63) dans le cas général où $-1 \leq \rho \leq 1$. Vérifier que lorsque $\rho = 0$, on retrouve le résultat obtenu en (a). Hint: effectuez un changement de variables passant de Z_1 et Z_2 à des coordonnées polaires.
11. On considère le système de la figure 9 (limiteur idéal), qui transforme un processus stationnaire gaussien (à temps continu) $X(t)$, de moyenne nulle et de fonction d'auto-corrélation $R_X(\tau)$ en un processus $Y(t)$ donné par

$$Y = \begin{cases} a & \text{si } X \geq 0 \\ -a & \text{si } X < 0 \end{cases} \quad (64)$$

où a est un réel positif.

- (a) Calculer la fonction d'auto-corrélation $R_Y(\tau)$ du processus $Y(t)$.
- (b) Supposons à présent que le processus de sortie $Y(t)$ soit observable, mais pas le processus d'entrée $X(t)$. Il est clair que la connaissance d'une réalisation $y(t)$ ne permet pas de reconstruire exactement le signal d'entrée particulier $x(t)$ qui l'a produit; seuls le signe et les passages par zéro de $x(t)$ peuvent être déterminés. Néanmoins, sachant que $X(\cdot)$ est un processus gaussien et stationnaire, pourquoi peut-on dire que la seule connaissance des caractéristiques statistiques de $Y(\cdot)$ permet de retrouver toutes les caractéristiques statistiques de $X(\cdot)$? Hint: exprimer $R_X(\tau)$ en fonction de $R_Y(\tau)$. Note: sans la solution de l'exercice 11, la solution de la partie (a) pourrait être obtenue plus facilement en utilisant le théorème de Price exemple dans le vol. 6 du Traité d'Electricité de F. de Coulon)
12. Soit $X(t)$ un processus stationnaire au sens large.
- (a) Montrer que si $X(t)$ est périodique (c'est-à-dire tel que $X(t+T) = X(t)$ pour tout t) alors sa fonction d'auto-corrélation $R_X(\tau)$ est également périodique de même période T .
- (b) Réciproquement, montrer si $R_X(\tau)$ est périodique, de période T , alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X(t+T) - X(t)| \geq \varepsilon) = 0$. Hint: penser à l'inégalité de Tchebycheff.
13. Cet exercice répète l'exercice 11, mais cette fois le processus $X(t)$ est donné par

$$X(t) = \sin(\omega t + \Phi)$$

où Φ est une v.a. uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et ω est un réel fixé. Quelle est la fonction d'auto-corrélation $R_Y(\tau)$ du processus $Y(t)$ donné par (64) ?

14. Si la tension $V_{in}(t)$ à l'entrée du biporte de la figure 10 est un bruit blanc stationnaire, de moyenne nulle et de densité spectrale $S_{V_{in}}(f) = N_0/2$, quelles sont la densité spectrale $S_{V_{out}}(f)$ et la fonction d'auto-corrélation $R_{V_{out}}(\tau)$ de la tension à la sortie du biporte ?

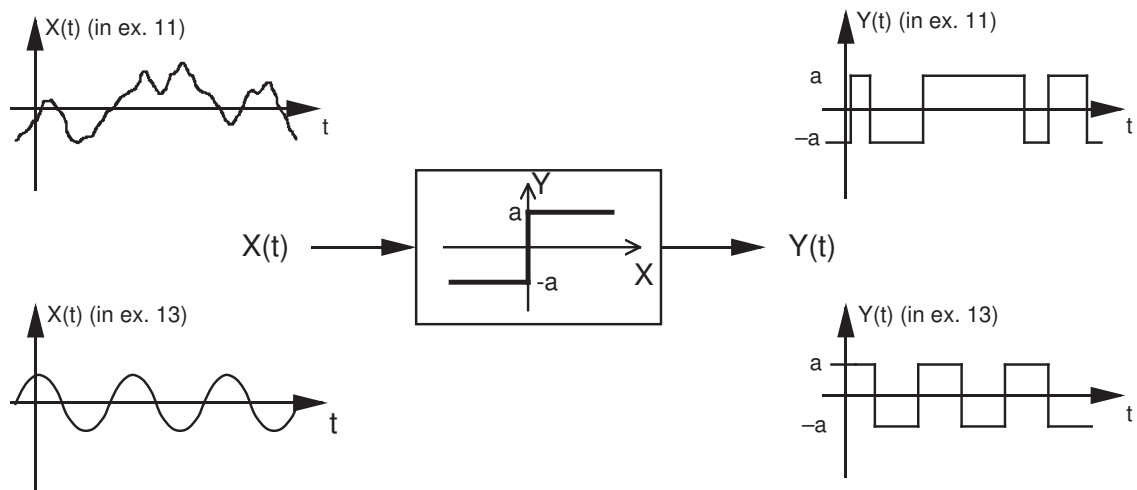


Figure 9: Système des exercices 11 et 13.

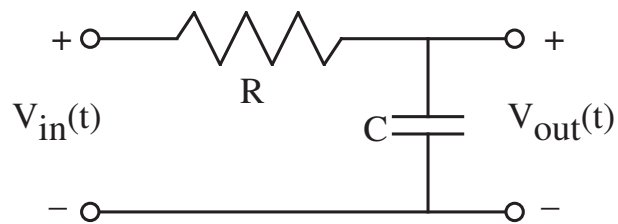


Figure 10: Biporte RC de l'exercice 14.

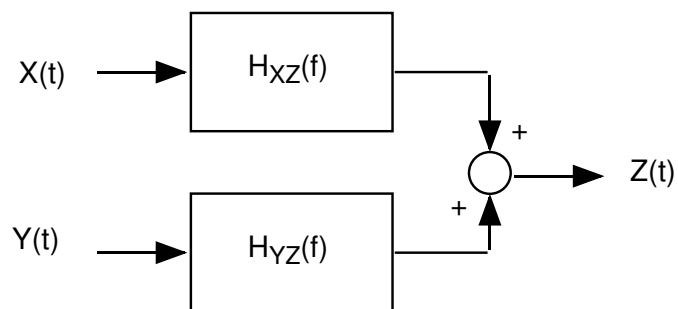


Figure 11: Système de l'exercice 15.

15. Les deux processus $X(t)$ et $Y(t)$ de la figure 11 sont WSS et large, indépendants. Leurs densités spectrales de puissance respectives sont notées $S_X(f)$ et $S_Y(f)$. Ils sont filtrés par des filtres de transmittances respectives $H_{XZ}(f)$ et $H_{YZ}(f)$, puis additionnés pour former le processus $Z(t)$. Que vaut la densité spectrale de puissance de ce dernier ?

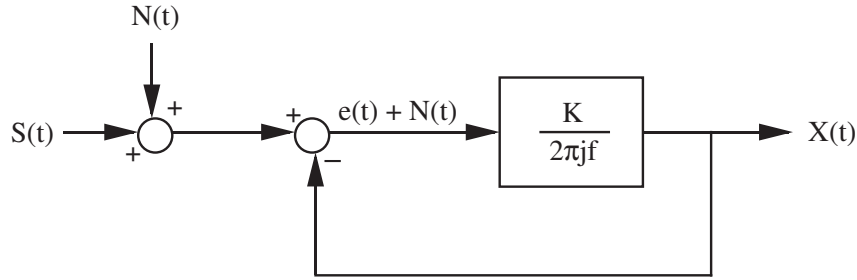


Figure 12: Système de l'exercice 16.

16. On utilise le système asservi représenté à la figure 12 pour filtrer un bruit blanc $N(t)$ qui s'ajoute au signal utile $S(t)$. Les deux fonctions aléatoires $N(t)$ et $S(t)$ sont stationnaires au sens large et non corrélées entre elles. La fonction d'auto-corrélation du signal utile est $R_S(\tau) = e^{-a|\tau|}$ tandis que la densité spectrale de puissance du bruit est $S_N(f) = N_0/2$.

- (a) Quelle est la valeur du gain K qui minimise l'erreur quadratique moyenne

$$\varepsilon = E[e^2(t)] = E[(X(t) - S(t))^2]?$$

Hint: Montrez tout d'abord que ce système peut être remis sous la forme du schéma-bloc de la figure 11, si on y remplace les processus X, Y, Z de cette figure par les processus S, N, e du présent exercice. Utilisez ensuite le résultat de l'exercice 15 et le fait que

$$E[e^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_e(f) df.$$

- (b) Cette valeur existe-t-elle toujours ? Sinon, quelle est la valeur maximale de la densité spectrale de puissance du bruit $N_0/2$ pour laquelle la valeur calculée en (a) est valable ? Hint: le système doit rester stable.
17. Cet exercice étudie la stationnarité de la sinusoïde à phase et fréquence aléatoires

$$X(t) = a \sin(2\pi Ft + \Phi). \quad (65)$$

La phase Φ de la sinusoïde est une variable aléatoire uniformément distribuée entre 0 et 2π , et sa fréquence est également une variable aléatoire F , indépendante de Φ , et prenant les valeurs f_1 et f_2 avec les probabilités p et $(1 - p)$ (F est donc une v.a. de Bernoulli de paramètre p).

- (a) Ce processus est-il WSS ?

- (b) Ce processus est-il SSS ? Hint: soient $n \in \mathbb{N}_0$, $t_1, \dots, t_n, c \in \mathbb{R}$. Évaluez les fonctions caractéristiques

$$\frac{\Phi_{\mathbf{X}|F=f_i}(\omega_1, \dots, \omega_n | F = f_i)}{\Phi_{\mathbf{X}}(\omega_1, \dots, \omega_n)}$$

avec $i = 1, 2$, d'abord avec $\mathbf{X} = [X(t_1) \dots X(t_n)]^T$ et puis $\mathbf{X} = [X(t_1 + c) \dots X(t_n + c)]^T$.

18. On reprend le système PAM de l'application 2. On a vu que si l'émission des symboles binaires était équiprobable ($p = 1/2$), le seuil optimal était $\gamma = 0$. La probabilité d'erreur résultante est montrée à la figure 4.

- (a) Que devient cette probabilité d'erreur si $\gamma = 0$ mais $p \neq 1/2$?
- (b) Vous ne connaissez pas p a priori, et ne pouvez l'estimer. Le rapport E_b/N_0 étant fixé, comment choisirez-vous γ de manière à pouvoir annoncer une probabilité d'erreur que vous pouvez garantir quelle que soit la probabilité p d'émission des symboles binaires ?
- (c) Supposons que la probabilité d'erreur soit 10^{-3} . On souhaite la ramener à 10^{-6} . Y parvient-on en doublant la durée du pulse T ? et en doublant son amplitude a ?