

Module 6: Chaînes de Markov à temps discret

1 Définition

Un processus stochastique est dit *markovien* (d'ordre 1) si l'évolution future du processus ne dépend que de sa valeur actuelle et non de ses valeurs passées. En d'autres termes, l'histoire passée du processus est entièrement résumée dans sa valeur actuelle.

Plus précisément, si $X(t)$ est à valeurs discrètes, il est markovien et est alors appelé *chaîne de Markov* si et seulement si pour toute suite d'instants $t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1}$ et toute suite de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$

$$P(X(t_{k+1}) = x_{k+1} \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_k) = x_k) = P(X(t_{k+1}) = x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k). \quad (1)$$

L'ensemble des valeurs que $X(t)$ peut prendre est appelé *espace d'état*. Pour une chaîne de Markov, il est donc discret (fini ou non). Selon que le temps t est lui-même discret ou continu, on parlera de *chaîne de Markov à temps discret* ou de *chaîne de Markov à temps continu*.

Si l'espace d'état est continu, $X(t)$ est un *processus de Markov* si et seulement si pour toute suite d'instants $t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1}$

$$P(x_{k+1} \leq X(t_{k+1}) < x_{k+1} + \Delta x_{k+1} \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_k) = x_k) = P(x_{k+1} \leq X(t_{k+1}) < x_{k+1} + \Delta x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k)$$

ou encore

$$f_{X(t_{k+1}) \mid X(t_1)X(t_2)\dots X(t_k)}(x_{k+1} \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_k) = x_k) = f_{X(t_{k+1}) \mid X(t_k)}(x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k). \quad (2)$$

A nouveau, selon que le temps t est discret ou continu, on parlera de *processus de Markov à temps discret* ou de *processus de Markov à temps continu*. Nous aborderons les chaînes de Markov à temps continu dans le module suivant. Pour l'instant, nous rappelons seulement les concepts de chaîne de Markov à temps discret.

2 Chaînes de Markov à temps discret

L'espace d'état, noté $\mathcal{S}$, peut être soit fini, soit infini, mais dénombrable (par exemple $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$).

2.1 Probabilités d'état et de transition

La probabilité que $X(n)$ soit dans l'état $i \in \mathcal{S}$ est une des *probabilités d'état* $\pi_i(n) = P(X(n) = i)$, dont la somme vaut évidemment l'unité

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i(n) = 1, \quad (3)$$

tandis que les probabilités $p_{ij}(n) = P(X(n+1) = j \mid X(n) = i)$ sont les *probabilités de transition à une étape* de l'état i à l'état j au temps n , satisfaisant à la relation

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij}(n) = 1. \quad (4)$$

Dans la suite, on supposera qu'elles ne dépendent pas du temps n , la chaîne est dite *homogène*. Ces probabilités de transition sont généralement écrites sous forme d'une *matrice de transition* (ou *matrice stochastique*)

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0i} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1i} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ p_{i0} & p_{i1} & \dots & p_{ii} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (5)$$

dont la somme des éléments d'une même ligne valent l'unité à cause de (4).

Les *probabilités de transition à 2 étapes* de l'état i à l'état j sont données par

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(2)} &= P(X(n+2) = j \mid X(n) = i) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{S}} P(X(n+2) = j \mid X(n+1) = k, X(n) = i) P(X(n+1) = k \mid X(n) = i) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{S}} P(X(n+2) = j \mid X(n+1) = k) P(X(n+1) = k \mid X(n) = i) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{kj} p_{ik}, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle

$$P^{(2)} = PP = P^2$$

On peut étendre ce résultat pour obtenir les *probabilités de transition à m étapes* de l'état i à l'état j par les *équations de Chapman-Kolmogorov*

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(m)} &= P(X(n+m) = j \mid X(n) = i) \\
&= \sum_{k \in \mathcal{S}} P(X(n+m) = j \mid X(n+m-l) = k, X(n) = i) P(X(n+m-l) = k \mid X(n) = i) \\
&= \sum_{k \in \mathcal{S}} P(X(n+m) = j \mid X(n+m-l) = k) P(X(n+m-l) = k \mid X(n) = i) \\
&= \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}^{(m-l)} p_{kj}^{(l)}.
\end{aligned}$$

En particulier pour $l = 1$,

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{kj} p_{ik}^{(m-1)}$$

ou encore sous forme matricielle

$$P^{(m)} = P^{(m-1)} P = \dots = P^m.$$

Notons que $p_{ii}^{(0)} = 1$.

Les probabilités d'état sont également facilement calculables

$$\begin{aligned}
\pi_j(n) &= P(X(n) = j) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{S}} P(X(n) = j \mid X(n-1) = i) P(X(n-1) = i) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{S}} p_{ij} \pi_i(n-1)
\end{aligned}$$

Si

$$\boldsymbol{\pi}(n) = [\pi_0(n) \quad \pi_1(n) \quad \pi_2(n) \quad \dots],$$

cette relation s'écrit sous forme matricielle

$$\boldsymbol{\pi}(n) = \boldsymbol{\pi}(n-1) P = \dots = \boldsymbol{\pi}(0) P^n. \quad (6)$$

On dit qu'une distribution de probabilité $\boldsymbol{\pi}$ est une *distribution invariante* de la chaîne de Markov ssi

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P \quad (7)$$

i.e. c'est un vecteur propre (à gauche) de la matrice P . Il s'en suit que si $\boldsymbol{\pi}(0)$ est une distribution invariante, alors $\boldsymbol{\pi}(n) = \boldsymbol{\pi}(0)$ pour tout $n \geq 0$. On peut même dire un peu plus.

En effet, par application itérée des probabilités conditionnelles on trouve que:

$$\mathbb{P}(X(n) = i_n, X(n-1) = i_{n-1}, \dots, X(1) = i_1, X(0) = i_0) = \pi_{i_0}(0) P_{i_0, i_1} P_{i_1, i_2} \dots P_{i_{n-1}, i_n} \quad (8)$$

ce qui montre au passage que la distribution initiale $\pi(0)$ et la matrice de transition P définissent entièrement la loi de la chaîne de Markov homogène. De la même manière:

$$\mathbb{P}(X(n+m) = i_n, X(n-1+m) = i_{n-1}, \dots, X(1+m) = i_1, X(m) = i_0) = \pi_{i_0}(m) P_{i_0, i_1} P_{i_1, i_2} \dots P_{i_{n-1}, i_n} \quad (9)$$

et donc si π est invariante, les membres de gauche des équations 8 et 9 sont identiques, ce qui montre que X est stationnaire au sens strict:

Proposition 1 *Une chaîne de Markov homogène est stationnaire au sens strict si et seulement si $\pi(0)$ est une distribution invariante, i.e. $\pi = \pi P$.*

Notons à ce stade qu'une chaîne de Markov sur un ensemble d'états fini possède au moins une probabilité invariante, mais que si l'ensemble d'états est infini il peut ne pas en exister.

2.2 Classification des états

2.2.1 Classe / chaîne irréductible

Un état j est *accessible* à partir de l'état i si $p_{ij}^{(m)} > 0$ pour un certain $m \in \mathbb{N}_0$, c'est-à-dire s'il existe une suite de transitions ayant une probabilité non nulle de passer de l'état i à l'état j . Deux états i et j *communiquent* s'ils sont accessibles l'un à l'autre, ce que l'on note $i \leftrightarrow j$. Cette relation est réflexive, symétrique et transitive (exercice 3). Elle définit donc des *classes* d'équivalence, qui sont l'ensemble de tous les états qui communiquent entre eux. Une chaîne de Markov qui ne comporte qu'une seule classe est dite *irréductible*.

Un état i est *absorbant* s'il est impossible de le quitter, c'est-à-dire si $p_{ii} = 1$. Un état absorbant forme donc une classe à lui tout seul. Une classe d'états est absorbante s'il est impossible de la quitter, et si ses états communiquent entre eux.

2.2.2 Etats (a)périodiques

Un état i a une *période* d s'il ne peut être visité qu'à des instants multiples de d , c'est-à-dire si $p_{ii}^{(n)} = 0$ pour chaque n qui n'est pas multiple de d , où d est le plus grand entier ayant cette propriété¹. Tous les états d'une classe ont la même période. En effet, supposons que i et j communiquent, et que i soit périodique de période d . Comme i communique avec j , il existe $k, m \in \mathbb{N}_0$ tels que $p_{ij}^{(k)} > 0$ et $p_{ji}^{(m)} > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{ii}^{(k+n+m)} = \sum_{l \in S} \sum_{r \in S} p_{ir}^{(k)} p_{rl}^{(n)} p_{li}^{(m)} \geq p_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(m)}.$$

Si $n = 0$, cette inégalité devient $p_{ii}^{(k+m)} \geq p_{ij}^{(k)} p_{ji}^{(m)} > 0$, ce qui n'est possible que si $(k+m)$ est un multiple de d . Par conséquent, si n n'est pas un multiple de d , $(k+n+m)$ n'est pas un multiple

¹Où de manière équivalente, le plus petit d tel que $p_{ii}^{(kd)} > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

de d non plus, et il s'ensuit que $p_{jj}^{(n)}$ doit être nul, puisque $p_{ij}^{(k)} p_{ji}^{(m)} > 0$. Ceci montre que j a une période multiple de d . En recommençant le même raisonnement, avec i et j intervertis, on montre que j a la même période que i .

Si $d = 1$, l'état est dit *apériodique*. On appelle *chaîne apériodique* une chaîne irréductible dont tous les états sont apériodiques.

2.2.3 Etats récurrents/transitoires

On désigne par T_i le *temps de premier passage* par l'état i :

$$T_i = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X(n) = i\}. \quad (10)$$

Si cet ensemble est vide, on pose $T_i = \infty$. Le domaine de T_i est donc $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Si T_i est fini, le processus passera un jour ou l'autre par cet état. Par contre, si T_i est infini, cela signifie que le processus ne passera jamais par l'état i .

Remarquons que pour tout $m \in \mathbb{N}_0$

$$P(T_i = m) = P(X(m) = i \text{ et } X(n) \neq i \text{ pour tout } 1 \leq n \leq m-1).$$

Soit f_i la probabilité que le processus retourne après un certain temps à l'état i :

$$f_i = P(X(n) = i \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}_0 \mid X(0) = i). \quad (11)$$

On a donc que

$$f_i = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} P(T_i = m \mid X(0) = i) = P(T_i < \infty \mid X(0) = i).$$

Un état i est *récurrent* si la probabilité que le processus repasse par cet état après l'avoir quitté vaut l'unité, i.e. si $f_i = 1$. Il est *transitoire* sinon, i.e. si $f_i < 1$.

On peut établir qu'un état est récurrent ou transitoire directement à partir des probabilités $p_{ii}^{(n)}$ en introduisant une variable aléatoire V_i , comptant le nombre de passages par l'état i . Notons par $1_{\{X(n)=i\}}$ la fonction indicatrice de l'état i , qui vaut 1 si $X(n) = i$ et 0 sinon (c'est donc une v.a. de Bernoulli). Alors V_i est exprimé par:

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X(n)=i\}}. \quad (12)$$

On calcule que

$$\begin{aligned} E[V_i \mid X(0) = i] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[1_{\{X(n)=i\}} \mid X(0) = i] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X(n) = i \mid X(0) = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}, \end{aligned} \quad (13)$$

et que

$$\begin{aligned}
P(V_i < \infty \mid X(0) = i) &= P(\exists n \text{ tel que } X(n) = i \text{ et } X(m) \neq i \forall m > n \mid X(0) = i) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(X(n) = i \text{ et } X(m) \neq i \forall m > n \mid X(0) = i) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(X(m) \neq i \forall m > n \mid X(n) = i \text{ et } X(0) = i) P(X(n) = i \mid X(0) = i) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(X(m) \neq i \forall m > n \mid X(n) = i) p_{ii}^{(n)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(X(m) \neq i \forall m > 0 \mid X(0) = i) p_{ii}^{(n)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - f_i) p_{ii}^{(n)}. \tag{14}
\end{aligned}$$

Dès lors, comme $P(V_i < \infty \mid X(0) = i) \leq 1$, on a que si i est transitoire, alors $f_i < 1$ et par (14)

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \leq \frac{1}{1 - f_i}.$$

Dans le cas contraire, si i est récurrent, $f_i = 1$ et (14) implique que $P(V_i < \infty \mid X(0) = i) = 0$, ce qui veut dire que V_i est presque sûrement infini quand $X(0) = i$. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = E[V_i \mid X(0) = i] = \infty.$$

On a donc le théorème suivant:

Proposition 2 *L'état i est récurrent si et seulement si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

et transitoire si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty.$$

La propriété de récurrence est une propriété de classe: en effet, si i est un état récurrent, et si j communique avec i , alors j est aussi récurrent. Comme i communique avec j , il existe $m, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $p_{ij}^{(m)} > 0$ et $p_{ji}^{(k)} > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{jj}^{(k+n+m)} = \sum_{l \in \mathcal{S}} \sum_{r \in \mathcal{S}} p_{jr}^{(k)} p_{rl}^{(n)} p_{lj}^{(m)} \geq p_{ji}^{(k)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(m)}$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(k+n+m)} \geq p_{ji}^{(k)} p_{ij}^{(m)} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty,$$

ce qui montre que j est aussi récurrent. Il s'ensuit que la propriété d'être transitoire est aussi une propriété de classe.

Finalement, on fait une distinction supplémentaire entre états récurrents, lorsqu'on considère l'espérance du temps de premier retour. Si l'état i est récurrent, celle-ci s'écrit

$$E[T_i \mid X(0) = i] = \sum_{m \in \mathbb{N}_0 \cup \infty} m P(T_i = m \mid X(0) = i) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} m P(T_i = m \mid X(0) = i).$$

Si cette espérance est finie, l'état est dit *récurrent positif*, sinon il est *récurrent nul*.

On peut montrer que si $X(n)$ est une chaîne irréductible récurrente, alors tous ses états sont soit récurrents positifs, soit récurrents nuls. Si de plus son espace d'état est fini, alors tous ses états ne peuvent être que récurrents positifs. Plus précisément, on a:

Proposition 3 (Espace d'Etat Fini) *Soit X une chaîne de Markov homogène sur un espace d'états $\mathcal{S}$ fini.*

1. *Une classe d'états est récurrente positive si et seulement si elle est absorbante*
2. *Une classe d'états est transitoire si et seulement si elle est non absorbante*
3. *Il existe au moins une classe d'états absorbante*
4. *Si la chaîne est irréductible alors elle est récurrente positive*
5. *Aucun état n'est récurrent nul*

Une chaîne de Markov homogène irréductible, apériodique et dont tous les états sont récurrents positifs est dite *ergodique*. (Il s'agit d'un ergodisme en distribution, pas seulement en moyenne).

2.3 Comportement asymptotique

De même que la réponse d'un système déterministe linéaire et invariant dans le temps se compose d'un régime transitoire et d'un régime permanent, on peut étudier si la distribution de probabilité $\pi(n)$ tend vers une distribution limite lorsque $n \rightarrow \infty$.

Une distribution de probabilité π^* est dite *stationnaire* (ou encore *invariante*) si elle satisfait à l'équation

$$\pi^* = \pi^* P \tag{15}$$

c'est-à-dire, pour tout $j \in \mathcal{S}$

$$\pi_j^* = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^* p_{ij}. \tag{16}$$

Dans ce cas, si $\pi(0) = \pi^*$, (6) entraîne que $\pi(n) = \pi^*$ pour tout $n \geq 0$. Le processus est donc stationnaire (au sens strict) car

$$\begin{aligned} P(X(n+k) = i_k, \dots, X(n) = i_0) &= P(X(n+k) = i_k | X(n+k-1) = i_{k-1}) \\ &\quad \dots P(X(n+1) = i_1 | X(n) = i_0) P(X(n) = i_0) \\ &= p_{i_{k-1}i_k} \dots p_{i_0i_1} \pi_{i_0}^* \end{aligned}$$

ce qui ne dépend pas du temps initial n . Donc les probabilités sont indépendantes de l'origine de l'axe des temps, ce qui montre que le processus est stationnaire.

Si une distribution limite existe, elle sera stationnaire. L'inverse n'est pourtant pas vrai.

Grâce à la classification faite à la section précédente, on peut maintenant énoncer les conditions sous lesquelles une chaîne de Markov à temps discret converge vers une distribution stationnaire:

Théorème 1 *Si $X(n)$ est une chaîne de Markov homogène ergodique alors il existe une seule distribution stationnaire donnée par (16) et (3), i.e. solution unique de*

$$\pi_j^* = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^* p_{ij} \quad (17)$$

et

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^* = 1. \quad (18)$$

De plus, tout vecteur des probabilités d'état tend vers cette distribution stationnaire:

$$\pi(n) \rightarrow \pi^*$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Nous ne démontrons pas ce théorème (il faut utiliser la propriété forte de Markov non vue ici), mais indiquons la démarche à suivre.

Si l'espace d'états est fini, le théorème peut être établi de manière "algébrique", en calculant la matrice P^n , et en montrant qu'elle tend vers une matrice P^* dont toutes les lignes sont le vecteur π^* . Dans le cas général d'un espace d'états fini ou infini (mais dénombrable), il faut utiliser une approche astucieuse, qui consiste à "coupler" la chaîne $X(n)$ avec une autre chaîne $Y(n)$, indépendante de X , de même matrice de transition P , et dont la distribution initiale de probabilité est la distribution invariante π^* (donc $P(Y(n) = j) = \pi_j^*$ pour tout $j \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}$). On montre alors que

1. le temps de premier passage simultané de X et Y par un état $i \in \mathcal{S}$ est presque sûrement fini, i.e. que $P(T_{(i,i)} < \infty) = 1$ avec

$$T_{(i,i)} = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X(n) = Y(n) = i\};$$

2. le processus

$$Z(n) = \begin{cases} X(n) & \text{si } n < T_{(i,i)} \\ Y(n) & \text{si } n \geq T_{(i,i)} \end{cases}$$

est une chaîne de Markov de même matrice de transition P et même distribution initiale de probabilité π_0 que la chaîne X , ce qui entraîne en particulier que $P(Z(n) = j) = P(X(n) = j)$ pour tout $j \in \mathcal{S}$;

3. Pour tout $j \in \mathcal{S}$, on a alors que

$$\begin{aligned} |P(X(n) = j) - \pi_j^*| &= |P(Z(n) = j) - P(Y(n) = j)| \\ &= |P(Z(n) = j \text{ et } T_{(i,i)} > n) + P(Z(n) = j \text{ et } T_{(i,i)} \leq n) - P(Y(n) = j)| \\ &= |P(X(n) = j \text{ et } T_{(i,i)} > n) + P(Y(n) = j \text{ et } T_{(i,i)} \leq n) - P(Y(n) = j)| \\ &= |P(X(n) = j \text{ et } T_{(i,i)} > n) - P(Y(n) = j \text{ et } T_{(i,i)} > n)| \\ &\leq |P(T_{(i,i)} > n) - 0| = P(T_{(i,i)} > n) \end{aligned}$$

et $P(T_{(i,i)} > n) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ car $P(T_{(i,i)} < \infty) = 1$.

La réciproque suivante est souvent utile en pratique:

Théorème 2 (Réciproque du Théorème 1) *Soit X une chaîne de Markov homogène irréductible (apériodique ou non). S'il existe un vecteur ligne π^* solution des Equations (17) et (18) alors*

1. $\pi_i^* > 0$ pour tout état i ,
2. la chaîne est récurrente positive,
3. π^* est l'unique solution des Equations (17) et (18).

Remarque: une chaîne irréductible est soit récurrente positive, soit récurrente nulle, soit transitoire. Le théorème dit que l'existence d'une solution aux équations qui définissent une probabilité stationnaire suffit pour éliminer les deux derniers cas.

Mentionnons aussi le résultat suivant pour le cas périodique.

Théorème 3 (Cas périodique du Théorème 1) *Si X est une chaîne de Markov homogène récurrent positive périodique de période d alors il existe une seule distribution stationnaire donnée par (16) et (3), i.e. solution unique de*

$$\pi_j^* = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^* p_{ij} \quad (19)$$

et

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^* = 1. \quad (20)$$

Pour tous états i et j , $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X(dn+r) = j | X(0) = i) = d\pi_j^*$ ou bien $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X(dn+k) = j | X(0) = i) = 0$, selon la valeur de $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$; de plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \pi_i(m) = \pi_i^*$$

Nous mentionnons également, sans démonstration, l'important théorème suivant.

Théorème 4 *Si $X(n)$ possède une distribution stationnaire unique $\pi^* = [\pi_0^* \ \pi_1^* \ \dots]$ alors le temps moyen de retour à l'état i vaut*

$$E[T_i \mid X(0) = i] = \frac{1}{\pi_i^*}. \quad (21)$$

Pour beaucoup de chaînes, il est plus facile de calculer π^* à l'aide de la proposition suivante qu'en résolvant (16) directement.

Proposition 4 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ un sous-ensemble des états de $X(n)$. Si π^* est une distribution stationnaire, alors on a*

$$\sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{j \notin \mathcal{A}} \pi_i^* p_{ij} = \sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{j \notin \mathcal{A}} \pi_j^* p_{ji}. \quad (22)$$

La signification intuitive de cette proposition est que la somme des transitions de $\mathcal{A}$ vers l'extérieur de $\mathcal{A}$ doit être égale à la somme des transitions de l'extérieur de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$. Graphiquement, les sommes dans les membres de gauche et de droite de (22) parcourent respectivement les flèches sortant de $\mathcal{A}$ et les flèches entrant dans $\mathcal{A}$.

Démonstration: De (16) on a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{A}} \pi_j^* &= \sum_{j \in \mathcal{A}} \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^* p_{ij} \\ \sum_{j \in \mathcal{A}} \pi_j^* &= \sum_{j \in \mathcal{A}} \left(\sum_{i \in \mathcal{A}} \pi_i^* p_{ij} + \sum_{i \notin \mathcal{A}} \pi_i^* p_{ij} \right) \\ \sum_{j \in \mathcal{A}} \pi_j^* &= \sum_{i \in \mathcal{A}} \pi_i^* \sum_{j \in \mathcal{A}} p_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{A}} \sum_{i \notin \mathcal{A}} \pi_i^* p_{ij} \\ \sum_{j \in \mathcal{A}} \pi_j^* &= \sum_{i \in \mathcal{A}} \pi_i^* \left(1 - \sum_{j \notin \mathcal{A}} p_{ij} \right) + \sum_{j \in \mathcal{A}} \sum_{i \notin \mathcal{A}} \pi_i^* p_{ij} \\ \sum_{j \in \mathcal{A}} \pi_j^* &= \sum_{i \in \mathcal{A}} \pi_i^* - \sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{j \notin \mathcal{A}} \pi_i^* p_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{A}} \sum_{i \notin \mathcal{A}} \pi_i^* p_{ij} \\ \sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{j \notin \mathcal{A}} \pi_i^* p_{ij} &= \sum_{j \in \mathcal{A}} \sum_{i \notin \mathcal{A}} \pi_i^* p_{ij} \end{aligned}$$

■

2.4 Quelques chaînes récurrentes classiques

2.4.1 Chaîne de Markov à deux états

Un modèle simple de source binaire est une chaîne de Markov à deux états (l'état 0 et l'état 1: $\mathcal{S} = \{0, 1\}$), dont le diagramme de transition des états est représenté à la figure 1 et dont la

matrice de transition est

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} \quad (23)$$

où $0 \leq p, q \leq 1$ et $0 < p + q \leq 2$. Une telle chaîne de Markov peut par exemple modéliser le tirage d'une pièce de monnaie à pile ou face: 0 et 1 représentent les côtés pile et face. Elle peut aussi modéliser une suite binaire dans lequel la probabilité d'apparition de chaque symbole binaire ne dépend que du précédent. Enfin elle peut modéliser un canal binaire bruité: dans ce cas, la probabilité p est la probabilité qu'un symbole 0 émis soit erroné à la réception, et $1 - p$ est la probabilité qu'il soit transmis correctement. De même, q représente la probabilité qu'un symbole 1 soit émis mais qu'un 0 soit erronément reçu, tandis que $1 - q$ est la probabilité qu'il soit transmis correctement.

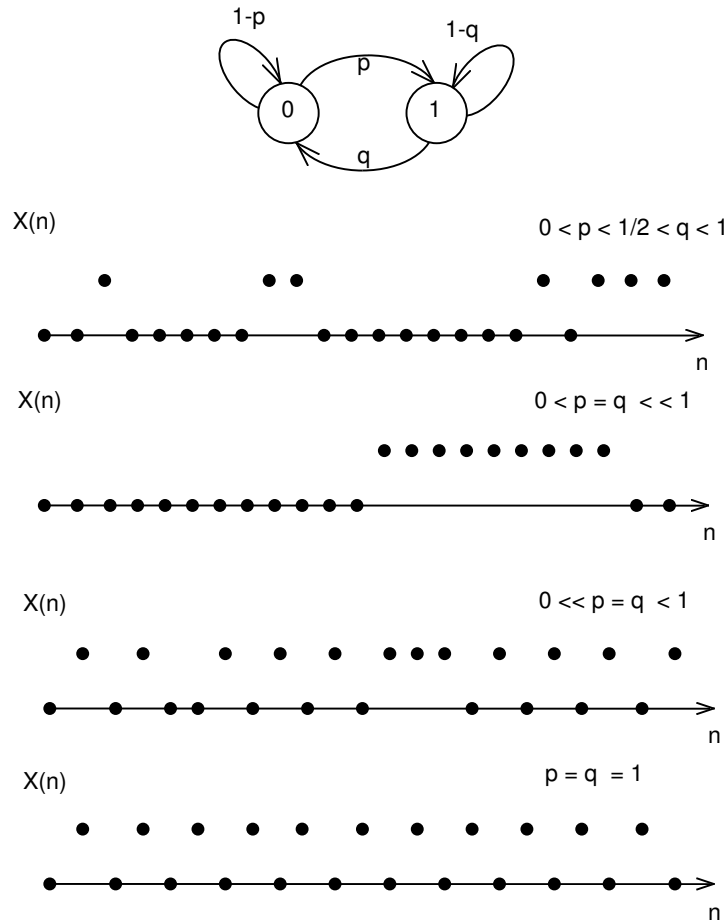


Figure 1: Chaîne de Markov à deux états: diagramme des transitions, et quelques trajectoires typiques pour certaines valeurs de p et q .

On peut calculer que la matrice de transition à n étapes est

$$P^n = \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q} \begin{bmatrix} p & -p \\ -q & q \end{bmatrix}. \quad (24)$$

On peut vérifier que cette chaîne est irréductible et apériodique si $p+q < 2$, et que tous ses états sont récurrents positifs. Par conséquent, toute distribution initiale de probabilités $\pi(0)$ tend vers la solution stationnaire qui est

$$\pi^* = \left[\frac{q}{p+q} \quad \frac{p}{p+q} \right]. \quad (25)$$

2.4.2 Marche aléatoire uni-dimensionnelle sur $\mathbb{Z}$

Considérons la **marche aléatoire uni-dimensionnelle** sur $\mathcal{S} = \mathbb{Z}$, décrite par le diagramme des transitions d'état de la figure 2, ou encore par l'équation

$$X(n+1) = X(n) + U(n)$$

où $U(n)$ est une suite de v.a. de Bernouilli i.i.d, prenant les valeurs 1 (resp. -1) avec la probabilité p (resp. $1-p$).

Un retour à l'état 0 en $2n$ étapes n'est possible que si l'état du processus s'est déplacé sur le diagramme n fois d'une position vers la droite, et n fois d'une position vers la gauche. Un retour à l'état 0 en $2n+1$ étapes est impossible. Par conséquent, comme la position du processus après $2n$ étapes est décrite par une v.a. binomiale $\text{Binom}(2n, p)$, on a

$$\begin{aligned} p_{00}^{(2n)} &= C_{2n}^n p^n (1-p)^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n (1-p)^n \\ p_{00}^{(2n+1)} &= 0 \end{aligned}$$

ou encore, en utilisant la formule de Stirling $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

$$p_{00}^{(2n)} = \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Si $p = 1/2$, (on parle alors de marche aléatoire symétrique) cette approximation devient pour de grandes valeurs de n

$$p_{00}^{(2n)} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \infty$$

ce qui montre que les états sont récurrents ². On peut de plus montrer qu'ils sont récurrents nuls. Si $p < 1/2$, la série converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} < \infty$$

²Il faudrait encore prouver que l'erreur due à l'approximation de $n!$ par la formule de Stirling est négligeable: c'est le cas ici.

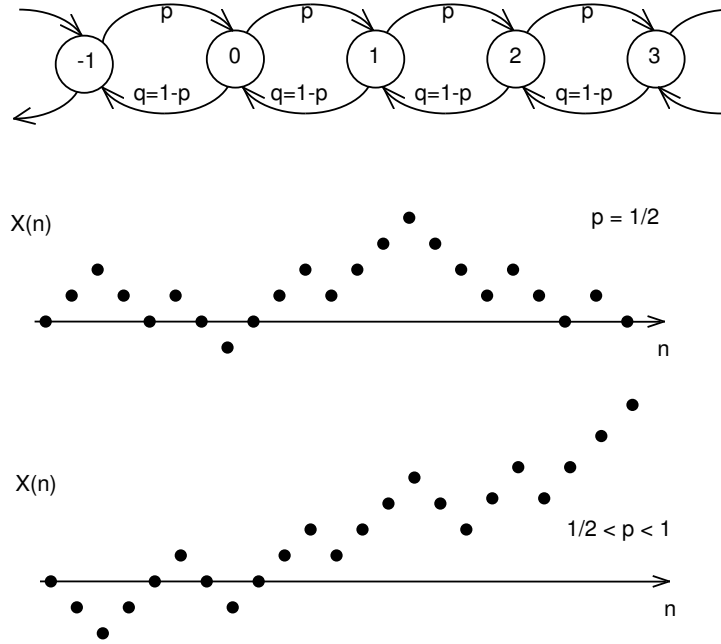


Figure 2: Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$: diagramme des transitions, et quelques trajectoires typiques pour certaines valeurs de p .

et les états sont transitoires.

On peut de même définir une marche aléatoire sur $\mathcal{S} = \mathbb{Z}^2$. Par exemple, dans le cas symétrique (toutes les directions de déplacement équiprobables), les probabilités de transition seraient

$$p_{(i,j),(i+1,j)} = p_{(i,j),(i-1,j)} = p_{(i,j),(i,j+1)} = p_{(i,j),(i,j-1)} = 1/4.$$

On montre de la même manière que tous les états sont récurrents.

Il faut signaler que cette propriété n'est cependant plus vraie pour une marche aléatoire sur $\mathcal{S} = \mathbb{Z}^k$ avec $k \geq 3$: tous les états sont alors transitoires!

2.4.3 Marche aléatoire uni-dimensionnelle sur $\{0, 1, 2, \dots, N\}$

Une marche aléatoire sur un espace d'état fini $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ est beaucoup plus simple à étudier. Les probabilités de transition à partir des états 0 et N doivent alors être modifiées. Nous considérons deux cas.

Le premier est celui où 0 et N font office de barrières 'bloquantes', empêchant la marche de se poursuivre au-delà de ces deux états, de sorte que $p_{NN} = p = 1 - p_{00}$ avec $0 < p < 1$, et dont le diagramme des transitions est représenté en haut de la figure 3. On peut vérifier que cette chaîne est alors ergodique, et donc que toute distribution de probabilités d'état tend vers

la distribution stationnaire

$$\pi_i^* = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \rho^i \quad (26)$$

pour $0 \leq i \leq N$, avec $\rho = p/(1 - p)$ (exercice 5).

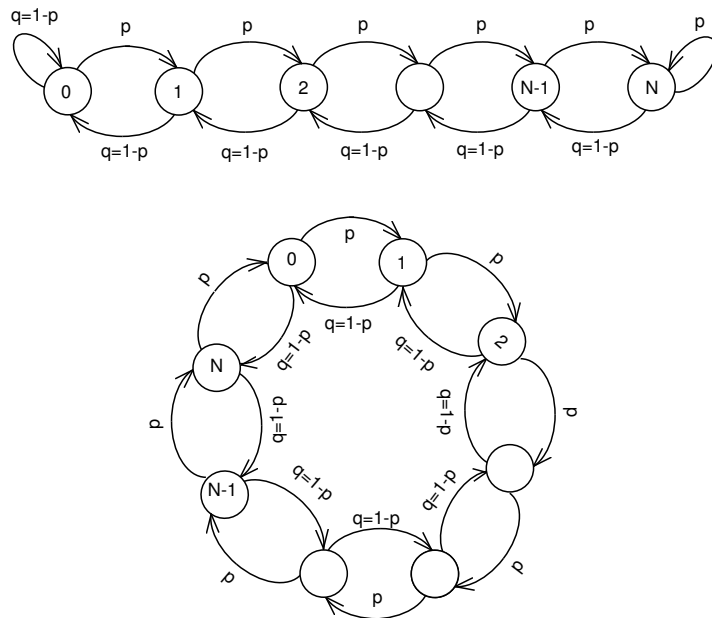


Figure 3: Marche aléatoire à barrières ‘bloquantes’ et sur un cercle.

Le second cas est une marche aléatoire sur un cercle, pour laquelle $p_{N0} = p = 1 - p_{0N}$ avec $0 < p < 1$, et dont le diagramme des transitions est représenté en bas de la figure 3. Si le nombre d’états $(N + 1)$ est impair, cette chaîne est alors ergodique, et toute distribution de probabilités d’état tend vers une distribution invariante unique, qui est (par symétrie, ou en utilisant l’exercice 6)

$$\pi_i^* = \frac{1}{N + 1} \quad (27)$$

pour $0 \leq i \leq N$. D’autre part, si $(N + 1)$ est pair, la chaîne est alors périodique, de période 2. On peut montrer que (27) est encore sa seule distribution invariante, mais le théorème 1 ne s’applique pas. Toutefois, on peut montrer que toute distribution de probabilités d’état tend vers cette distribution stationnaire au sens de Cesàro, à savoir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \pi_i(m) = \pi_i^* = \frac{1}{N + 1}.$$

2.4.4 Urnes d’Ehrenfest

Les physiciens T. et P. Ehrenfest introduisirent un modèle simple de mécanique statistique pour décrire la diffusion de particules à travers une membrane poreuse. On considère un ensemble

de N particules distribuées dans deux urnes. A chaque instant n , une de ces N particules est choisie au hasard, extraite de son urne et placée dans l'autre urne. Le nombre de particules dans une urne est une chaîne de Markov. Si $X(n)$ décrit le nombre de particules dans la première urne, les probabilités de transition non nulles sont

$$p_{i,i+1} = \frac{N-i}{N} \quad p_{i,i-1} = \frac{i}{N}.$$

Tous les $(N+1)$ états de cette chaîne sont récurrents positifs. Elle possède une distribution stationnaire

$$\pi_i^* = C_N^i \frac{1}{2^N}, \quad (28)$$

pour $0 \leq i \leq N$, comme on le verra à l'exercice 15. Cette distribution est la loi binomiale

Binom $(N, 1/2)$, dans laquelle chaque particule a la même probabilité de se trouver dans chaque urne, indépendamment des autres particules.

A nouveau, la chaîne est périodique, de période 2, et donc le théorème 1 ne s'applique pas tel quel. Toutefois, toute distribution de probabilités d'état tend vers la distribution stationnaire binomiale Binom $(N, 1/2)$ au sens de Cesàro. Ceci montre que quelle que soit la distribution initiale des particules dans les deux urnes, cette distribution tend vers une distribution d'équilibre, et est une illustration du principe d'irréversibilité thermodynamique (la périodicité d'ordre 2 est en fait un artefact dû à la discrétisation du temps, qui disparaît si la chaîne est à temps continu). Cependant, la chaîne étant récurrente positive, il y aura, avec probabilité 1, un instant où une des deux urnes sera vide, ce qui contredit ce principe. Le paradoxe est levé en prenant N très grand (ce qui est le cas réel), car dans ce cas $\pi_0^* = 1/2^N$ est beaucoup plus faible que $\pi_{N/2}^* \approx \sqrt{2/\pi N}$. En fait on peut montrer que

$$\begin{aligned} E[T_0 \mid X(0) = N/2] &\approx 2^N/N \\ E[T_{N/2} \mid X(0) = 0] &\approx (N/2)(1 + \ln(N/2)) \end{aligned}$$

et donc qu'il est exponentiellement plus rapide de passer à un état où les nombres de particules entre les deux urnes sont équilibrés que l'inverse.

2.5 Temps d'atteinte

Retournons au temps de premier passage, que nous avons déjà défini à l'équation (10) comme le temps minimal (non nul) requis pour atteindre un état i .

On peut étendre cette définition en ne considérant non pas un seul état $i \in \mathcal{S}$, mais un sous-ensemble d'états $\mathcal{A}$ de $\mathcal{S}$. On définit ainsi le *temps d'atteinte* de $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ par

$$H_{\mathcal{A}} = \inf\{n \in \mathbb{N} : X(n) \in \mathcal{A}\},$$

et par $H_{\mathcal{A}} = \infty$ si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : X(n) \in \mathcal{A}\}$ est vide. Le domaine de $H_{\mathcal{A}}$ est donc³ $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

³Remarquons que si $\mathcal{A} = \{i\}$, $H_{\mathcal{A}} = H_{\{i\}} \neq T_i$, car T_i ne peut prendre de valeur nulle, au contraire de $H_{\{i\}}$.

Nous nous intéressons tout d'abord aux probabilités que partant d'un état $i \in \mathcal{S}$ on atteigne le sous-ensemble $\mathcal{A}$, que nous notons

$$h_{i\mathcal{A}} = P(H_{\mathcal{A}} < \infty \mid X(0) = i) = P(X(n) \in \mathcal{A} \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} \mid X(0) = i). \quad (29)$$

Ces probabilités seront d'un intérêt particulier si $\mathcal{A}$ est un état (ou une classe d'états) absorbant(s). On les appelle alors probabilités d'absorption à partir de l'état i .

Le théorème suivant permet de les calculer:

Théorème 5 *Le vecteur des probabilités $\mathbf{h}_{\mathcal{A}} = [h_{i\mathcal{A}}, i \in \mathcal{S}]$ est la solution minimale non négative du système d'équations linéaires*

$$\begin{aligned} h_{i\mathcal{A}} &= 1 & \text{si } i \in \mathcal{A} \\ h_{i\mathcal{A}} &= \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} h_{j\mathcal{A}} & \text{si } i \notin \mathcal{A} \end{aligned} \quad (30)$$

Démonstration: Si $X(0) = i \in \mathcal{A}$, $H_{\mathcal{A}} = 0$ et donc $h_{i\mathcal{A}} = 1$. Si $X(0) = i \notin \mathcal{A}$, la définition même de chaîne de Markov entraîne que

$$\begin{aligned} h_{i\mathcal{A}} &= P(X(n) \in \mathcal{A} \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} \mid X(0) = i) \\ &= P(X(n) \in \mathcal{A} \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}_0 \mid X(0) = i) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{S}} P(X(n) \in \mathcal{A} \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}_0 \mid X(1) = j, X(0) = i) P(X(1) = j \mid X(0) = i) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{S}} P(X(n) \in \mathcal{A} \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}_0 \mid X(1) = j) p_{ij} \\ &= \sum_{j \in \mathcal{S}} P(X(n) \in \mathcal{A} \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} \mid X(0) = j) p_{ij} \\ &= \sum_{j \in \mathcal{S}} h_{j\mathcal{A}} p_{ij} \end{aligned}$$

et on a donc montré que les $h_{i\mathcal{A}}, i \in \mathcal{S}$ sont solutions du système d'équations (30).

Il reste à montrer que cet ensemble de probabilités en est la solution minimale. Supposons que $[g_i, i \in \mathcal{S}]$ soit une autre solution de (30). Si $X(0) = i \in \mathcal{A}$, $g_i = h_{i\mathcal{A}} = 1$. Supposons désormais que $X(0) = i \notin \mathcal{A}$. Dans ce cas, comme $[g_i, i \in \mathcal{S}]$ est une solution de (30),

$$g_i = \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} g_j = \sum_{j \in \mathcal{A}} p_{ij} g_j + \sum_{j \notin \mathcal{A}} p_{ij} g_j = \sum_{j \in \mathcal{A}} p_{ij} + \sum_{j \notin \mathcal{A}} p_{ij} g_j. \quad (31)$$

On peut de même écrire que si $j \notin \mathcal{A}$

$$g_j = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{jk} g_k = \sum_{k \in \mathcal{A}} p_{jk} + \sum_{k \notin \mathcal{A}} p_{jk} g_k.$$

En substituant g_j dans le dernier terme de (31) par cette expression, il vient

$$\begin{aligned} g_i &= \sum_{j \in \mathcal{A}} p_{ij} + \sum_{j \notin \mathcal{A}} p_{ij} \left(\sum_{k \in \mathcal{A}} p_{jk} + \sum_{k \notin \mathcal{A}} p_{jk} g_k \right) = \sum_{j \in \mathcal{A}} p_{ij} + \sum_{j \notin \mathcal{A}} \sum_{k \in \mathcal{A}} p_{ij} p_{jk} + \sum_{j \notin \mathcal{A}} \sum_{k \notin \mathcal{A}} p_{ij} p_{jk} g_k \\ &= P(X(1) \in \mathcal{A} \mid X(0) = i) + P(X(1) \notin \mathcal{A}, X(2) \in \mathcal{A} \mid X(0) = i) + \sum_{j \notin \mathcal{A}} \sum_{k \notin \mathcal{A}} p_{ij} p_{jk} g_k. \end{aligned}$$

En répétant les substitutions des g_k qui apparaissent à chaque nouveau développement, on obtient après la n ième substitution

$$\begin{aligned} g_i &= P(X(1) \in \mathcal{A} \mid X(0) = i) + P(X(1) \notin \mathcal{A}, X(2) \in \mathcal{A} \mid X(0) = i) + \dots \\ &\quad + P(X(1) \notin \mathcal{A}, X(2) \notin \mathcal{A}, \dots, X(n-1) \notin \mathcal{A}, X(n) \in \mathcal{A} \mid X(0) = i) \\ &\quad + \sum_{j_1 \notin \mathcal{A}} \sum_{j_2 \notin \mathcal{A}} \dots \sum_{j_n \notin \mathcal{A}} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \dots p_{j_{n-1} j_n} g_{j_n}. \end{aligned}$$

Comme $g_{j_n} \geq 0$, le dernier terme du membre de droite de cette expression est non-négatif, et la somme des n premiers vaut

$$P(X(m) \in \mathcal{A} \text{ pour un certain } m \in [1, n] \mid X(0) = i)$$

c'est-à-dire $P(H_{i\mathcal{A}} \leq n \mid X(0) = i)$. Dès lors $g_i \geq P(H_{i\mathcal{A}} \leq n \mid X(0) = i)$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, et

$$g_i \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P(H_{i\mathcal{A}} \leq n \mid X(0) = i) = P(H_{i\mathcal{A}} < \infty \mid X(0) = i) = h_{i\mathcal{A}}.$$

■

Une des applications les plus fréquentes de ce théorème est le cas où $\mathcal{A}$ est une classe absorbante. Lorsque la chaîne est finie, on peut s'affranchir du calcul de la solution minimale, car la solution de (30) est unique. Ce n'est souvent plus le cas lorsque l'espace d'états est infini.

Nous nous intéressons d'autre part au temps moyen que prend $X(n)$ pour atteindre le sous-ensemble $\mathcal{A}$:

$$\mu_{i\mathcal{A}}^H = E[H_{\mathcal{A}} \mid X(0) = i] = \sum_{m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} m P(H_{\mathcal{A}} = m \mid X(0) = i). \quad (32)$$

Remarquons que cette dernière ligne peut être 'explicitée' en fonction du processus X comme

$$\mu_{i\mathcal{A}}^H = \sum_{m \in \mathbb{N}} m P(X(m) \in \mathcal{A} \text{ et } X(n) \notin \mathcal{A} \text{ pour } 0 \leq n \leq m-1 \mid X(0) = i)$$

si $h_{i\mathcal{A}} = 1$, c'est-à-dire si le processus $X(n)$ atteint le sous-ensemble $\mathcal{A}$ en un temps fini avec probabilité 1, et par $\mu_{i\mathcal{A}}^H = \infty$ si $h_{i\mathcal{A}} < 1$.

Le calcul de (32) fait de nouveau appel à un théorème similaire au précédent:

Théorème 6 *Le vecteur des temps moyens d'atteinte $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{A}}^H = [\mu_{i\mathcal{A}}^H, i \in \mathcal{S}]$ est la solution minimale non négative du système d'équations linéaires*

$$\begin{aligned} \mu_{i\mathcal{A}}^H &= 0 & \text{si } i \in \mathcal{A} \\ \mu_{i\mathcal{A}}^H &= 1 + \sum_{j \notin \mathcal{A}} p_{ij} \mu_{j\mathcal{A}}^H & \text{si } i \notin \mathcal{A} \end{aligned} \quad (33)$$

Démonstration: Si $X(0) = i \in \mathcal{A}$, $H_{\mathcal{A}} = 0$ et donc $\mu_{i\mathcal{A}}^H = 0$. Si $X(0) = i \notin \mathcal{A}$, alors $H_{\mathcal{A}} \geq 1$ et donc pour tout $j \in \mathcal{S}$, le fait que $X(n)$ soit une chaîne de Markov implique que

$$E[H_{\mathcal{A}} \mid X(1) = j] = 1 + E[H_{\mathcal{A}} \mid X(0) = j]$$

et donc que

$$\begin{aligned}
\mu_{i\mathcal{A}}^H &= E[H_{\mathcal{A}} | X(0) = i] = \sum_{j \in \mathcal{S}} E[H_{\mathcal{A}} | X(1) = j, X(0) = i] P(X(1) = j | X(0) = i) \\
&= \sum_{j \in \mathcal{S}} E[H_{\mathcal{A}} | X(1) = j] p_{ij} = \sum_{j \in \mathcal{S}} (1 + E[H_{\mathcal{A}} | X(0) = j]) p_{ij} \\
&= \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{S}} E[H_{\mathcal{A}} | X(0) = j] p_{ij} = 1 + \sum_{j \notin \mathcal{A}} E[H_{\mathcal{A}} | X(0) = j] p_{ij} = 1 + \sum_{j \notin \mathcal{A}} p_{ij} \mu_{j\mathcal{A}}^H.
\end{aligned}$$

On a donc montré que les $\mu_{i\mathcal{A}}^H, i \in \mathcal{S}$ sont solutions du système d'équations (33).

Il reste à montrer que cet ensemble de temps moyens en est la solution minimale. Supposons que $[\mu_i^G, i \in \mathcal{S}]$ soit une autre solution de (33). Si $X(0) = i \in \mathcal{A}$, $\mu_i^G = \mu_{i\mathcal{A}}^H = 0$. Supposons désormais que $X(0) = i \notin \mathcal{A}$. Dans ce cas, comme $[\mu_i^G, i \in \mathcal{S}]$ est une solution de (33)

$$\begin{aligned}
\mu_i^G &= 1 + \sum_{j \notin \mathcal{A}} p_{ij} \mu_j^G = 1 + \sum_{j \notin \mathcal{A}} p_{ij} \left(1 + \sum_{k \notin \mathcal{A}} p_{jk} \mu_k^G \right) = 1 + \sum_{j \notin \mathcal{A}} p_{ij} + \sum_{j \notin \mathcal{A}} \sum_{k \notin \mathcal{A}} p_{ij} p_{jk} \mu_k^G \\
&= P(H_{\mathcal{A}} \geq 1 | X(0) = i) + P(H_{\mathcal{A}} \geq 2 | X(0) = i) + \sum_{j \notin \mathcal{A}} \sum_{k \notin \mathcal{A}} p_{ij} p_{jk} \mu_k^G.
\end{aligned}$$

En répétant les substitutions des μ_k^G qui apparaissent à chaque nouveau développement, on obtient après la n ème substitution

$$\begin{aligned}
\mu_i^G &= P(H_{\mathcal{A}} \geq 1 | X(0) = i) + P(H_{\mathcal{A}} \geq 2 | X(0) = i) + \dots + P(H_{\mathcal{A}} \geq n | X(0) = i) \\
&\quad + \sum_{j_1 \notin \mathcal{A}} \sum_{j_2 \notin \mathcal{A}} \dots \sum_{j_n \notin \mathcal{A}} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \dots p_{j_{n-1} j_n} \mu_{j_n}^G.
\end{aligned}$$

Comme $\mu_{j_n}^G \geq 0$, le dernier terme du membre de droite de cette expression est non-négatif, d'où

$$\mu_i^G \geq P(H_{\mathcal{A}} \geq 1 | X(0) = i) + \dots + P(H_{\mathcal{A}} \geq n | X(0) = i) = \sum_{m=1}^n m P(H_{\mathcal{A}} = m | X(0) = i)$$

et en laissant $n \rightarrow \infty$,

$$\mu_i^G \geq \sum_{m=1}^{\infty} m P(H_{\mathcal{A}} = m | X(0) = i) = \mu_{i\mathcal{A}}^H.$$

■

2.6 Quelques chaînes absorbantes classiques

2.6.1 Ruine du joueur sur $\{0, 1, 2, \dots, N\}$

Deux joueurs jouent à pile ou face une certaine somme d'argent. La somme initialement possédée par le joueur A est égale à i haricots, et celle possédée par B vaut $(N - i)$ haricots. Ils jouent

leurs fortunes respectives à pile ou face: chaque fois que le côté pile apparaît, ce qui se produit avec une probabilité p , le joueur B donne un haricot à A, et vice-versa sinon. Le jeu se termine lorsqu'un des deux joueurs se retrouve sans haricots.

Ce jeu est une chaîne de Markov dont le diagramme des transitions est représenté à la figure 4. Notons que c'est un cas particulier de marche aléatoire avec deux barrières absorbantes (les états 0 et N). Il est clair que $\{0\}$ et $\{N\}$ sont deux classes absorbantes de cette chaîne, et que tous les autres états $\{1, \dots, N-1\}$ forment une classe transitoire. Les questions qui nous intéressent sont (i) qui va gagner, et (ii) combien de temps va durer ce jeu ?

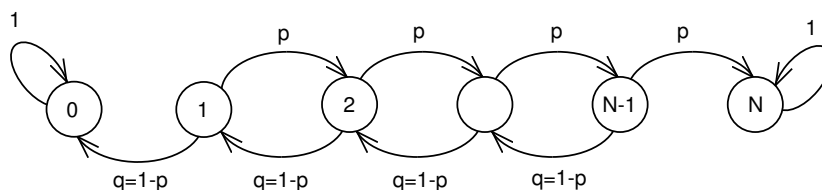


Figure 4: Ruine du joueur ou marche aléatoire à deux barrières 'absorbantes'.

(i) Pour répondre à la première question, plaçons-nous du côté du joueur A, et calculons la probabilité qu'il gagne, c'est-à-dire que le nombre de haricots en sa possession au temps n , $X(n)$, atteigne l'état N . Comme on sait que $X(0) = i$, cette probabilité est donc

$$h_{iN} = P(X(n) = N \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} \mid X(0) = i) = P(H_N < \infty \mid X(0) = i)$$

où H_N est la v.a. décrivant le temps d'atteinte de l'état N . D'après le théorème 5, ce temps est la solution minimale non négative du système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} h_{iN} &= 1 & \text{si } i &= N \\ h_{iN} &= \sum_{j=0}^N p_{ij} h_{jN} & \text{si } 0 \leq i \leq N-1 \end{aligned} \quad (34)$$

Pour cet exemple-ci, le système (34) s'écrit

$$\begin{aligned} h_{iN} &= 1 & \text{si } i &= N \\ h_{iN} &= qh_{i-1,N} + ph_{i+1,N} & \text{si } 1 \leq i \leq N-1 \\ h_{iN} &= h_{iN} & \text{si } i &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Maintenant, l'application directe du théorème reviendrait à chercher la solution minimale de ce système d'équations. Il est beaucoup plus rapide d'utiliser directement le fait que 0 est lui aussi un état absorbant, et donc qu'il est impossible d'atteindre N à partir de 0. De la sorte, on remplace la troisième et dernière équation (triviale !) de (35) par $h_{0N} = 0$, si bien que le système qu'il faut résoudre est le système d'équations aux récurrences

$$h_{iN} = qh_{i-1,N} + ph_{i+1,N} \quad (36)$$

pour $1 \leq i \leq N-1$ avec les conditions aux bords $h_{0N} = 0$ et $h_{NN} = 1$. Comme il y a deux conditions aux bords différentes, la solution de (36) sera de toutes façons unique. On n'a donc pas à chercher la solution minimale.

Rappelons la forme de la solution générale de l'équation aux récurrences linéaire du second ordre à coefficients constants a, b, c

$$ax_{i+1} + bx_i + cx_{i-1} = 0.$$

Soient α et β les deux racines du trinôme du second degré $az^2 + bz + c$. Si $\alpha \neq \beta$, la solution a la forme

$$x_i = K_a \alpha^i + K_b \beta^i$$

tandis que si $\alpha = \beta \neq 0$, elle a la forme $x_i = (K_a + iK_b)\alpha^i$. Ici, $a = p$, $b = -1$ et $c = q$, on calcule que $\alpha = 1$ et $\beta = q/p$ d'où

$$h_{iN} = \begin{cases} K_a + K_b(q/p)^i & \text{si } p \neq q \\ K_a + K_b i & \text{si } p = q \end{cases}$$

Les deux constantes K_a et K_b sont déterminées par les deux conditions aux bords $h_{0N} = 0$ et $h_{NN} = 1$, et on trouve finalement, pour $1 \leq i \leq N-1$,

$$h_{iN} = \begin{cases} \frac{(q/p)^i - 1}{(q/p)^N - 1} & \text{si } p \neq q \\ i/N & \text{si } p = q \end{cases} \quad (37)$$

(ii) La réponse à la seconde question est

$$\mu_{i\{0,N\}}^H = E[H_{\{0,N\}} \mid X(0) = i]. \quad (38)$$

Le calcul de (38) est basé sur le théorème 6, et fait l'objet de l'exercice 11. On trouve

$$\mu_{i\{0,N\}}^H = \begin{cases} \frac{1}{p-q} \left(N \frac{(q/p)^i - 1}{(q/p)^N - 1} - i \right) & \text{si } p \neq q \\ i(N-i) & \text{si } p = q \end{cases} \quad (39)$$

2.6.2 Ruine du joueur sur $\mathbb{N}$

On reprend le même exemple que le précédent, mais cette fois le joueur B est un casino infiniment riche, si bien que sa fortune est sans limite (cfr figure 5). Que devient la probabilité du joueur A de ne pas tout perdre au jeu (mais au contraire de continuer à jouer indéfiniment) ?

Cette probabilité vaut $(1 - h_{i0})$, avec

$$h_{i0} = P(X(n) = 0 \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} \mid X(0) = i) = P(H_0 < \infty \mid X(0) = i)$$

où H_0 est la v.a. décrivant le temps d'atteinte de l'état 0. D'après le théorème 5, ce temps est la solution minimale non négative du système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} h_{i0} &= 1 & \text{si } i &= 0 \\ h_{i0} &= qh_{i-1,0} + ph_{i+1,0} & \text{si } i &\in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \quad (40)$$

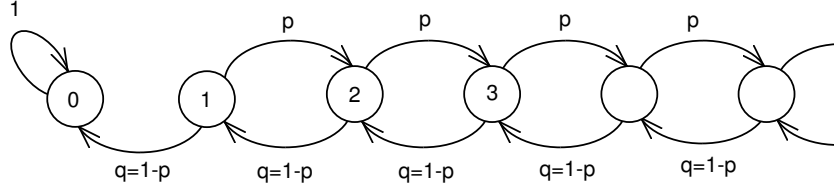


Figure 5: Ruine du joueur face à un adversaire infiniment riche ou marche aléatoire à une barrière ‘absorbante’.

On a à nouveau un système d’équations aux récurrences

$$h_{i0} = qh_{i-1,0} + ph_{i+1,0}$$

pour $i \geq 1$, mais cette fois on n’a plus qu’une seule condition au bord $h_{00} = 1$, ce qui nous laisse une indétermination sur une des deux valeurs K_a ou K_b dans l’expression de la solution générale

$$h_{i0} = \begin{cases} K_a + K_b(q/p)^i & \text{si } p \neq q \\ K_a + K_b i & \text{si } p = q \end{cases}$$

Si $p < q$ – ce qu’appliquent tous les casinos – la restriction $0 \leq h_{i0} \leq 1$ nous impose de prendre $K_b = 0$ et donc $K_a = 1$. Si $p > q$, comme $K_a + K_b = h_{00} = 1$, cette équation devient

$$h_{i0} = (q/p)^i + K_a(1 - (q/p)^i).$$

Pour que $h_{i0} \geq 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}_0$, il faut que $K_a \geq 0$. L’indétermination sur K_a est levée en cherchant la solution minimale: celle-ci est en effet obtenue pour $K_a = 0$. Enfin, si $p = q$, la restriction $0 \leq h_{i0} \leq 1$ nous impose encore de prendre $K_b = 0$ et donc $K_a = 1$.

Par conséquent, pour tout $i \in \mathbb{N}_0$,

$$h_{i0} = \begin{cases} (q/p)^i & \text{si } p > q \\ 1 & \text{si } p \leq q \end{cases}$$

et donc la probabilité cherchée vaut

$$1 - h_{i0} = \begin{cases} 1 - (q/p)^i & \text{si } p > 1/2 \\ 0 & \text{si } p \leq 1/2 \end{cases} \quad (41)$$

Donc, si $p > 1/2$ il y a une probabilité non nulle que le joueur ne perde pas toute sa fortune au jeu, même s’il n’arrête jamais. Par contre, si $p \leq 1/2$, il perdra presque sûrement tout son avoir. Remarquons que même dans le cas où les jeux du casino ne sont pas biaisés, le joueur perd toute sa fortune avec probabilité 1: c’est le paradoxe de la ruine du joueur.

2.6.3 Processus de branchement ou d’arborescence

Les processus de branchement sont des processus Markoviens inspirés (et utilisés) par la biologie, pour modéliser la croissance de population de bactéries ou des problèmes de génétique. Ils peuvent également modéliser la génération de particules par réaction en chaîne dans des dispositifs physiques, comme l’effet d’avalanche dans la photodiode APD introduite au module précédent.

On considère une population d'individus capables de produire des descendants. On appelle $(n+1)$ l'indice de la génération, et on étudie le nombre $X(n)$ d'individus de la génération $(n+1)$. On suppose que chaque individu i de la $(n+1)$ ème génération aura généré durant son existence C_i^n descendants, où les C_i^n forment une suite de v.a. i.i.d, de loi de probabilité $P(C_i^n = k) = c_k$ donnée pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La première génération ne comporte qu'un seul individu ($X(0) = 1$), qui a C_1^0 descendants, si bien que le nombre d'individus de la seconde génération est $X(1) = C_1^0$. En continuant de la sorte, à la $(n+1)$ ème génération, il y aura donc

$$X(n) = C_1^{n-1} + C_2^{n-1} + \dots + C_{X(n-1)}^{n-1}$$

individus. Ce processus est clairement une chaîne de Markov, car $X(n)$ ne dépend que de $X(n-1)$, et pas de $X(n-2), \dots, X(0)$. Si $c_0 = 0$, l'état 0 ne sera jamais atteint à partir de $X(0) = 1$, et la population ne fera que croître. Dans la suite, nous supposons toujours que $c_0 > 0$. Dans ce cas, l'état 0 est absorbant et tous les autres sont transitoires, car $p_{i0} = c_0^i$. Dès lors tout sous-ensemble fini d'états $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ ne sera visité qu'un nombre (presque sûrement) fini de fois, et par conséquent, soit la population disparaît entièrement, soit sa taille devient infinie.

La probabilité d'extinction de la population sachant que sa taille initiale est i est

$$h_{i0} = P(X(n) = 0 \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} \mid X(0) = i).$$

Elle est par conséquent la solution minimale non négative de

$$\begin{aligned} h_{i0} &= 1 & \text{si } i &= 0 \\ h_{i0} &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} h_{j0} & \text{si } i &\in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \quad (42)$$

Dans notre cas, $X(0) = 1$ et la probabilité cherchée est donc h_{10} .

Maintenant, h_{i0} est la probabilité que tous les descendants de i familles différentes "meurent" un jour ou l'autre. Comme l'évolution du nombre de descendants est indépendante d'une famille à l'autre (car les C_i^n forment une suite de v.a. indépendantes pour tout i et pour tout n), cette probabilité est le produit des i probabilités que chaque famille s'éteigne. Comme les C_i^n sont identiquement distribuées, ces i probabilités sont identiques, et valent chacune h_{10} . On a donc $h_{i0} = h_{10}^i$ pour tout $i \in \mathbb{N}_0$.

D'autre part,

$$p_{1j} = P(X(n) = j \mid X(n-1) = 1) = P(C_1^{n-1} = j) = c_j,$$

si bien que la probabilité cherchée, h_{10} , est la solution minimale de

$$h_{10} = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1j} h_{j0} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j h_{10}^j.$$

Le dernier terme de cette équation n'est autre que la fonction génératrice de probabilité des variables C_i^n (celles-ci étant i.i.d., elles ont toutes la même fonction génératrice de probabilité)

$$G_C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(C_i^n = k) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k c_k,$$

évaluée en $z = h_{10}$. En notant

$$F(z) = G_C(z) - z,$$

on conclut donc que h_{10} est la solution réelle minimale non négative de $F(z) = 0$.

On calcule aisément que

$$\frac{d^2 F}{dz^2}(z) = \frac{d^2 G_C}{dz^2}(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2} \geq 0$$

pour tout $0 \leq z \leq 1$, de sorte que $F(z)$ est une fonction convexe sur $[0, 1]$, qui vaut $F(0) = G_C(0) = c_0 > 0$ en $z = 0$ et $F(1) = G_C(1) - 1 = 0$ en $z = 1$. Dès lors, si $F(z)$ atteint un minimum dans $]0, 1[$, l'équation $F(z) = 0$ a une solution $h_{10} < 1$, comme indiqué à la figure 6(a). Sinon, la solution est $h_{10} = 1$, comme indiqué à la figure 6(b). Par conséquent, $h_{10} = 1$ si et seulement si $dF(z)/dz < 0$ pour tout $0 \leq z < 1$. Désignons par μ_C la moyenne des v.a. C_i^n . Comme

$$\frac{dF}{dz}(z) = \frac{dG_C}{dz}(z) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1} - 1 < \sum_{k=1}^{\infty} k c_k - 1 = \mu_C - 1,$$

pour tout $z \in [0, 1[$, on a que $h_{10} = 1$ si $\mu_C \leq 1$. Par contre, si $\mu_C > 1$, $dF(z)/dz \rightarrow \mu_C - 1 > 0$ pour des valeurs de z proches de 1, et donc le minimum est atteint dans $]0, 1[$. En conclusion, le probabilité d'extinction de la population vaut l'unité si et seulement si le nombre moyen de descendants générés par individu est inférieur ou égal à 1.

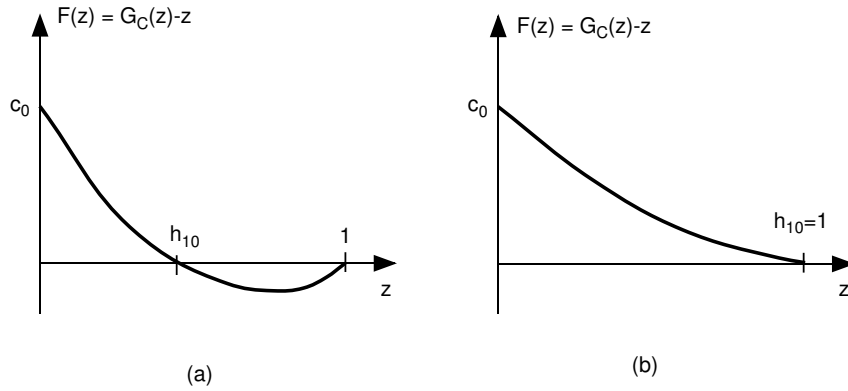


Figure 6: Solution minimale h_{10} de l'équation $F(z) = z$.

2.7 Chaînes réversibles

2.7.1 Définition

Supposons qu'on ait une chaîne de Markov ergodique à l'état stationnaire, et qu'à partir d'un certain temps n , on considère la séquence d'états $X(n), X(n-1), X(n-2), \dots, X(0)$, c'est-à-dire la chaîne originelle en remontant le temps (backward chain). On peut montrer que cette séquence est elle-même une chaîne de Markov en montrant que

$$\begin{aligned}
 & P(X(n) = j \mid X(n+1) = i, X(n+2) = k, X(n+3) = l, \dots) \\
 &= \frac{P(X(n) = j, X(n+2) = k, X(n+3) = l, \dots \mid X(n+1) = i)}{P(X(n+2) = k, X(n+3) = l, \dots \mid X(n+1) = i)} \\
 &= \frac{P(X(n+2) = k, X(n+3) = l, \dots \mid X(n+1) = i, X(n) = j)P(X(n) = j \mid X(n+1) = i)}{P(X(n+2) = k, X(n+3) = l, \dots \mid X(n+1) = i)} \\
 &= \frac{P(X(n+2) = k, X(n+3) = l, \dots \mid X(n+1) = i)P(X(n) = j \mid X(n+1) = i)}{P(X(n+2) = k, X(n+3) = l, \dots \mid X(n+1) = i)} \\
 &= P(X(n) = j \mid X(n+1) = i).
 \end{aligned}$$

A partir de la formule de Bayes, on peut calculer les probabilités de transitions de la chaîne "renversée":

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_{ij} &= P(X(n) = j \mid X(n+1) = i) \\
 &= \frac{P(X(n+1) = i \mid X(n) = j)P(X(n) = j)}{P(X(n+1) = i)} = \frac{p_{ji}\pi_j^*}{\pi_i^*}
 \end{aligned} \tag{43}$$

où les $\{\pi_i^*, i \in \mathcal{S}\}$ sont les probabilités d'état stationnaires de la chaîne.

Si $\tilde{p}_{ij} = p_{ij}$ pour tout $i, j \in \mathcal{S}$, alors la chaîne de Markov est dite *réversible* (temporellement). A cause de (43), une chaîne de Markov ergodique est donc réversible si pour tout $i, j \in \mathcal{S}$

$$\pi_i^* p_{ij} = \pi_j^* p_{ji}. \tag{44}$$

Cette condition signifie que le taux avec lequel le processus passe de l'état i à l'état j , à savoir $\pi_i^* p_{ij}$, est égal au taux avec lequel le processus passe de l'état j à l'état i , à savoir $\pi_j^* p_{ji}$. Pour cette raison, on appelle ces équations *équations de balance*.

Cette condition permet de simplifier le calcul de la distribution stationnaire: si on trouve un ensemble de réels non négatifs $\{x_i, i \in \mathcal{S}\}$ dont la somme fait 1 et tels que

$$x_i p_{ij} = x_j p_{ji}$$

alors ces quantités sont les probabilités d'état stationnaires π_i^* . En effet, en sommant cette dernière relation sur i , on obtient

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} x_i p_{ij} = x_j \sum_{i \in \mathcal{S}} p_{ji} = x_j$$

et d'autre part la distribution stationnaire d'une chaîne ergodique est unique, d'où $x_i = \pi_i^*$.

2.7.2 Exemples

- **Marche aléatoire uni-dimensionnelle à barrières bloquantes.**

Remarquons que pour toute trajectoire prise jusqu'à n'importe quel temps n ,

$$X(0), X(1), X(2), X(3), \dots, X(n-1), X(n)$$

le nombre de transitions de l'état i à l'état $(i+1)$ ne peut différer du nombre de transitions de l'état $(i+1)$ à l'état i que d'une unité au plus, car entre deux transitions de i à $(i+1)$, il doit nécessairement y avoir eu une transition de $(i+1)$ à i et vice-versa (en effet, la seule manière de revenir à l'état i à partir d'un état $j \geq i$ est de repasser par $(i+1)$).

Par conséquent, la proportion sur le long terme de transitions de i à $(i+1)$ est égale à la proportion de transitions de $(i+1)$ à i , et donc cette chaîne est réversible. On vérifie de fait que les probabilités (26) satisfont à

$$\pi_i^* p_{ij} = \pi_j^* p_{ji}.$$

En fait le même argument s'étend à toute chaîne de Markov à barrières bloquantes dans laquelle les transitions entre états sont limitées aux deux voisins immédiats, sans être nécessairement identiques pour tous les états i ; i.e. pour toute chaîne pour laquelle

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &= 1 - p_{i,i-1} \text{ pour } 1 \leq i \leq N-1 \\ p_{01} &= 1 - p_{00} \\ p_{NN} &= 1 - p_{N,N-1}. \end{aligned} \tag{45}$$

- **Marche aléatoire sur un cercle.**

Ici par contre, la distribution stationnaire est (27), et la condition de réversibilité devient $p_{ij} = p_{ji}$ pour tout $i \neq j$, ce qui entraîne que $p = p_{i,i+1} = 1 - p_{i,i-1}$ et donc $p = 1/2$. Par conséquent, si $p \neq 1/2$, cette chaîne n'est pas réversible.

- **Urnes d'Ehrenfest.**

Les probabilités de transition satisfaisant (45), cette chaîne est réversible. L'exercice 16 montrera comment cette propriété nous permet de calculer facilement la distribution (28), à partir des équations de balance

$$\pi_{i-1}^* p_{i-1,i} = \pi_i^* p_{i,i-1}.$$

2.8 Ergodisme

Nous avons déjà mentionné qu'une chaîne de Markov homogène irréductible, apériodique et dont tous les états sont récurrents positifs est dite *ergodique*. Ce terme est à rapprocher du théorème suivant, que nous ne démontrons pas:

Théorème 7 Si $X(n)$ est une chaîne irréductible récurrente positive, dont la distribution stationnaire est $\pi^* = [\pi_0^* \ \pi_1^* \ \dots]$ alors pour toute fonction bornée $f : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$,

$$P \left(\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} f(X(n)) \rightarrow \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^* f(i) \text{ pour } m \rightarrow \infty \right) = 1. \quad (46)$$

En particulier, pour $f(x) = 1_{\{x=i\}}$ (i.e., $f(x) = i$ si $x = i$ et $f(x) = 0$ sinon), on a

$$P \left(\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} 1_{\{X(n)=i\}} \rightarrow \pi_i^* \text{ pour } m \rightarrow \infty \right) = 1 \quad (47)$$

ce qui montre que le proportion de temps passé dans chaque état avant un certain temps m tend vers π_i^* sur le long terme ($m \rightarrow \infty$).

D'autre part, si $f(x) = x$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} f(X(n)) &= \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} X(n) = \langle X(n) \rangle_m \\ \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^* f(i) &= \sum_{i \in \mathcal{S}} i \pi_i^* = \mu_X \end{aligned}$$

où μ_X est l'espérance de la chaîne X à l'état stationnaire, si bien que (46) devient

$$P(\langle X(n) \rangle_m \rightarrow \mu_X \text{ pour } m \rightarrow \infty) = 1.$$

ce qui montre qu'une chaîne de Markov irréductible récurrente positive est ergodique par rapport à sa moyenne. Notons que l'équation ci-dessus signifie que $\langle X(n) \rangle_m$ converge vers μ_X avec probabilité 1, ce qui est une forme d'ergodisme différente (on peut montrer qu'elle est plus forte) que celle en moyenne quadratique considérée au module 4.

Le théorème montre qu'une chaîne de Markov irréductible récurrente positive est ergodique en distribution. Remarquons qu'on réserve traditionnellement la dénomination de chaîne de Markov *ergodique* (tout court) pour une chaîne de Markov irréductible récurrente positive et *apériodique*; la raison vient de la théorie ergodique et dépasse le cadre de ce cours.

Dans le cas d'une chaîne de Markov qui n'est pas nécessairement ergodique en distribution, on a le résultat suivant

Théorème 8 Si $X(n)$ est une chaîne irréductible, alors pour toute fonction bornée $f : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$,

$$P \left(\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} 1_{\{X(n)=i\}} \rightarrow \frac{1}{E[T_i | X(0) = i]} \text{ pour } m \rightarrow \infty \right) = 1. \quad (48)$$

En effet, si la chaîne est transitoire, le nombre de visites à l'état i est fini, si bien que

$$\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} 1_{\{X(n)=i\}} \rightarrow 0 = \frac{1}{E[T_i | X(0) = i]}.$$

D'autre part, si la chaîne est récurrente positive, le théorème 4 entraîne que (48) est équivalent à (47). Enfin, dans le cas récurrent nul, la même raisonnement que dans le cas récurrent positif établit le théorème.

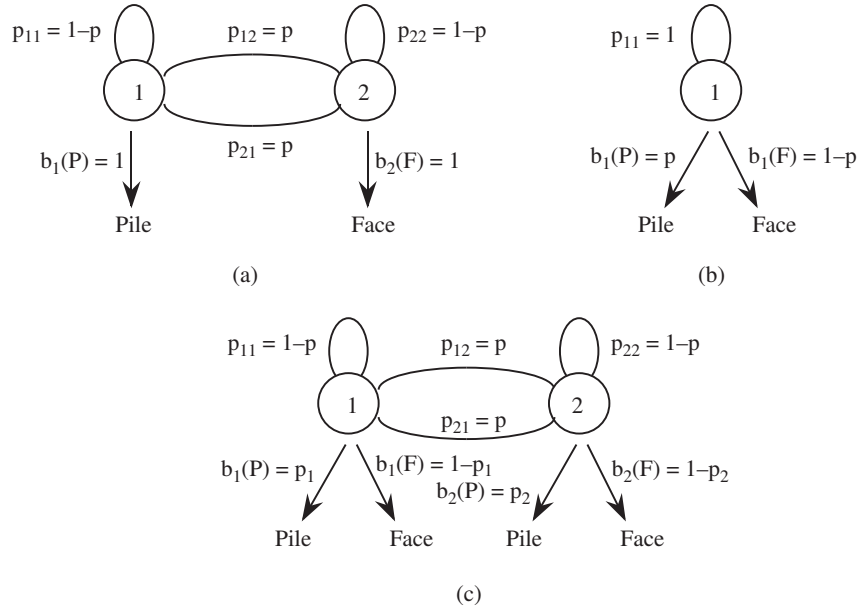


Figure 7: Chaîne de Markov à deux états symétrique (a), chaîne de Markov cachée à un état (b) et chaîne de Markov cachée à deux états (c).

3 Chaînes de Markov cachées

3.1 Définition

On peut compliquer le modèle d'une chaîne de Markov en le rendant doublement stochastique comme suit.

Reprenons l'exemple de la chaîne de Markov à deux états traitée comme premier exemple de la section précédente, mais dans le cas symétrique où $p = q$ et dont le diagramme des transitions d'états est représenté à la figure 7 (a). Supposons que cette chaîne de Markov représente un tirage d'une même pièce de monnaie à pile ou face: le processus se trouve dans l'état 1 lorsque le côté "pile" (P) est tiré, et dans l'état 2 lorsque le côté "face" (F) est obtenu. Par conséquent, si on observe la séquence de résultats successifs (qu'on appellera *observations*)

$$[O(0), O(1), O(2), \dots, O(n)] = [P, P, F, P, P, P, P, F, F, F, P, P]$$

il est clair que les *états* successifs dans lesquels la chaîne se trouvait étaient

$$[X(0), X(1), X(2), \dots, X(n)] = [1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1]$$

puisqu'à chaque état correspond une seule valeur observée (Pile pour l'état 1, face pour l'état 2). Un autre modèle tout aussi valable pour cette situation est le modèle dégénéré de la figure 7 (b), dans lequel il n'y a plus qu'un seul état, mais à partir duquel on peut obtenir deux observations différentes : pile avec une probabilité p et face avec une probabilité $(1 - p)$.

A présent, on dispose de deux pièces de monnaies différentes. Une personne lance tantôt la première pièce, tantôt la seconde, mais elle ne dit pas laquelle des deux pièces elle utilise, elle communique seulement le résultat de chaque tirage, par exemple

$$[o(1), o(2), \dots, o(n)] = [P, P, F, P, P, P, P, F, F, F, P, P].$$

On peut modéliser ces expériences par le diagramme de la figure 7 (c): l'état 1 correspond à l'utilisation de la première pièce, et l'état 2 à l'utilisation de la seconde pièce. Lorsque la personne utilise la première pièce, la probabilité d'obtenir le côté pile vaut p_1 et donc la probabilité d'avoir le côté face est $(1 - p_1)$, tandis que pour la seconde pièce ces probabilités sont respectivement p_2 et $(1 - p_2)$. Outre la distribution de probabilité pile/face caractérisant chaque état, un autre ensemble de probabilités intervient: la matrice des probabilités de transitions entre états. Ce processus est donc doublement stochastique, et la séquence des résultats observés ne permet pas de déterminer à coup sûr l'état dans lequel on se trouvait, c'est pourquoi on appelle ce modèle *chaîne de Markov cachée* (en anglais: Hidden Markov Model (HMM)). Par exemple, supposons qu'en tirant n fois la première pièce seulement on ait la séquence d'observations

$$[O'(0), O'(1), O'(2), \dots, O'(n)] = [P, P, F, P, P, F, P, P, P, F, F, P],$$

tandis qu'en tirant n fois la seconde pièce seulement on ait la séquence d'observations

$$[O''(0), O''(1), O''(2), \dots, O''(n)] = [F, F, F, F, P, P, P, F, F, F, P, P].$$

Alors si la séquence d'états successifs dans laquelle la chaîne se trouve est

$$[X(0), X(1), X(2), \dots, X(n)] = [1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1]$$

la séquence observée est

$$[O(0), O(1), O(2), \dots, O(n)] = [P, P, F, P, P, P, P, F, F, F, F, P].$$

De même, avec trois pièces de monnaie, on peut construire une HMM à trois états. Remarquons que le diagramme de la figure 7 (b) est une HMM dégénérée à un état.

D'une façon générale, une chaîne de Markov cachée fait intervenir deux paramètres:

- le nombre N d'états i , $1 \leq i \leq N$, que peut prendre $X(n)$,
- le nombre M de valeurs v_k , $1 \leq k \leq M$, que peut prendre l'observation $O(n)$,

(dans l'exemple des pièces de monnaie, N est le nombre de pièces différentes qui sont tirées et $M = 2$, car $v_1 = \text{"Pile"}$ et $v_2 = \text{"Face"}$) et met en jeu trois ensembles de probabilité:

- la loi de distribution $P = \{p_{ij}\}$ des probabilités $p_{ij} = P(X(n+1) = j \mid X(n) = i)$ de transition d'un état i à un état j , $1 \leq i, j \leq N$,
- la loi de distribution $B = \{b_i(v_k)\}$ des probabilités $b_i(v_k) = P(O(n) = v_k \mid X(n) = i)$ des observations lorsque le processus est dans l'état i , $1 \leq i \leq N, 1 \leq k \leq M$,
- la loi de distribution $\pi(0) = \{\pi_i(0)\}$ des probabilités d'état initiales $\pi_i(0) = P(X(0) = i)$.

Une chaîne de Markov cachée sera désignée de manière plus compacte par $\lambda = (P, B, \pi(0))$, notation qui spécifie l'ensemble complet des paramètres du modèle.

4 Application: reconnaissance de la parole

Les chaînes de Markov cachées sont très utiles pour la reconnaissance de la parole, car elles permettent de s'affranchir de la grande variabilité du signal de parole (la segmentation en phonèmes du même mot prononcé par deux locuteurs peut se produire à des intervalles de temps très différents).

Nous allons brièvement exposer comment on utilise les HMMs dans un des cas les plus "simples" de reconnaissance de la parole: la reconnaissance de mots isolés d'un vocabulaire fini de K mots.

Le signal de parole est d'abord codé comme une séquence de symboles, par un prétraitement approprié, comme par exemple l'analyse LPC vue au module 4. Soit $\mathbf{O}$ le vecteur aléatoire représentant cette suite de symboles

$$\mathbf{O} = [O(0), O(1), \dots, O(n)]$$

qui peut prendre une des valeurs

$$\mathbf{v} = [v_{k_0}, v_{k_1}, \dots, v_{k_n}]$$

où $1 \leq k_0, k_1, \dots, k_n \leq M$. Le problème de la reconnaissance est alors de retrouver le mot m_r , $1 \leq r \leq K$, qui est le plus susceptible de correspondre à cette séquence d'observations. Autrement dit, si W est la v.a. représentant les différents mots du vocabulaire, on cherche l'indice r du mot ($1 \leq r \leq K$) qui maximise la probabilité

$$P(W = m_r \mid \mathbf{O} = \mathbf{v}).$$

Comme cette probabilité ne peut pas être évaluée directement, on utilise la règle de Bayes pour la mettre sous la forme

$$P(W = m_r \mid \mathbf{O} = \mathbf{v}) = \frac{P(\mathbf{O} = \mathbf{v} \mid W = m_r)P(W = m_r)}{P(\mathbf{O} = \mathbf{v})}. \quad (49)$$

L'ensemble des probabilités a priori $P(W = m_r)$ est assez facilement déterminé à partir de la fréquence d'apparition de chaque mot dans le vocabulaire limité. Les probabilités $P(\mathbf{O} = \mathbf{v})$ n'ont pas besoin d'être évaluées pour déterminer l'indice r qui maximise la probabilité (49), puisqu'elles ne dépendent pas de r . Il reste à calculer les probabilités conditionnelles $P(\mathbf{O} = \mathbf{v} \mid W = m_r)$, c'est-à-dire les probabilités que la prononciation du mot d'indice r ait produit la séquence observée $\mathbf{v}$.

Dans une procédure d'apprentissage que nous n'expliquons pas ici, on construit un modèle de chaque mot m_r , $1 \leq r \leq K$, qui est ici une chaîne de Markov cachée $\lambda_r = (P_r, B_r, \boldsymbol{\pi}_r(0))$. Le problème de la reconnaissance revient alors à calculer pour chaque $1 \leq r \leq K$ la probabilité

$$P(\mathbf{O} = \mathbf{v} \mid W = \lambda_r)$$

pour déterminer l'indice r qui maximise cette probabilité lorsqu'elle est multipliée par $P(W = m_r)$.

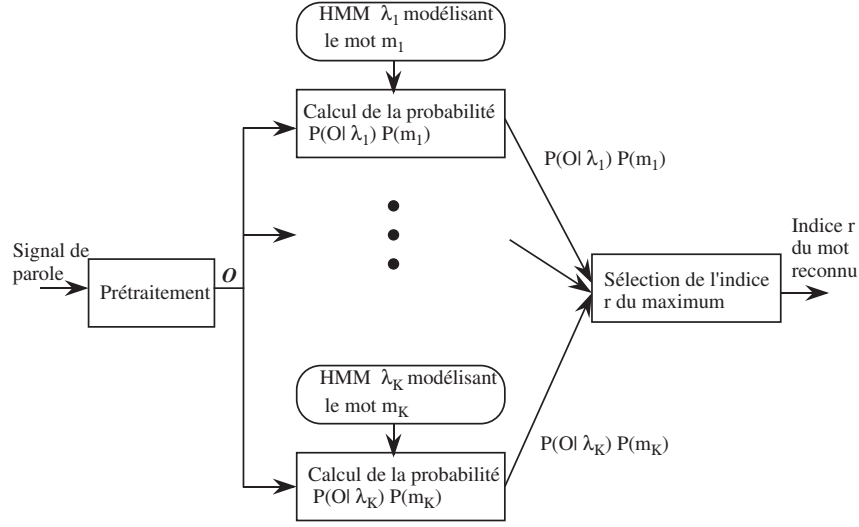


Figure 8: Reconnaissance de mots isolés d'un vocabulaire limité.

Le système de reconnaissance est schématisé à la figure 8.

Pour évaluer une des probabilités $P(\mathbf{O} = \mathbf{v} \mid W = \lambda)$, il faut d'abord calculer la probabilité qu'aux temps $0, 1, \dots, n$ le processus représenté par le vecteur aléatoire

$$\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(n)]$$

se soit trouvé dans la séquence d'états particulière

$$\mathbf{i} = [i_0, i_1, \dots, i_n] \quad (50)$$

avec $1 \leq i_0, i_1, \dots, i_n \leq N$. On trouve

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{i} \mid W = \lambda) = \pi_{i_0}(0) p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n}. \quad (51)$$

Ensuite, calculons la probabilité qu'étant dans la séquence d'états particulière (50), on observe la séquence $\mathbf{O}$. On suppose que les observations sont statistiquement indépendantes. Dès lors,

$$\begin{aligned} P(\mathbf{O} = \mathbf{v} \mid W = \lambda, \mathbf{X} = \mathbf{i}) &= \prod_{l=0}^n P(O(l) = v_{k_l} \mid W = \lambda, \mathbf{X} = \mathbf{i}) \\ &= \prod_{l=0}^n P(O(l) = v_{k_l} \mid W = \lambda, X(l) = i_l) \\ &= b_{i_0}(v_{k_0}) b_{i_1}(v_{k_1}) \dots b_{i_n}(v_{k_n}). \end{aligned} \quad (52)$$

Par conséquent, la combinaison des relations (51) et (52), et le théorème des probabilités totales

entraînent que

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{O} = \mathbf{v} \mid W = \lambda) &= \sum_{\text{tous les } \mathbf{i}} P(\mathbf{O} = \mathbf{v} \mid \mathbf{X} = \mathbf{i}, W = \lambda) P(\mathbf{X} = \mathbf{i} \mid W = \lambda) \\
&= \sum_{i_0, i_1, \dots, i_n} \pi_{i_0}(0) b_{i_0}(v_{k_0}) p_{i_0 i_1} b_{i_1}(v_{k_1}) \dots p_{i_{n-1} i_n} b_{i_n}(v_{k_n})
\end{aligned} \tag{53}$$

L'évaluation directe de (53) est extrêmement coûteuse en nombre d'opérations: il y a N^n séquences d'états $\mathbf{i}$ différentes, et pour chacune d'elles il faut effectuer $2n - 1$ multiplications et une addition, ce qui donne $2nN^n$ opérations. A titre d'exemple, s'il y a $N = 5$ états et $n = 100$ observations, il y a environ $2 \cdot 5 \cdot 5^{100} \approx 10^{72}$ opérations !

Heureusement, des algorithmes itératifs permettent d'évaluer (53) beaucoup plus efficacement. Une manière de procéder est d'introduire une variable auxiliaire

$$\alpha_i(l) = P(O(0) = v_{k_0}, O(1) = v_{k_1}, \dots, O(l) = v_{k_l}, X(l) = i \mid W = \lambda). \tag{54}$$

On a de la sorte un algorithme comportant trois parties:

1. Initialisation ($l = 0$): la valeur initiale de cette variable est, pour $1 \leq i \leq N$,

$$\begin{aligned}
\alpha_i(0) &= P(O(0) = v_{k_0}, X(0) = i \mid W = \lambda) \\
&= P(O(0) = v_{k_0} \mid X(0) = i, W = \lambda) P(X(0) = i \mid W = \lambda) = b_i(v_{k_0}) \pi_i(0).
\end{aligned}$$

2. Induction: ($0 \leq l \leq N - 1$) Le calcul itératif des $\alpha_i(l + 1)$ à partir des $\alpha_i(l)$ fait l'objet de l'exercice 8, où on établit la récurrence pour $1 \leq i \leq N$

$$\alpha_i(l + 1) = \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j(l) p_{ij} \right) b_i(v_{k_{l+1}}). \tag{55}$$

3. Terminaison: ($l = n$) pour $1 \leq i \leq N$,

$$P(\mathbf{O} = \mathbf{v} \mid W = \lambda) = \sum_{i=1}^N P(\mathbf{O} = \mathbf{v}, X(n) = i \mid W = \lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(n).$$

Le nombre d'opérations de cet algorithme n'est plus que de l'ordre de nN^2 . Par exemple, pour $N = 5$ et $n = 100$, il y a environ 3000 opérations, au lieu des 10^{72} opérations nécessaires pour une évaluation directe.

Une autre alternative est de ne plus faire l'évaluation de (53) pour toutes les combinaisons d'état possibles, mais seulement pour la plus vraisemblable, c'est-à-dire de remplacer (53) par

$$P(\mathbf{O} = \mathbf{v} \mid W = \lambda) \approx \max_{i_0, i_1, \dots, i_n} \pi_{i_0}(0) b_{i_0}(v_{k_0}) p_{i_0 i_1} b_{i_1}(v_{k_1}) \dots p_{i_{n-1} i_n} b_{i_n}(v_{k_n})$$

ce qui diminue considérablement le nombre d'opérations. Il faut alors résoudre le problème de la détermination de la séquence d'états la plus probable. A nouveau dans ce cas, des procédures récursives sont efficacement utilisées (algorithme de Viterbi).

Notons enfin qu'en pratique, la loi de probabilité $b_i(v_k)$ n'est pas discrète, mais continue (gaussienne).

5 Exercices

1. Soit un processus à moyenne mobile (MA) $Y(n) = (X(n) + X(n-1))/2$ où $X(n)$ est une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès $p = 1/2$ (Donc $P(X(n) = 1) = P(X(n) = -1) = 1/2$). Le processus $Y(n)$ est-il Markovien ?
2. Soit un processus auto-régressif (AR) $Y(n) = \alpha Y(n-1) + X(n)$ où $Y(0) = 0$ et où $X(n)$ est une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès $p = 1/2$ (Donc $P(X(n) = 1) = P(X(n) = -1) = 1/2$). Le processus $Y(n)$ est-il Markovien ?
3. Soient trois états i, j, k d'une chaîne de Markov. Démontrez que si i et j communiquent, et que si j et k communiquent, alors i et k communiquent.
4. Etablir la matrice (24).
5. Calculer la distribution invariante de probabilité d'état pour la marche aléatoire unidimensionnelle dont le diagramme des transitions est représenté en haut de la figure 3.
6. Une matrice P est dite doublement stochastique si tous ces éléments sont non négatifs, et si la somme de tous ses éléments le long d'une ligne *et* d'une colonne vaut 1.
 - (a) Montrer que la marche aléatoire sur un cercle est décrite par une matrice P doublement stochastique.
 - (b) Montrer que si le nombre d'états est fini, une chaîne de Markov dont la matrice de transition est doublement stochastique admet une distribution invariante. Laquelle ?
7. Pour les deux chaînes de Markov définies par les deux matrices de transition suivantes, déterminer les classes d'états, et si celles-ci sont transitoires ou récurrentes:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

8. Vu la météorologie de son pays, un Belge possède en général un stock de N parapluies, avec $N > 1$. Quand il se rend le matin à son bureau, il emmène un parapluie avec lui s'il pleut (et qu'un parapluie est disponible chez lui). Par contre, s'il ne pleut pas, il part sans parapluie. Au retour, il applique le même algorithme: il rentre avec un parapluie si et seulement si il pleut, et qu'un d'eux est disponible au bureau. On suppose qu'indépendamment de la météo des demi-journées précédentes, il pleut en début (ou en fin) de journée avec une probabilité p .
 - (a) Quelle est la probabilité que notre Belge se fasse rincer ? (On suppose qu'il utilise ses parapluies de cette manière depuis (presque) toujours.) Hint: soit n l'instant d'un départ (que ce soit de la maison ou du bureau) et soit $X(n)$ le nombre de parapluies disponibles à l'instant n . Calculer la distribution stationnaire de probabilité de cette chaîne de Markov.

- (b) La probabilité de pluie $p = 1/2$ en Belgique (ce chiffre est faux: en réalité, il ne pleut tout de même pas tant que ça) et notre Belge, bien qu'ayant déjà un stock de $N = 10$ parapluies, estime qu'il est trempé trop fréquemment. Il se dit qu'en déménageant dans n'importe quel pays moins pluvieux, il ne le sera plus aussi souvent. A-t-il raison ? Hint: calculer d'abord la probabilité p qui maximise la probabilité que le Belge soit trempé, et comparer avec $1/2$.
9. Quelle est la distribution stationnaire d'états de la marche aléatoire à deux barrières réfléchissantes, dont le diagramme des transitions entre états est représenté à la figure 9 ?

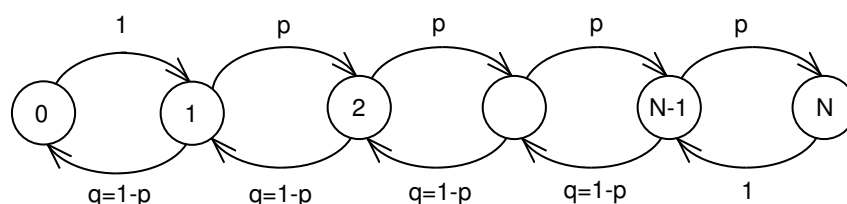


Figure 9: Marche aléatoire à deux barrières 'réfléchissantes'.

10. On considère le processus de la ruine du joueur sur $\{0, 1, \dots, N\}$, pour lequel les probabilités que le joueur A remporte la partie sont données par (37) si son capital initial vaut i . Montrer qu'en prenant la limite pour $N \rightarrow \infty$, on retrouve le résultat (41).
11. Etablir (39).
12. Un terrain de golf est, pour le besoin de l'exercice, discrétisé de sorte que la distance entre l'endroit où se trouve la balle de golf au n ème coup et le trou peut prendre les valeurs 0 (il a alors terminé), 1, ..., N . La distance initiale est N . Un joueur adopte la tactique suivante: à chaque coup, il se rapproche du trou, et est suffisamment expérimenté pour ne jamais augmenter la distance entre la balle et le trou d'un coup au suivant. Néanmoins, cette tactique le pousse à frapper parfois trop doucement la balle. En fait, s'il est arrivé à une distance i du trou, son coup suivant l'amènera à envoyer la balle à une distance uniformément distribuée entre 0 et $i - 1$.
- (a) Cette partie est une chaîne de Markov, dont l'espace des états est $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, N\}$. Dessiner le diagramme des transitions entre les états. Quelles sont les probabilités de transition ?
- (b) Quelle est l'espérance du nombre de coups que doit jouer notre golfeur pour mettre la balle dans le trou ?
13. On peut facilement déterminer la nature des états (transitoires ou récurrents) de la marche aléatoire sur $\mathbb{N}$, dont le diagramme des transitions entre états est représenté à la figure 10, à partir de l'étude faite sur la probabilité d'absorption pour la ruine du joueur sur $\mathbb{N}$. En effet, désignons par $X(n)$ la marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ et par $Y(n)$ la ruine du joueur sur $\mathbb{N}$.

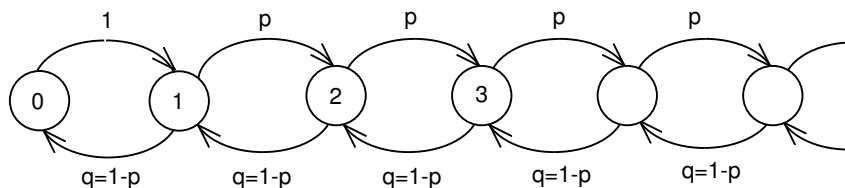


Figure 10: Marche aléatoire sur $\mathbb{N}$.

- (a) Montrer que la probabilité de premier retour à l'état 0 de la marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ $X(n)$

$$f_0 = P(X(n) = 0 \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}_0 | X(0) = 0)$$

et la probabilité d'absorption dans l'état 0 du processus $Y(n)$ à partir de l'état 1

$$h_{10} = P(Y(n) = 0 \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} | Y(0) = 1)$$

sont identiques: $f_0 = h_{10}$.

- (b) A partir des résultats de la section sur la ruine du joueur sur $\mathbb{N}$, déterminer les valeurs de p pour lesquelles les états sont transitoires ou récurrents.
- (c) Calculez la distribution stationnaire de probabilité pour $0 < p < 1/2$ (Hint: c'est une chaîne réversible). Que se passe-t-il lorsque $p = 1/2$?
14. Calculer la probabilité d'extinction d'un processus de branchement, si les v.a. C_i^n décrivant le nombre de descendants du i ème individu de la $(n + 1)$ ème génération sont des v.a. géométriques de paramètre p .
15. On considère le processus de branchement de la section 2.6.3. Calculer $E[X(n)]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (Hint: conditionner sur $X(n - 1)$, i.e. calculer $E[X(n) | X(n - 1) = m]$ pour tout $m \in \mathbb{N}$). Que vaut $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X(n)]$ si $\mu_C < 1$? Vous attendiez-vous à ce résultat ?
16. Calculer la distribution stationnaire du problème des urnes d'Ehrenfest.
17. On considère la chaîne de Markov à deux états de la section 2.4.1, avec $0 < p, q < 1$. On va établir la distribution stationnaire de probabilité de cette chaîne à partir du théorème 4 et du temps de premier passage par l'état 0, T_0 .
- (a) Déterminer $P(T_0 = m | X(0) = 0)$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. (Hint : commencer par $m = 1, 2, \dots$).
- (b) Calculer l'espérance $E[T_0 | X(0) = 0]$ (Hint: calculer d'abord la fonction génératrice $G_{T_0 | X(0)=0}(z)$). On a alors $\pi_0^* = 1/E[T_0 | X(0) = 0]$.