

Module 4: Proc. Stoch. à temps discret: analyse au 2^{ème} ordre

Modèles stochastiques
pour les communications

Prof. Patrick Thiran

INDY-I&C



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

$$\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$$

■ Spécification complète

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \forall t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{R} \\ \forall x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$$

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m) = \\ \mathbb{P}(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_m) \leq x_m)$$

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m) = \\ \frac{\partial^m F_X(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}$$

$$\Phi_X(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m; t_1, t_2, \dots, t_m) = \\ \mathbb{E}[\exp(j \sum_{i=1}^m \omega_i X(t_i))]$$

■ Spécification au 2^{ème} ordre

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x; t) dx$$

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1, x_2 f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \mu_X(t_2)$$

$$\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \forall n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{Z} \\ \forall x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$$

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_m; n_1, n_2, \dots, n_m) = \\ \mathbb{P}(X(n_1) \leq x_1, \dots, X(n_m) \leq x_m)$$

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_m; n_1, n_2, \dots, n_m) = \\ \frac{\partial^m F_X(x_1, x_2, \dots, x_m; n_1, n_2, \dots, n_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}$$

$$\Phi_X(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m; n_1, n_2, \dots, n_m) = \\ \mathbb{E}[\exp(j \sum_{i=1}^m \omega_i X(n_i))]$$

$$\mu_X(n) = \mathbb{E}[X(n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x; n) dx$$

$$R_X(n_1, n_2) = \mathbb{E}[X(n_1)X(n_2)] = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1, x_2 f_X(x_1, x_2; n_1, n_2) dx_1 dx_2$$

$$C_X(n_1, n_2) = R_X(n_1, n_2) - \mu_X(n_1) \mu_X(n_2)$$

$$\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$$

- Stationnarité
- $X(t)$ est SSS $\Leftrightarrow$
- $\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \forall t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{R}$
 $\forall c \in \mathbb{R} \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$
 $F_X(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m) =$
 $F_X(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1 + c, t_2 + c, \dots, t_m + c)$
- $X(t)$ est WSS $\Leftrightarrow$
- $\mu_X(t) = \mu_X$
- $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2)$

$$\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

- $X(n)$ est SSS $\Leftrightarrow$
- $\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \forall n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$
 $\forall c \in \mathbb{Z} \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$
 $F_X(x_1, x_2, \dots, x_m; n_1, n_2, \dots, n_m) =$
 $F_X(x_1, x_2, \dots, x_m; n_1 + c, n_2 + c, \dots, n_m + c)$
- $X(n)$ est WSS $\Leftrightarrow$
- $\mu_X(n) = \mu_X$
- $R_X(n_1, n_2) = R_X(n_1 - n_2)$

$$\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

- $X(n)$ est WSS $\Leftrightarrow \mu_X(n) = \mu_X$ et $R_X(n, n - k) = R_X(k)$
- Matrice de corrélation d'ordre m

$$\Phi_X = \begin{bmatrix} R_X(0) & R_X(1) & R_X(2) & \cdots & R_X(m-1) \\ R_X(1) & R_X(0) & R_X(1) & \cdots & R_X(m-2) \\ R_X(2) & R_X(1) & R_X(0) & \cdots & R_X(m-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_X(m-1) & R_X(m-2) & \cdots & R_X(0) \end{bmatrix}$$

- Propriétés: Φ_X est
 - symétrique
 - semi-définie positive
 - Toeplitz

$\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$

- $X(t)$ est ergodique par rapport à sa moyenne $\Leftrightarrow$
 $VAR[\langle X(t) \rangle_T] \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow \infty$
 with $\langle X(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$
- Thm 1: $X(t)$ est ergodique par rapport à sa moyenne $\Leftrightarrow$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T C_X(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau = 0$$
- Thm 2: $X(t)$ est ergodique par rapport à sa moyenne $\Leftarrow$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} C_X(\tau) = 0$$

$\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$

- $X(n)$ est ergodique par rapport à sa moyenne $\Leftrightarrow$
 $VAR[\langle X(n) \rangle_m] \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$
 with $\langle X(n) \rangle_m = \frac{1}{2m+1} \sum_{n=-m}^m X(n)$
- Thm 1: $X(n)$ est ergodique par rapport à sa moyenne $\Leftrightarrow$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m+1} \sum_{k=-2m}^{2m} C_X(k) \left(1 - \frac{|k|}{2m+1}\right) = 0$$
- Thm 2: $X(n)$ est ergodique par rapport à sa moyenne $\Leftarrow$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_X(k) = 0$$

$$\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$$

- Densité spectrale de puissance

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) e^{2\pi j f \tau} df$$

- Propriétés

- $S_X(f) = S_X(-f)$
- $S_X(f) \in \mathbb{R}$
- $S_X(f) \geq 0$

$$\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

- Densité spectrale de puissance

$$S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(k) e^{-2\pi j f k}$$

$$R_X(k) = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(f) e^{2\pi j f k} df$$

- Densité spectrale de puissance

$$\hat{S}_X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(k) z^{-k}$$

$$S_X(f) = \hat{S}_X(e^{2\pi j f k})$$

- Propriétés

- $S_X(f) = S_X(-f)$
- $S_X(f) \in \mathbb{R}$
- $S_X(f) \geq 0$

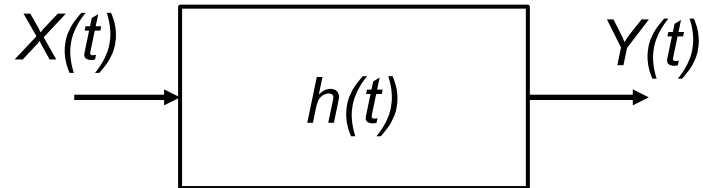
$\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$

- Exemple 1: bruit blanc
 - $\mu_N(t) = 0$
 - $S_N(f) = \frac{N_0}{2}$
 - $R_N(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$
- Exemple 2: sinusoïde à phase aléatoire $\Phi \sim \text{unif}[0, 2\pi]$
 - $X(t) = a \sin(2\pi f_0 t + \Phi)$
 - $\mu_X(t) = 0$
 - $R_X(t, t - \tau) = \frac{a^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau$
 - $S_X(f) = \frac{a^2}{4} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$

$\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$

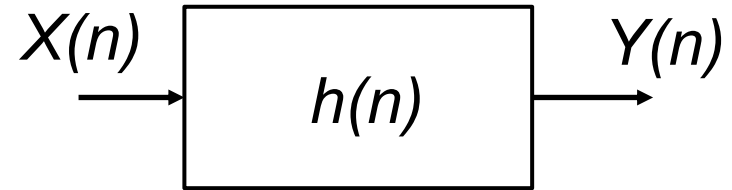
- Exemple 1: bruit blanc
 - $\mu_N(n) = 0$
 - $S_N(f) = \sigma_N^2$
 - $R_N(k) = \sigma_N^2 \bar{\delta}(k) = \begin{cases} \sigma_N^2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$
- Exemple 2: sinusoïde à phase aléatoire $\Phi \sim \text{unif}[0, 2\pi]$
 - $X(n) = a \sin(2\pi f_0 n + \Phi)$
 - $\mu_X(n) = 0$
 - $R_X(n, n - k) = \frac{a^2}{2} \cos 2\pi f_0 k$
 - $S_X(f) = \frac{a^2}{4} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$

$$\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$$



- Système LIT (LTI in English)
- $H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-2\pi j f t} dt$
- $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$
- $S_{YX}(f) = H(f) S_X(f)$
- $S_{XY}(f) = H^*(f) S_X(f)$

$$\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$$



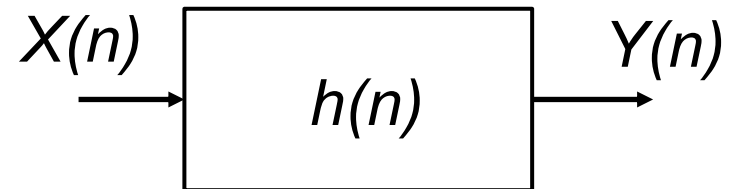
- Système LIT (LTI in English)
- $H(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-2\pi j f n}$
- $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$
- $S_{YX}(f) = H(f) S_X(f)$
- $S_{XY}(f) = H^*(f) S_X(f)$

- $\hat{H}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n}$
- $\hat{S}_Y(z) = \hat{H}(z) \hat{H}^{(1/z)} \hat{S}_X(z)$
- $\hat{S}_{YX}(z) = \hat{H}(z) \hat{S}_X(z)$
- $\hat{S}_{XY}(z) = \hat{H}^{(1/z)} \hat{S}_X(z)$

$$\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

- Exemple 3.1: Processus MA(m)

- $\{U(n), n \in \mathbb{Z}\}$ bruit blanc $S_U(f) = \sigma_U^2$
 - $X(n) = \sum_{k=0}^m b_k U(n-k)$
 - $\hat{H}(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^{-k} := \hat{B}(z)$



- Exemple 3.2: Processus AR(p)

- $\{U(n), n \in \mathbb{Z}\}$ bruit blanc $S_U(f) = \sigma_U^2$
 - $X(n) = -\sum_{k=1}^p a_k X(n-k) + U(n)$
 - $\hat{H}(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} := \frac{1}{\hat{A}(z)}$

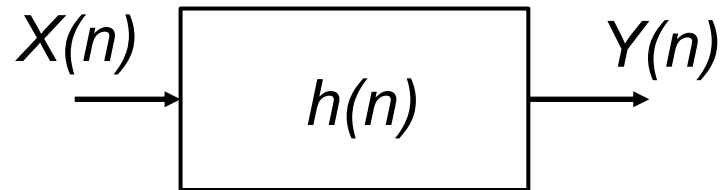
- Exemple 3.3: Processus ARMA(m, p)

- $\{U(n), n \in \mathbb{Z}\}$ bruit blanc $S_U(f) = \sigma_U^2$
 - $X(n) = -\sum_{k=1}^p a_k X(n-k) + \sum_{k=0}^m b_k U(n-k)$
 - $\hat{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} = \frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)}$

- $\hat{S}_X(z) = \hat{H}(z) \hat{H}(1/z) \hat{S}_U(z) = \frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)} \frac{\hat{B}(1/z)}{\hat{A}(1/z)} \sigma_U^2$

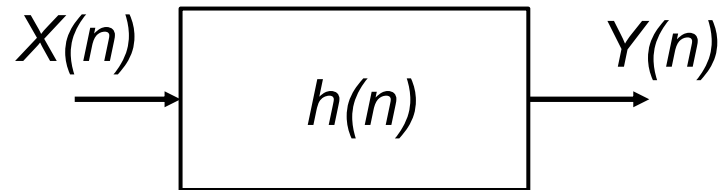
$$\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

- Filtre de Wiener
 - Entrée $X(n)$ (WSS) de moyenne nulle avec $R_X(k)$ connu (et donc $S_X(f)$ et $\hat{S}_X(z)$)
 - Sortie $Y(n) = (h * X)(n)$ (WSS)
 - Sortie désirée $D(n)$ (WSS) de moyenne nulle avec $R_D(k)$ et $R_{DX}(k)$ connu (et donc $S_D(f)$ et $S_{DX}(f)$; $\hat{S}_X(z)$ et $\hat{S}_{DX}(z)$)
 - Comment calculer $h(n)$ (ou $H(f)$ ou $\hat{H}(z)$) pour minimiser $\varepsilon = \mathbb{E}[(D(n) - Y(n))^2]$.



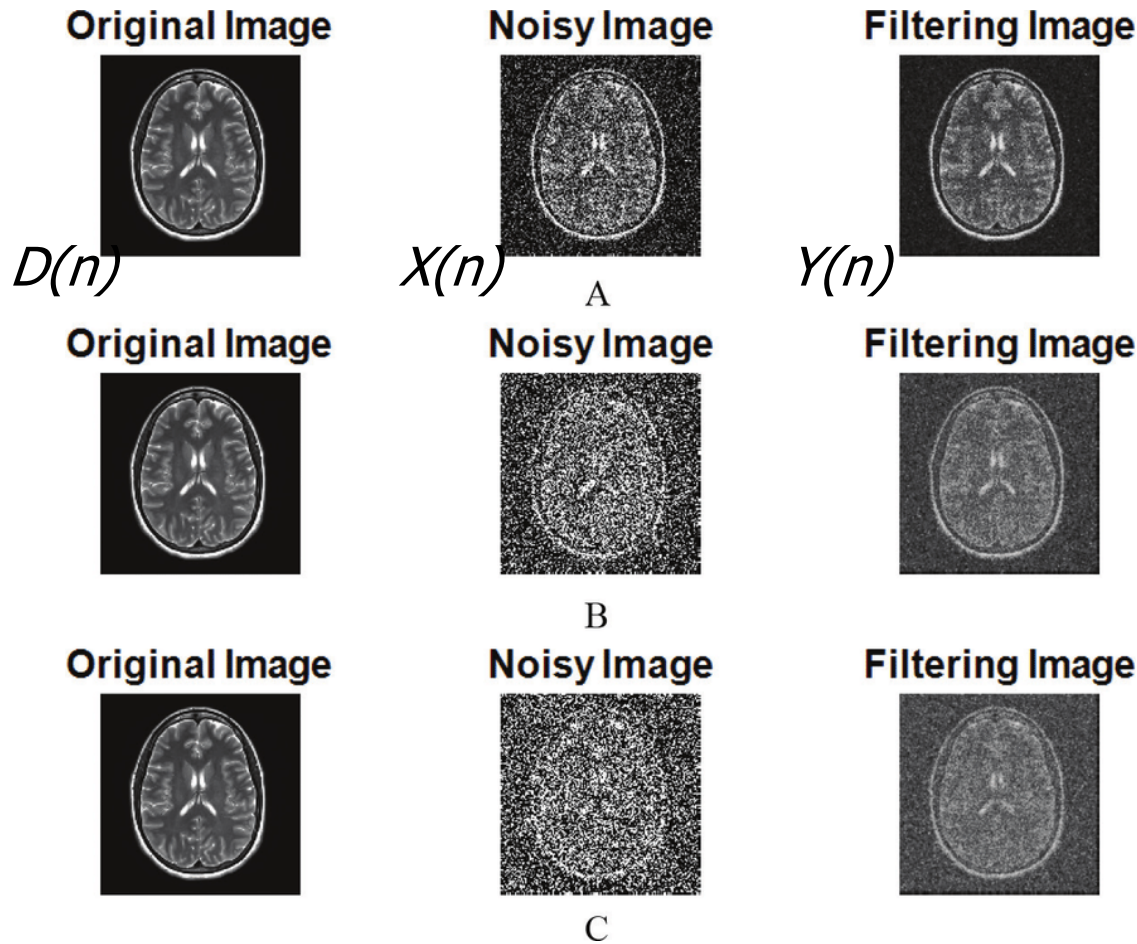
$$\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

- Filtre de Wiener
 - Entrée $X(n)$ (WSS) de moyenne nulle avec $R_X(k)$ connu (et donc $S_X(f)$ et $\hat{S}_X(z)$)
 - Sortie $Y(n) = (h * X)(n)$ (WSS)
 - Sortie désirée $D(n)$ (WSS) de moyenne nulle avec $R_D(k)$ et $R_{DX}(k)$ connu (et donc $S_D(f)$ et $S_{DX}(f)$; $\hat{S}_X(z)$ et $\hat{S}_{DX}(z)$)
 - Comment calculer $h(n)$ (ou $H(f)$ ou $\hat{H}(z)$) pour minimiser $\varepsilon = \mathbb{E}[(D(n) - Y(n))^2]$.
- Restauration d'images



$$\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

- Restauration d'images par filtre de Wiener



Exemple reproduit de «MRI Medical Image Denoising by Fundamental Filters», by Ali Hanafy, in High-Resolution Neuroimaging - Basic Physical Principles and Clinical Applications, Edited by: Ahmet Mesrur Halefoğlu, ISBN 978-953-51-3865-5, 2018.

$$\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

- Filtre de Wiener
 - Entrée $X(n)$ (WSS) de moyenne nulle avec $R_X(k)$ connu (et donc $S_X(f)$ et $\hat{S}_X(z)$)
 - Sortie $Y(n) = (h * X)(n)$ (WSS)
 - Sortie désirée $D(n)$ (WSS) de moyenne nulle avec $R_D(k)$ et $R_{DX}(k)$ connu (et donc $S_D(f)$ et $S_{DX}(f)$; $\hat{S}_X(z)$ et $\hat{S}_{DX}(z)$)
 - Comment calculer $h(n)$ (ou $H(f)$ ou $\hat{H}(z)$) pour minimiser $\varepsilon = \mathbb{E}[(D(n) - Y(n))^2]$.
- Prédiction linéaire (LPC, linear predictive coding)

