

Module 2:

Vecteurs aléatoires

Modèles stochastiques
pour les communications

Prof. Matthias Grossglauser
Prof. Patrick Thiran

INDY-I&C

EPFL

Paire de variables aléatoires

- Fonction de répartition jointe:
 - $F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
 - Propriétés:
 - $F_{XY}(-\infty, y) = F_{XY}(x, -\infty) = 0$
 - $F_{XY}(\infty, \infty) = 1$
- Fonction de répartition marginale:
 - $F_X(x) = P(X \leq x)$
 - Propriété:
 - $F_{XY}(x, \infty) = P(X \leq x, Y \leq \infty) = F_X(x)$
 - $F_{XY}(\infty, y) = P(X \leq \infty, Y \leq y) = F_Y(y)$

Densité de probabilité jointe

- $f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$
- Cas discret:
 - $f_{XY}(x, y) = \sum_{i,j} p_{ij} \delta(x - x_i) \delta(y - y_j)$
 - Propriétés:
 - $\sum_{i,j} P(X = x_i, Y = y_j) = 1$
 - $P(X \leq a, Y \leq b) = \sum_{x_i \leq a, y_j \leq b} P(X = x_i, Y = y_j) = F_{XY}(a, b)$

Densité de probabilité jointe

- $f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$
- Cas continu:
 - Propriétés:
 - $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$
 - $P(X \leq a, Y \leq b) = F_{XY}(a, b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{XY}(x, y) dy dx$
 - $P(a_1 \leq X \leq a_2, b_1 \leq Y \leq b_2) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f_{XY}(x, y) dy dx$

Densité de probabilité marginale

- Cas continu:

- $$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{dF_{XY}(x, \infty)}{dx} \\ &= \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x', y') dy' dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y') dy' \end{aligned}$$
- $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x', y) dx'$$

Densité de probabilité marginale

- Cas discret:

- $f_X(x) = \sum_{i,j} P(X = x_i, Y = y_j) \delta(x - x_i)$

- $f_Y(y) = \sum_{i,j} P(X = x_i, Y = y_j) \delta(y - y_j)$

- $P(X \leq a) = \sum_{x_i \leq a} \sum_j P(X = x_i, Y = y_j)$

- $P(X = a) = \sum_j P(X = a, Y = y_j)$

Variables aléatoires indépendantes

- Deux v.a. X et Y sont indépendantes si

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

d'où

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

- Cas discret:

- $P(X = a, Y = b) = P(X = a)P(Y = b)$

- Propriété:

- $X \perp Y \Rightarrow g(X) \perp h(Y)$

Fonctions de deux variables aléatoires

- $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$

$$Y_2 = g_2(X_1, X_2)$$

- Soit $(x_{1,i}, x_{2,i})$ une racine de

$$y_1 = g_1(x_{1,i}, x_{2,i})$$

$$y_2 = g_2(x_{1,i}, x_{2,i})$$

- Alors

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = \sum_i \frac{f_{X_1 X_2}(x_{1,i}, x_{2,i})}{|J(x_{1,i}, x_{2,i})|}$$

où le Jacobien de (g_1, g_2) est $J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$

Cas particulier: fonction linéaire

- $Y_1 = g_1(X_1, X_2) = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1$
 $Y_2 = g_2(X_1, X_2) = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2$
- $\underline{Y} = \underline{g}(\underline{X}) = A\underline{X} + \underline{b}, \underline{X} = A^{-1}(\underline{Y} - \underline{b})$
- $J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det A$
- $f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{f_{\underline{X}}(A^{-1}\underline{y} - A^{-1}\underline{b})}{|\det A|}$

Exemple: somme de deux v.a. $X_1 \perp X_2$

- $Y_1 = X_1 + X_2$
- $Y_2 = X_2$
- $\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$
- $$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = \frac{f_{X_1 X_2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)}{|\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}|} = \frac{f_{X_1 X_2}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)}{1} =$$
$$= f_{X_1 X_2}(y_1 - y_2, y_2) = f_{X_1}(y_1 - y_2) f_{X_2}(y_2)$$
- D'où $f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) dy_2$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y_1 - y_2) f_{X_2}(y_2) dy_2$$
- En d'autres mots: $f_{Y_1} = f_{X_1} * f_{X_2}$ (convolution)

Espérance mathématique

- $Z = g(X, Y)$
- $E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy$
- $E[Z] = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$
- Exemple 1: $Z = X + Y$
 - $$\begin{aligned} E[Z] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f_{XY}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{XY}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = E[X] + E[Y] \end{aligned}$$

Espérance mathématique

- Exemple 2: $Z = XY, X \perp Y$

- $$\begin{aligned} E[Z] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \right) \\ &= E[X]E[Y] \end{aligned}$$

- Attention: si (mais pas seulement si) indépendants!

Espérance $E[XY]$ vs $E[X]E[Y]$

- Attention: si (mais pas seulement si) indépendants!

Moment joint de X et Y

- $E[X^n Y^m] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^m f_{XY}(x, y) dx dy$
- $E[X^n Y^m] = \sum_i \sum_j x_i^n y_j^m P(X = x_i, Y = y_j)$

Covariance

- $Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] =$
 $= E[XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y] =$
 $= E[XY] - \mu_X E[Y] - \mu_Y E[X] + \mu_X \mu_Y =$
 $= E[XY] - \mu_X \mu_Y - \mu_Y \mu_X + \mu_X \mu_Y =$
 $= E[XY] - E[X]E[Y]$
- Coefficient de corrélation:
 - $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$
- $Cov(X, Y) = 0 \iff X \text{ et } Y \text{ décorrélées}$
 $E[XY] = 0 \iff X \text{ et } Y \text{ orthogonales}$

Covariance

- Propriétés:

- $Cov(X, X) = Var(X) = \sigma_X^2$
- $X \perp Y \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$
 $Cov(X, Y) = 0$, et $\rho = 0$
- $|Cov(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$, et donc $|\rho_{XY}| \leq 1$

- Dém:

- $0 \leq E \left[(\lambda(X - \mu_X) - (Y - \mu_Y))^2 \right] =$
 $= E[\lambda^2(X - \mu_X)^2 - 2\lambda(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) + (Y - \mu_Y)^2] =$
 $= \lambda^2 E[(X - \mu_X)^2] - 2\lambda E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$
 $+ E[(Y - \mu_Y)^2] =$
 $= \sigma_X^2 \lambda^2 - 2Cov(X, Y)\lambda + \sigma_Y^2 \rightarrow \text{éq. quadratique en } \lambda$
- Discriminant $= 4 Cov^2(X, Y) - 4\sigma_X^2 \sigma_Y^2 \leq 0$
- $\Rightarrow Cov^2(X, Y) \leq \sigma_X^2 \sigma_Y^2$

Fonction caractéristique jointe

- $\Phi_{XY}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) e^{j(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy = E[e^{j(\omega_1 X + \omega_2 Y)}]$
- Propriétés:
 - $f_{XY}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{XY}(\omega_1, \omega_2) e^{-j(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2$
 - $\Phi_X(\omega) = \Phi_{XY}(\omega, 0)$
 - $\Phi_Y(\omega) = \Phi_{XY}(0, \omega)$
 - $E[X^m Y^n] = j^{-(m+n)} \left[\frac{\partial^{m+n} \Phi_{XY}(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1^m \partial \omega_2^n} \right]_{(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)}$
 - $X \perp Y \Rightarrow e^{j\omega_1 X} \perp e^{j\omega_2 Y}$
 $\Rightarrow E[e^{j\omega_1 X} e^{j\omega_2 Y}] = E[e^{j\omega_1 X}] E[e^{j\omega_2 Y}]$
 $\Rightarrow \Phi_{XY}(\omega_1, \omega_2) = \Phi_X(\omega_1) \Phi_Y(\omega_2)$
 - $Z = X + Y, X \perp Y \Rightarrow \Phi_Z(\omega) = \Phi_X(\omega) \Phi_Y(\omega)$

Fonction génératrice des moments

- $\widehat{\Phi}_{XY}(s_1, s_2) = E[e^{s_1 X + s_2 Y}] =$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) e^{s_1 x + s_2 y} dx dy$$
- Propriété:
 - $\widehat{\Phi}_{XY}(j\omega_1, j\omega_2) = \Phi_{XY}(\omega_1, \omega_2)$

Densité de probabilité conditionnelle

- Cas discret:

- $P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$ si $P(Y = y) > 0$

- $P(Y = y|X = x) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}$ si $P(X = x) > 0$

- Si $P(Y = y) = 0$, $P(X = x|Y = y) = 0$
 $P(X = x) = 0$, $P(Y = y|X = x) = 0$

- Cas continu:

- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$ si $f_Y(y) > 0$

- $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$ si $f_X(x) > 0$

Espérance conditionnelle

- Cas continu:

- $E[X|y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$

- Cas discret:

- $E[X|y] = \sum_i x_i P(X = x_i | Y = y)$

- Remarque:

- $E[X|y] = g(y)$, donc $E[X|Y] = g(Y)$ est une v.a.!

- $$\begin{aligned} E[E[X|Y]] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X|y] f_Y(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx \right] f_Y(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = E[X] \end{aligned}$$

Variable aléatoire complexe

- $Z = X + jY$
- $\mu_Z = E[Z] = E[X] + jE[Y] = \mu_X + j\mu_Y$
- $\sigma_Z^2 = E[|Z - \mu_Z|^2] = E[(Z - \mu_Z)^*(Z - \mu_Z)] = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$
- $Cov(W, Z) = E[(W - \mu_W)^*(Z - \mu_Z)]$
- $Cov(Z, W) = Cov^*(W, Z)$
- Matrice de covariance:
 - $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_W^2 & Cov(W, Z) \\ Cov(Z, W) & \sigma_Z^2 \end{bmatrix}$ hermitienne et s.d.p.

Vecteurs aléatoires ($n \geq 2$)

- $F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$
- $f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F(x_1, \dots, x_n)$
- Densité marginale:
 - $f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$
 - $f_{X_3 X_5}(x_3, x_5) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 dx_4 dx_6 \dots dx_n$
- Densité conditionnelle:
 - $f_{X_1}(x_1 | x_2, \dots, x_n) = \frac{f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)}{f_{X_2 \dots X_n}(x_2, \dots, x_n)}$

V.a. gaussiennes jointes/multivariées

- Rappel:

- V.a. gaussienne scalaire:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- $X = (X_1, \dots, X_n)$ sont des gaussiennes jointes ssi

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\right),$$

avec $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ et $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T = [E[X_1], \dots, E[X_n]]^T$

- Matrice de covariance (s.d.p.):

$$\Sigma = E[XX^T] - \mu\mu^T = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & Cov[X_1, X_2] & \dots \\ Cov(X_2, X_1) & \sigma_2^2 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}_{23}$$

V.a. gaussiennes jointes/multivariées

- Fonction caractéristique:
 - $\Phi_{X_1, \dots, X_n}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \Phi_X(\omega) = E[e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n)}]$
$$= \exp\left(j\mu^T \omega - \frac{1}{2} \omega^T \Sigma \omega\right)$$
- Propriétés:
 - V.a. gaussienne jointe est entièrement déterminée par les moments d'ordre 1 et 2
 - Tous les autres moments sont fonctions de ceux d'ordre 1 et 2

	0	1	2	3	4
0	1	μ_1	σ_1^2		
1	μ_2	σ_{12}			
2	σ_2^2				
3					
4					

Ordre 1: Moyenne μ

Ordre 2: Var/covar Σ

Ordre >2: Déterminés

V.a. gaussiennes jointes/multivariées

- Propriétés (cont.):

- $Y = AX$

- $$f_Y(y) = \frac{f_X(A^{-1}y)}{|\det A|} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma} |\det A|} \exp \left(-\frac{1}{2} (A^{-1}y - \mu)^T \Sigma^{-1} (A^{-1}y - \mu) \right)$$

- $(A^{-1}y - \mu)^T = (A^{-1}(y - A\mu))^T = (y - A\mu)^T (A^{-1})^T$

- $$\begin{aligned} (A^{-1}y - \mu)^T \Sigma^{-1} (A^{-1}y - \mu) &= \\ &= (y - A\mu)^T (A^{-1})^T \Sigma^{-1} A^{-1} (y - A\mu) = \\ &= (y - A\mu)^T (A \Sigma A^T)^{-1} (y - A\mu) = \\ &= (y - m)^T S^{-1} (y - m) \end{aligned}$$

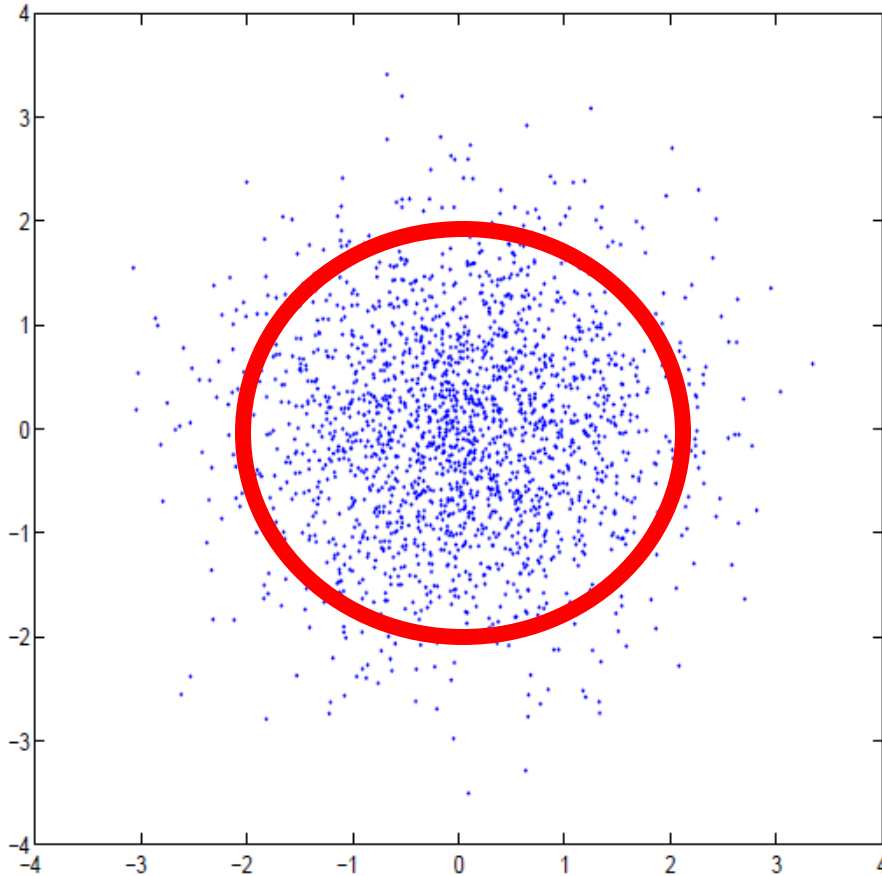
- où $S = A \Sigma A^T$ et $m = A\mu$

- Conclusion: $Y \sim N(m, S)$, gaussienne jointe

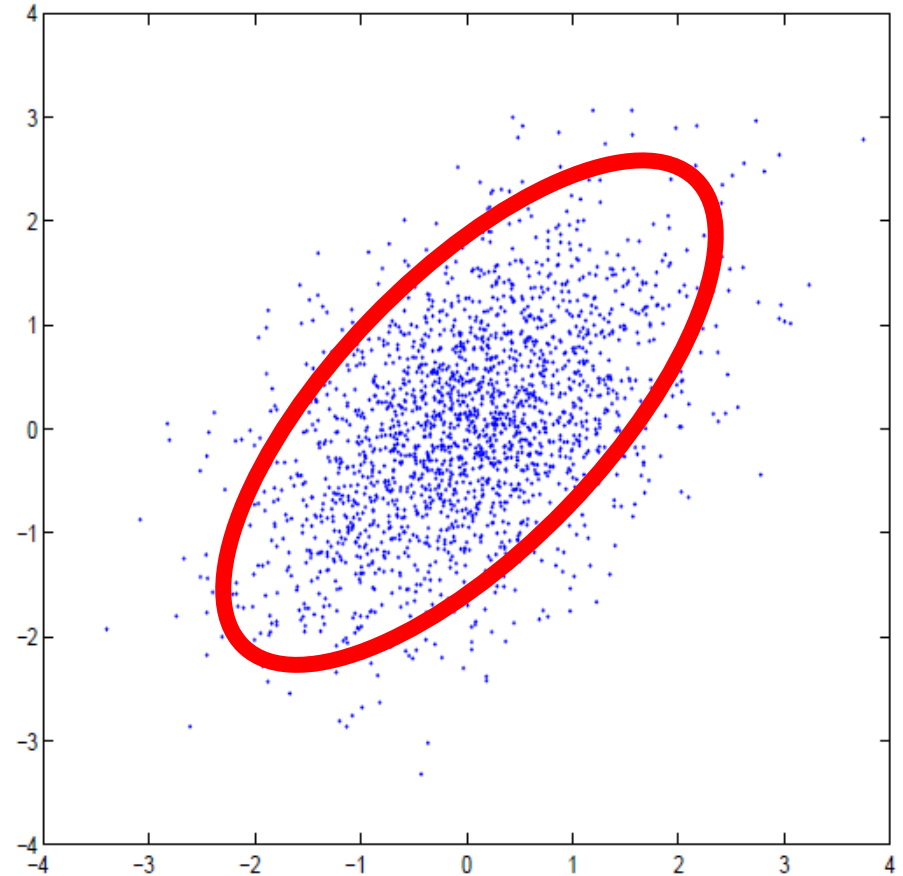
- Application: avec A bien choisi on peut diagonaliser Σ

Exemple v.a. gaussienne jointe

[source: perfeval.epfl.ch]



(a) X_1, X_2 independent



(b) X_1, X_2 dependent

$$X: N\left(\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.86 \end{bmatrix} X$$

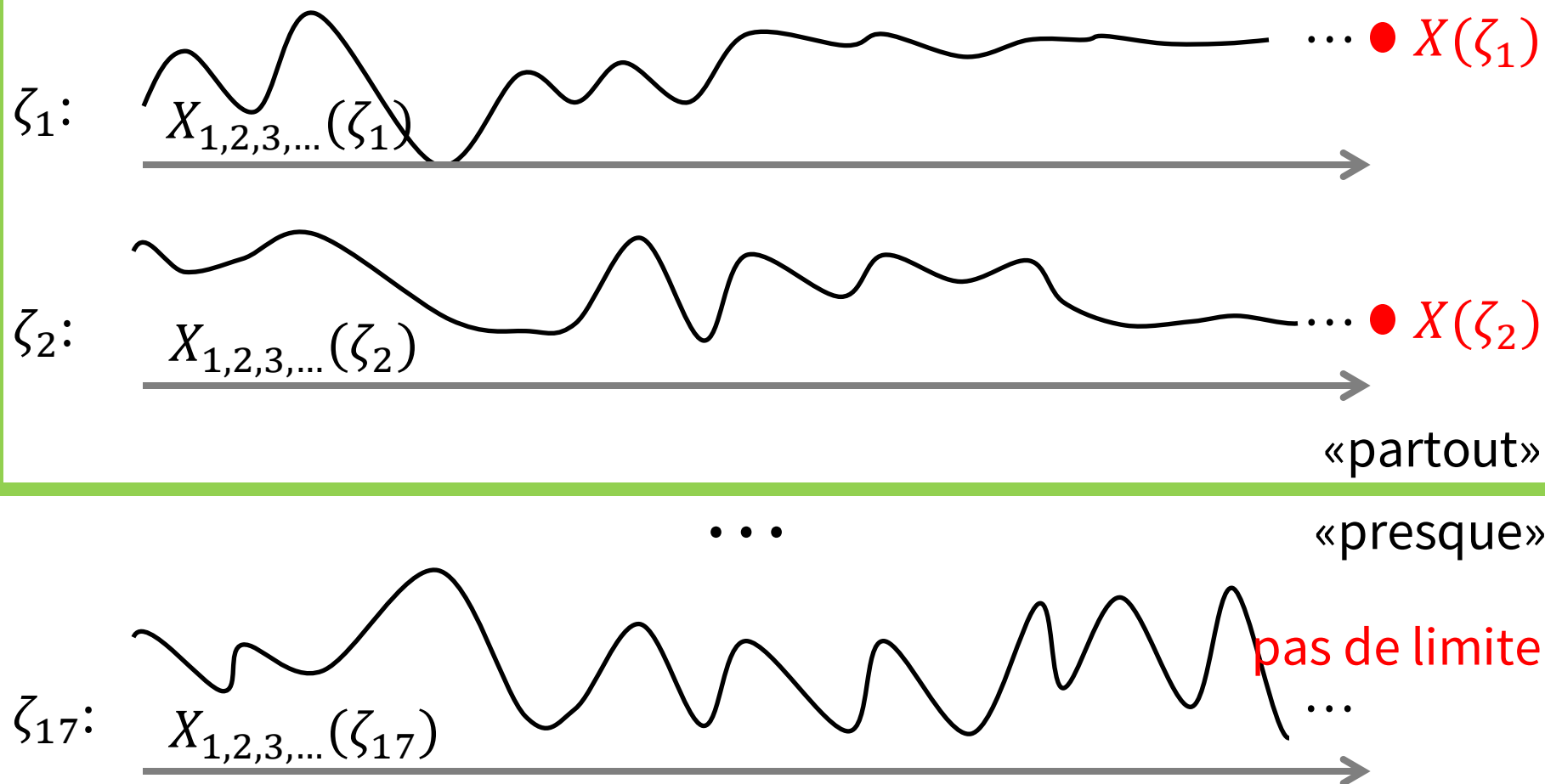
Convergence de variables aléatoires

- $X_1(\zeta), X_2(\zeta), \dots, X_n(\zeta)$: suite de réels
- Convergence presque sure/presque partout
 - («almost surely», «with probability one»)
 - $P\left\{\zeta: \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\zeta) = X(\zeta)\right\} = 1$
 $P(X_n \rightarrow X) = 1$ quand $n \rightarrow \infty$
- Critère de convergence presque sûre: pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty \implies P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \rightarrow X\right) = 1$$

Convergence: illustration

$X_n \rightarrow X$
presque partout

$$P(X_n \rightarrow X) = 1$$



Convergence de variables aléatoires

- $X_1(\zeta), X_2(\zeta), \dots, X_n(\zeta)$: suite de réels
- Convergence presque sure/presque partout
 - («almost surely», «with probability one»)
 - $P \left\{ \zeta : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\zeta) = X(\zeta) \right\} = 1$
 $P(X_n \rightarrow X) = 1$ quand $n \rightarrow \infty$
- Convergence en distribution
 - $F_{X_n}(x)$ = fonction de répartition de X_n
 - $F(x)$ = fonction de répartition de X
 - $F_n(x) \rightarrow F(x)$ quand $n \rightarrow \infty$

Théorème central limite

- $X_1, X_2, \dots, X_n$: suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.)
 - Moyenne μ et variance σ^2
- On construit $Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$
- Théorème central limite:
 - $Z_n \rightarrow Z \sim N(0,1)$ en distribution
 - $F_{Z_n}(z) \rightarrow F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z'^2}{2}} dz'$ quand $n \rightarrow \infty$

Théorème central limite

- Démonstration:

- $\Phi_{Z_n}(\omega) = E[e^{j\omega Z_n}] = E\left[\exp\left(j\omega \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right] =$
- $= E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n j\omega \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right] =$
- $= E\left[\prod_{i=1}^n \exp\left(j\omega \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right] =$
- $= \prod_{i=1}^n E\left[\exp\left(j\omega \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right] =$ (car $\{X_i\}$ indépendantes)
- $= \left(E\left[\exp\left(j\omega \frac{X - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right]\right)^n =$ (car distribuées identiquement)
- $= \left(1 + \frac{j\omega}{\sigma\sqrt{n}} E[X - \mu] + \frac{(j\omega)^2}{2\sigma^2 n} E[(X - \mu)^2] + \dots\right)^n =$ (Taylor)
- $\left(1 - \frac{\omega^2}{2n} + \dots\right)^n \approx \left(1 - \frac{\omega^2}{2n}\right)^n$ ($E[X - \mu] = 0$)
- $\Phi_Z(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{Z_n}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\omega^2}{2n}\right)^n = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$



Convergence de variables aléatoires

- Convergence en probabilité:
 - $\forall \epsilon > 0, P\{|X_n - X| > \epsilon\} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$
- Loi (faible) des grands nombres:
 - $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite de v.a. i.i.d. de moyenne μ et de variance σ^2
 - $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
 - $\forall \epsilon > 0, P\{|Z_n - \mu| > \epsilon\} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$

Convergence de variables aléatoires

- Loi (faible) des grands nombres (cont.):

- Dém:

- $E[Z_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} n\mu = \mu$

- $Var[Z_n] = E[(Z_n - \mu)^2] = E[n^{-2}(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu)^2] =$

- $= n^{-2} E[(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu))^2] =$

- $= n^{-2} E[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2] + 2 \sum_{i \neq j} E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] =$

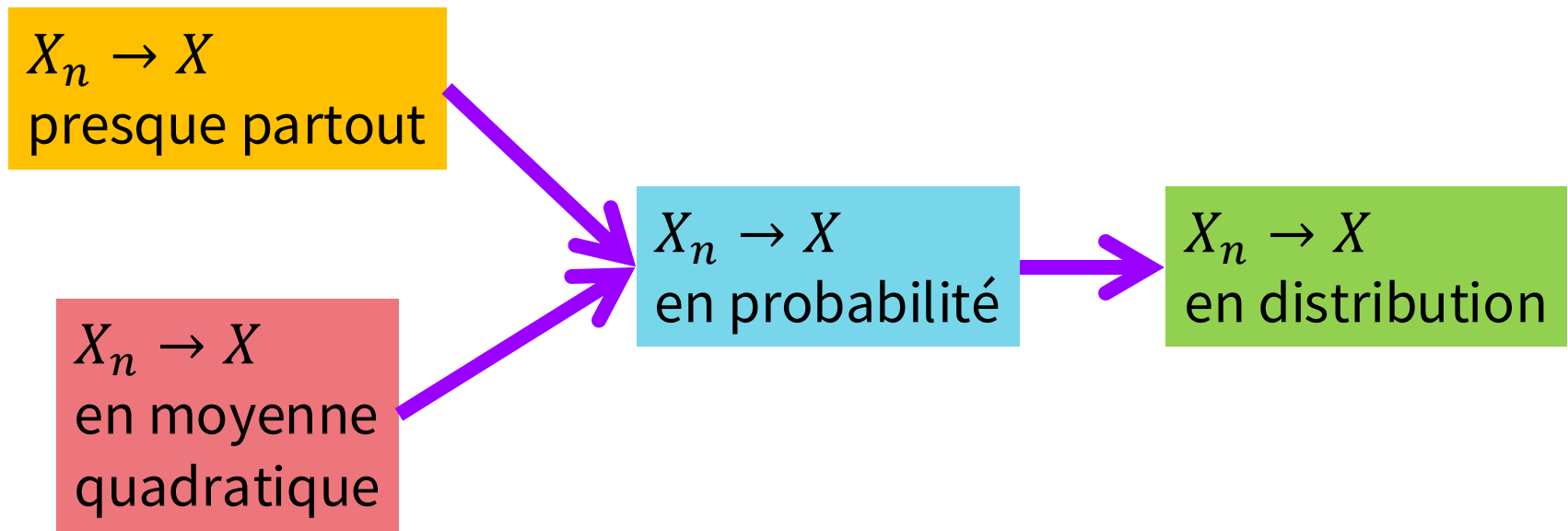
- $= n^{-2} n\sigma^2 = \sigma^2/n$

- Inégalité de Tchebychev:

- $P(|Z_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \rightarrow 0$

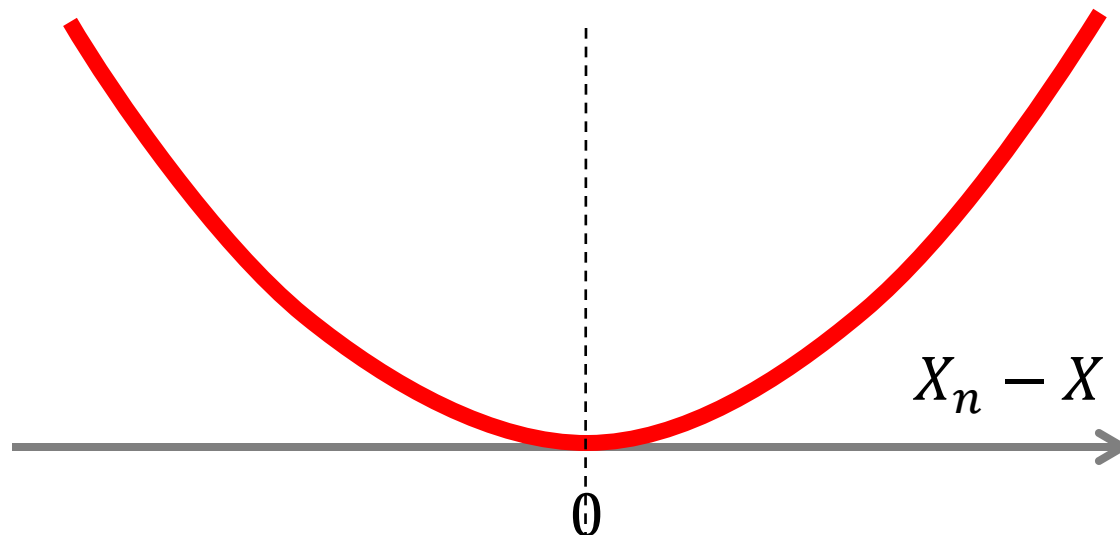
Convergence de variables aléatoires

- Convergence en moyenne quadratique («in mean square»):
 - $E[(X_n - X)^2] \rightarrow 0$
- Relations entre les notions de convergence:

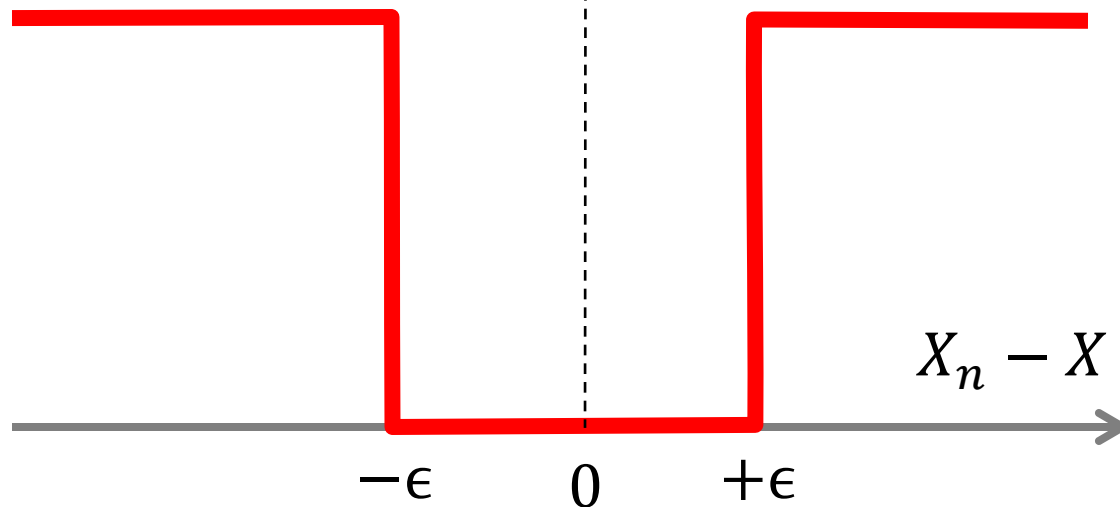


Convergence: illustration

$X_n \rightarrow X$
en moyenne
quadratique



$X_n \rightarrow X$
en probabilité



Convergence: illustration

$X_n \rightarrow X$
en distribution

