Module 1: Variables aléatoires

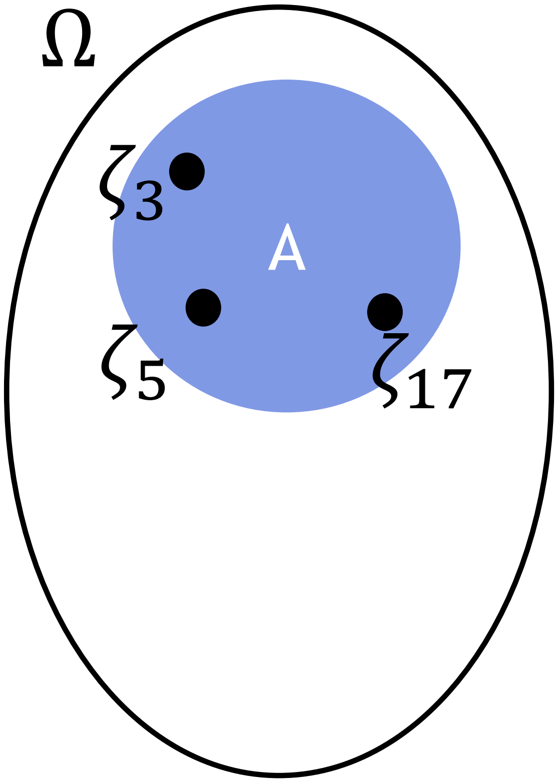
Modèles stochastiques
pour les communications

Prof. Matthias Grossglauser
Prof. Patrick Thiran

LCA-I&C

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Les axiomes de probabilité

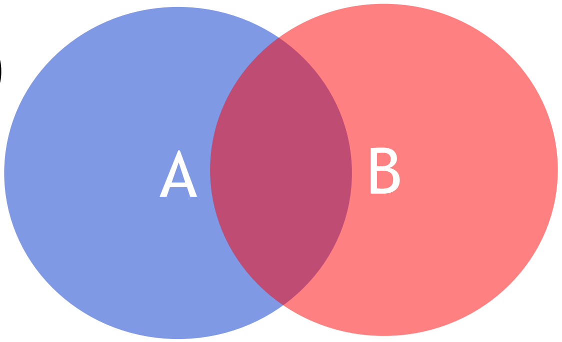


- ζ_i: résultat d'une expérience
- $A = \{\zeta_3, \zeta_5, \zeta_{17}\}$: évènement
- $\Omega = \{\text{tous les } \zeta_i\}$: évènement certain
- $\emptyset = \{\}$: évènement impossible
- Probabilité:
  - $P(A)$: probabilité de l'évènement A
  - $P(A) \geq 0$
  - $P(\Omega) = 1$
  - Si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  - Si $A_1, A_2, \ldots$ tel que $A_i \cap A_j = \emptyset$, alors $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Corollaires

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
  - Dém:
    - $\Omega = \mathrm{A} \cup \bar{A} \Rightarrow P(\mathrm{A} \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$
    - $A \cap \bar{A} = \emptyset \Rightarrow P(\mathrm{A} \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$
- $P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$

Dém: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



- $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$
- $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$
- $B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$
- $\Rightarrow P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$
- $\Rightarrow P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) =$
$$\big(P(A) - P(A \cap B)\big) + \big(P(B) - P(A \cap B)\big) + P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilité conditionnelle

- $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
- Propriétés importantes:
  - Théorème des probabilités totales:
    - Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est une partition de Ω, càd,
      $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$,
      $$A_i \cap A_j = \emptyset$$
    - alors
      $$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) = P\big(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)\big) = \\ &= P\big((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)\big) = \\ &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

Probabilité conditionnelle

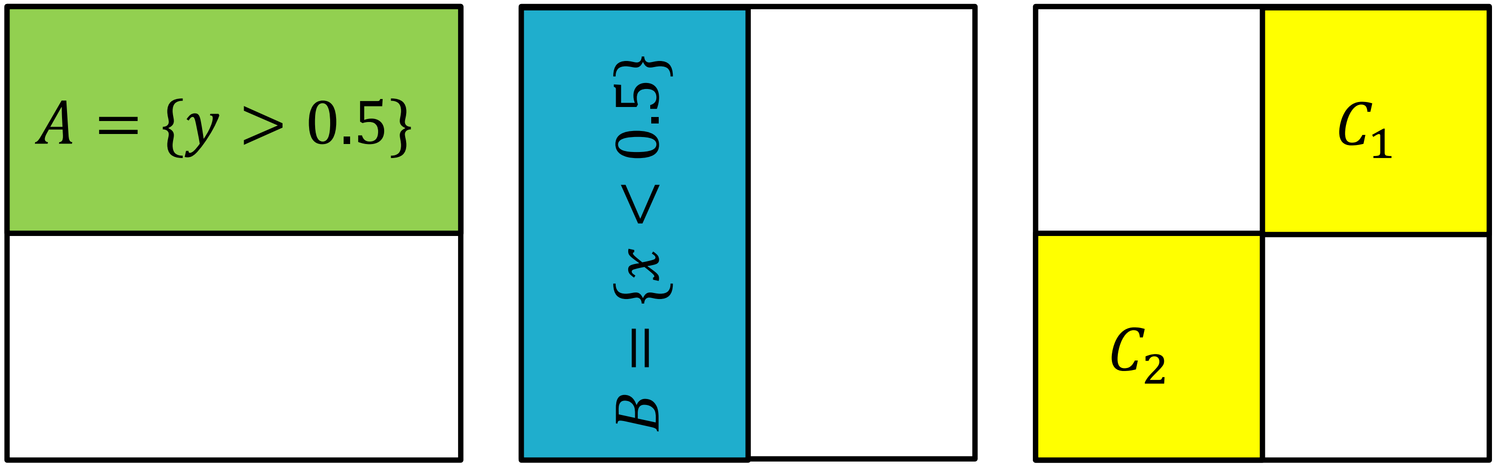
- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Propriétés importantes:
  - Règle de Bayes:
    - Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ une partition de Ω
    - $P(A_i|B) = \dfrac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)}$
  - Dém:
    - $P(A_i \cap B) = P(A_i|B)P(B) = P(B|A_i)P(A_i)$
    - $P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$ (prob. totales)

Indépendance

- A et B sont indépendants si
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
  - $\Rightarrow P(A|B) = P(A)$
  - $\Rightarrow P(B|A) = P(B)$

- (A, B, C) sont indépendants si
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

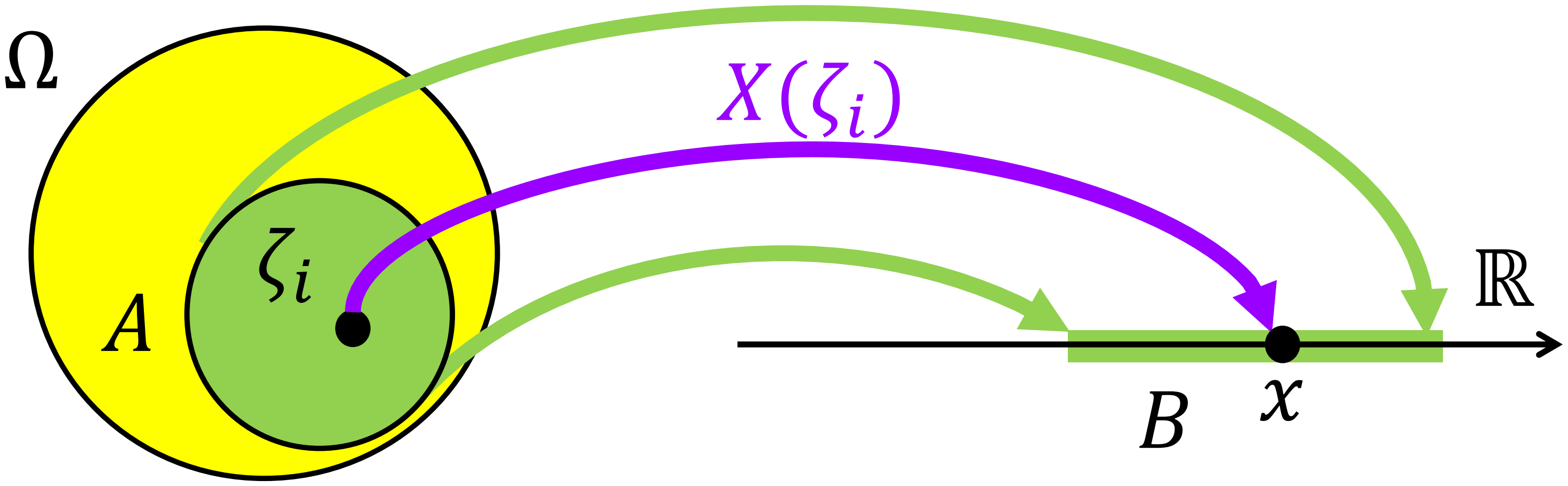
Indépendance de trois variables



- $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$
- $P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$
- $P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$
- Mais:

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

Variable aléatoire



- $B = \{X(\zeta) \colon \zeta \in A\}$
- $A = \{\zeta \colon X(\zeta) \in B\}$
- $P(A) = P(B)$
- $S_X = \{X(\zeta) \colon \zeta \in \Omega\}$

Fonction de répartition

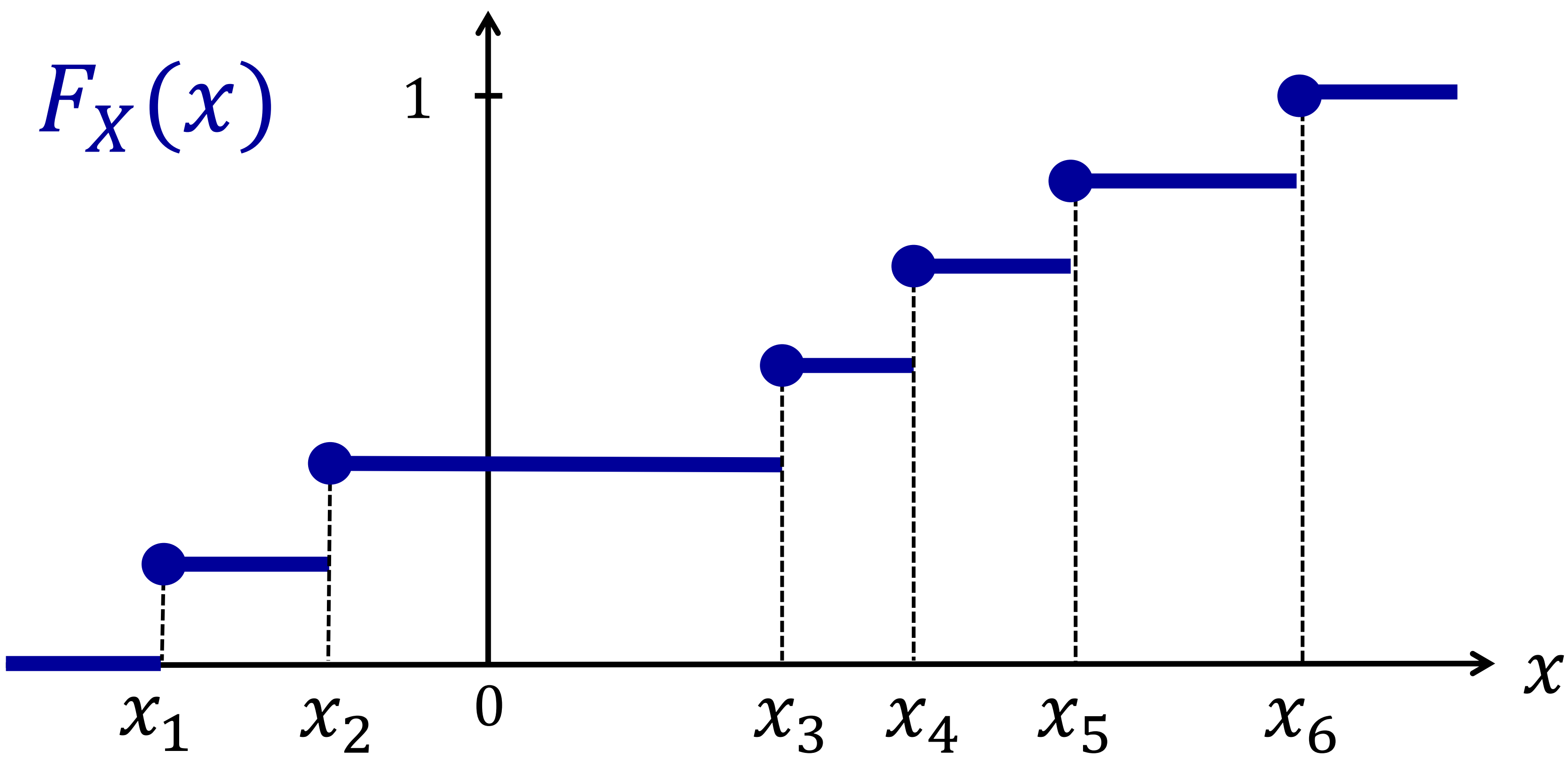
- (Cumulative distribution function, CDF)
- $F_X(x) = P(X \leq x)$

  $= P(A)$ pour $A = \{\zeta \in \Omega : X(\zeta) \leq x\}$
- Propriétés:
  - $0 \leq F_X(x) \leq 1$
  - $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
  - $a < b \Rightarrow \ F_X(a) \leq F_X(b)$
  - $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
  - $F_X(x)$ est continue à droite, càd

    $$F_X(x) = \lim_{\epsilon \to 0} F_X(x + \epsilon) = F_X(x^+)$$

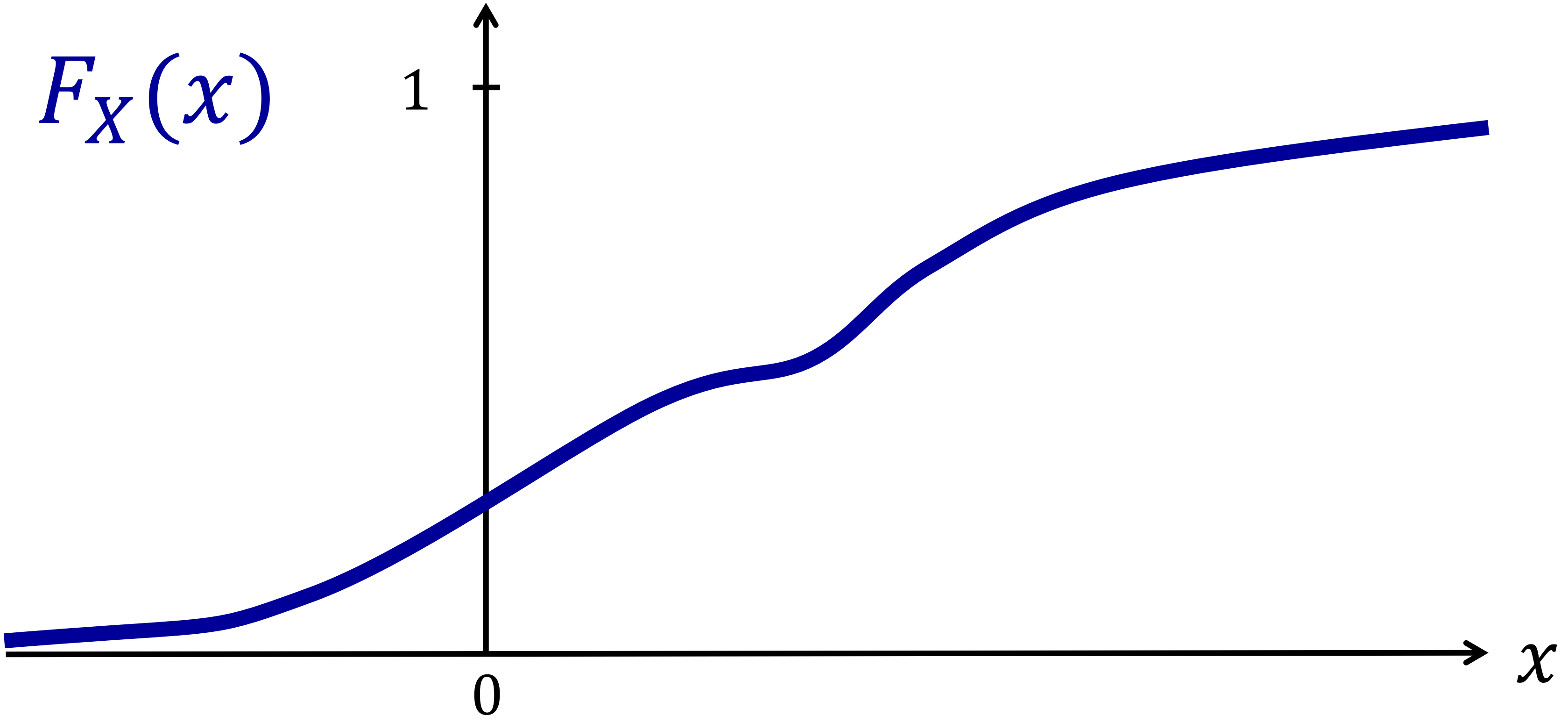
Variable aléatoire discrète

- Si X prend un nombre dénombrable de valeurs $\{x_1, x_2, x_3, \dots\} = S_X$
- $P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i^-) = p_i$



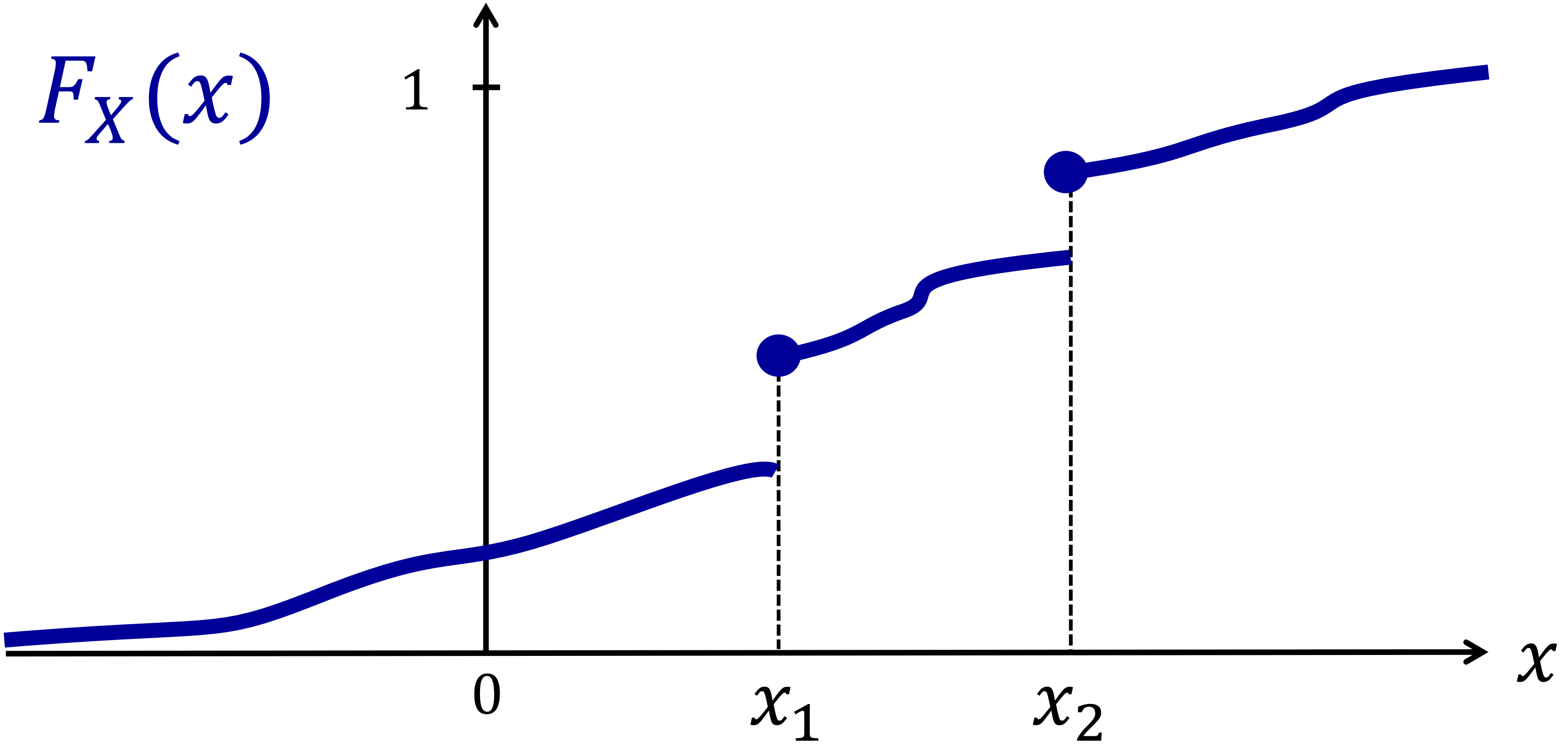
Variable aléatoire continue

- $F_X(x)$ continue, X prend un nombre infini de valeurs
- $P(X = x) = 0$



Variable aléatoire mixte

- X prend un nombre infini de valeurs, mais $F_X(x)$ n'est pas continue



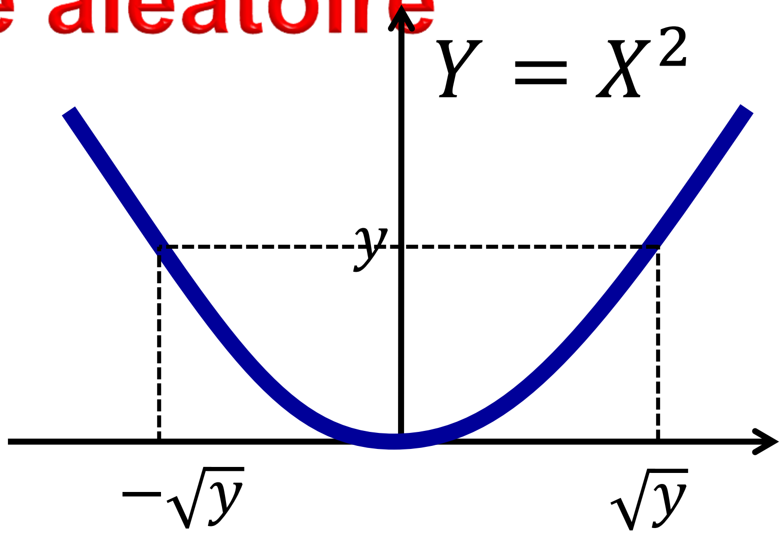
Densité de probabilité

- $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$
- V.a. discrète ($p_i = P(X = x_i)$)
  - $f_X(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i)$
  - Propriétés:
    - $p_i \geq 0$
    - $\sum p_i = 1$
    - $P(X \leq a) = F_X(a) = \sum_{x_i \leq a} p_i$
    - $P(X = x_i) = F(x_i) - F_X(x_i^-)$

Densité de probabilité

- $$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$
- V.a. continue
  - Propriétés:
    - $f_X(x) \geq 0$
    - $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
    - $P(X \leq a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx$
    - $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(x)$

Fonction d'une variable aléatoire



- $Y = g(X)$
- Exemple: $g(X) = X^2$
- $F_Y(y) = P(Y \leq y)$

$$= P(X^2 \leq y)$$

$$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \; (y \geq 0)$$

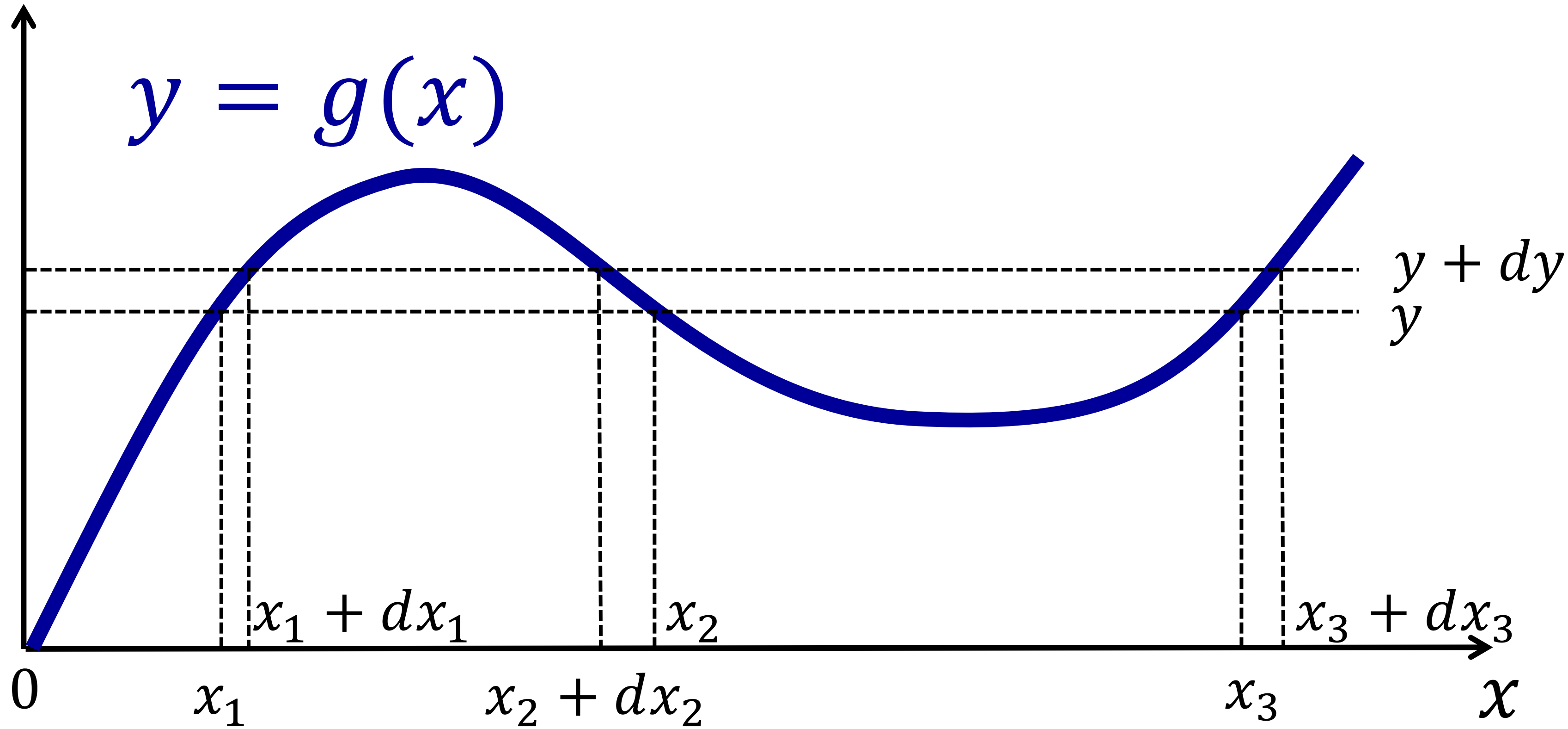
$$= \begin{cases} F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

- $f_Y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy}$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)\frac{dF_X(\sqrt{y})}{d(\sqrt{y})} - \left(\frac{-1}{2\sqrt{y}}\right)\frac{dF_X(-\sqrt{y})}{d(-\sqrt{y})}$$

$$= \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \text{ si } y > 0$$

Densité de probabilité $f_Y(y)$



- $$\begin{cases} A = \{y < Y < y + dy\} \\ A = \{x_1 < X < x_1 + dx_1\} \cup \{x_2 + dx_2 < X < x_2\} \cup \\ \cup \{x_3 < X < x_3 + dx_3\} \end{cases}$$

Densité de probabilité $f_Y(y)$

- $\begin{cases} P(A) \cong f_Y(y)|dy| \\ P(A) \cong f_X(x_1)|dx_1| + f_X(x_2)|dx_2| + f_X(x_3)|dx_3| \end{cases}$
- $\Rightarrow \quad f_Y(y) = \sum_i f_X(x_i) \left|\frac{dx_i}{dy}\right| = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$
- En résumé:
  - $\{x_i\}$ sont les racines de $g(x_i) = y$
  - $f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$

Moyenne et variance d'une v.a.

- Espérance (mathématique) ou moyenne:
  - $\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$
  - Cas discret: $P(X = x_i) = p_i$

    $$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\sum_i p_i \delta(x - x_i)\right) dx$$
    $$= \sum_i p_i \int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x - x_i)\, dx = \sum_i p_i x_i$$
- Variance:
  - $\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx$
  - Cas discret:

    $$E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \left(\sum_i p_i \delta(x - x_i)\right) dx$$
    $$= \sum_i p_i \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \delta(x - x_i) dx$$
    $$= \sum_i p_i (x_i - \mu_X)^2$$
- Ecart-type: σ_X

Espérance d'une fonction d'une v.a.

- $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$
- Exemple:
  - $g(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$
  - $E[g(X)] = a_0 + a_1 E[X] + a_2 E[X^2] + \cdots + a_n E[X^n]$
- Moment d'ordre n: $E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx$
  - Moyenne: $\mu_X = E[X]$
  - Variance: $\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = E[X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2]$

$$= E[X^2] - 2\mu_X E[X] + \mu_X^2$$

$$= E[X^2] - (E[X])^2$$

Transformées

- Fonction caractéristique (characteristic function):
  - $\boldsymbol{\Phi_X(\omega) = E\left[e^{j\omega X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, e^{j\omega x} dx}$
  - Propriétés:
    - $f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega)\, e^{-j\omega x} d\omega$
    - $E[X^k] = j^{-k}\left[\frac{d^k\Phi_X(\omega)}{d\omega^k}\right]_{\omega=0}$
    - $|\Phi_X(\omega)| \leq \Phi_X(0) = 1$
- Fonction génératrice de moment (moment-generating function):
  - $\widehat{\Phi}_X(s) = E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, e^{sX} dx$
  - Propriété:
    - $\widehat{\Phi}_X(s = j\omega) = \Phi_X(\omega)$

Transformées

- Fonction génératrice de cumulant

$$\boldsymbol{\Psi_X(\omega) = \ln \Phi_X(\omega)}$$

- Propriété:
  - $\Psi_X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i \frac{(j\omega)^i}{i!}$
  - K_i: cumulants
  - $E[X] = K_1$
  - $E[X^2] = K_2 + K_1^2$
  - $E[X^3] = K_3 + 3K_2K_1 + K_1^3$
  - …

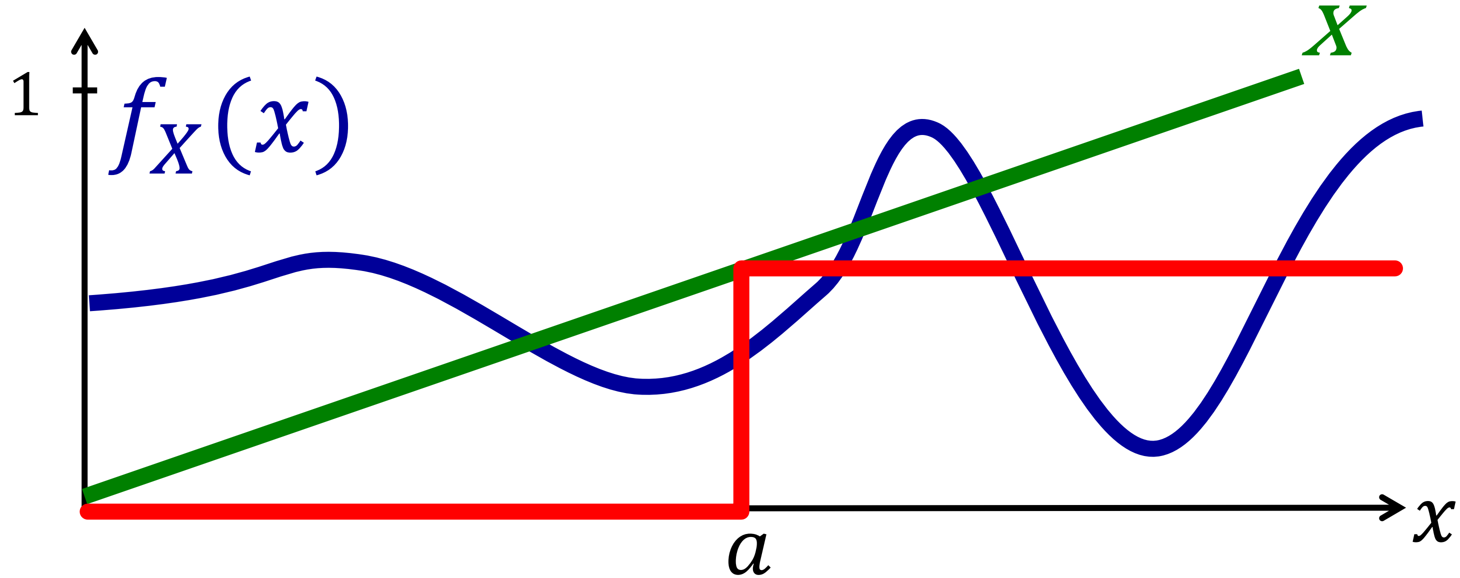
Fonction génératrice de probabilité

- S'applique aux v.a. discrètes et qui prennent des valeurs uniformément espacées
  - Exemple: $S_X = \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$
- $G_X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i P(X = i) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i p_i = E[z^X]$
- Propriétés:
  - $\boldsymbol{P(X = k) = p_k = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k G_X(z)}{dz^k}\right]_{z=0}}$
  - $\boldsymbol{E[X(X-1)(X-2)\ldots(X-n+1)] = \left[\frac{d^n G_X(z)}{dz^n}\right]_{z=1}}$
    - $\mu_X = E[X] = \left[\frac{dG_X(z)}{dz}\right]_{z=1}$
    - $\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2$

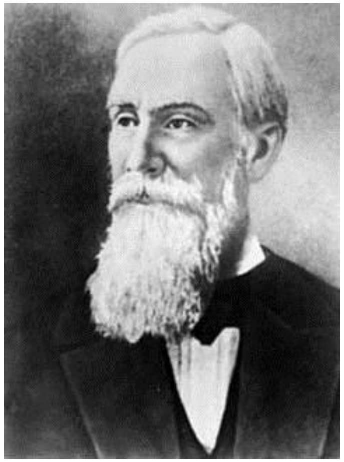
$$= \left[\frac{d^2 G_X(z)}{dz^2}\right]_{z=1} + \left[\frac{dG_X(z)}{dz}\right]_{z=1} - \left[\frac{dG_X(z)}{dz}\right]_{z=1}^2$$

Inégalités

- Inégalité de Markov:
  - $\boldsymbol{P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}}, \quad \boldsymbol{X \geq 0}$
  - Dém:
    - $E[X] \quad = \int_0^a x f_X(x)dx + \int_a^\infty x f_X(x)dx$
      $\geq \int_a^\infty x f_X(x)dx \geq \int_a^\infty a f_X(x)dx$
      $= a \int_a^\infty f_X(x)dx = aP(X \geq a)$



Inégalités



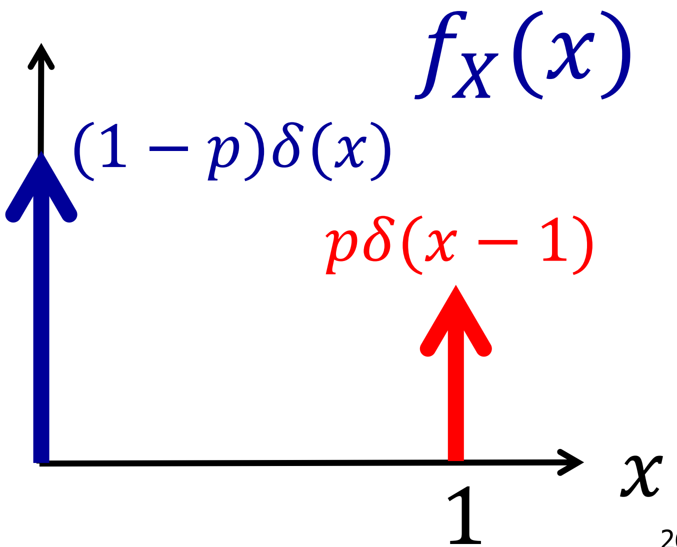
- Inégalité de Tchebychev (Chebyshev):
  - $$\boldsymbol{P(|X - \mu_X| \geq a) \leq \frac{\sigma_X^2}{a^2}}$$
  - Dém:
    - Soit $Y^2 = (X - \mu_X)^2$
    - $P(Y^2 \geq a^2) = P(|X - \mu_X| \geq a)$
    - Inégalité de Markov: $P(Y^2 \geq a^2) \leq \frac{E[Y^2]}{a^2} = \frac{E[(X-\mu_X)^2]}{a^2} = \frac{\sigma_X^2}{a^2}$

Variables aléatoires discrètes

- Bernoulli («coin flip»)
  - Fonction indicatrice d'un évènement A:

$$1_{\{\zeta \in A\}} = I_A(\zeta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \zeta \notin A \\ 1, & \text{si } \zeta \in A \end{cases}$$

  - $X = I_A$ est une v.a. dont $S_X = \{0,1\}$ et caractérisée par un paramètre p
  - $\begin{cases} P(X=0) = 1-p \\ P(X=1) = p \end{cases}$
  - $\mu_X = E[X] = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$
  - $\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2$
    $= (0^2(1-p) + 1^2 p) - p^2$
    $= p - p^2 = p(1-p)$
  - $G_X(z) = (1-p) + pz$



Variables aléatoires discrètes

- Binomiale (n, p)
  - On répète une expérience de Bernoulli n fois indépendamment.
  - X est la v.a. comptant le nombre des succès obtenus:

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

  - $S_X = \{0,1,2,\ldots,n\}$
  - $\boldsymbol{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$, où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
  - $\mu_X = E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \boldsymbol{np}$
  - $\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \boldsymbol{np(1-p)}$
  - $G_X(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pz)^k (1-p)^{n-k} = \boldsymbol{\left(pz + (1-p)\right)^n}$$

Variables aléatoires discrètes

- Géométrique (p):
  - On compte le nombre d'essais de Bernoulli nécessaires pour obtenir un succès (essais indépendants)
- Version 1: X=nombre d'échecs avant le 1er succès
  - $S_X = \{0,1,2,\dots\}$
  - $P(X = k) = p(1-p)^k$
  - $E[X] = \frac{1-p}{p}, \quad \sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2}$
  - $G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k z^k = p\sum_{k=0}^{\infty}\big((1-p)z\big)^k = \frac{p}{1-(1-p)z}$
- Version 2: X'=nombre d'essais avant le 1er succès
  - $S_X = \{1,2,3,\dots\}$
  - $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$
  - $E[X] = \frac{1}{p}, \quad \sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2}, \quad G_{X'}(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$

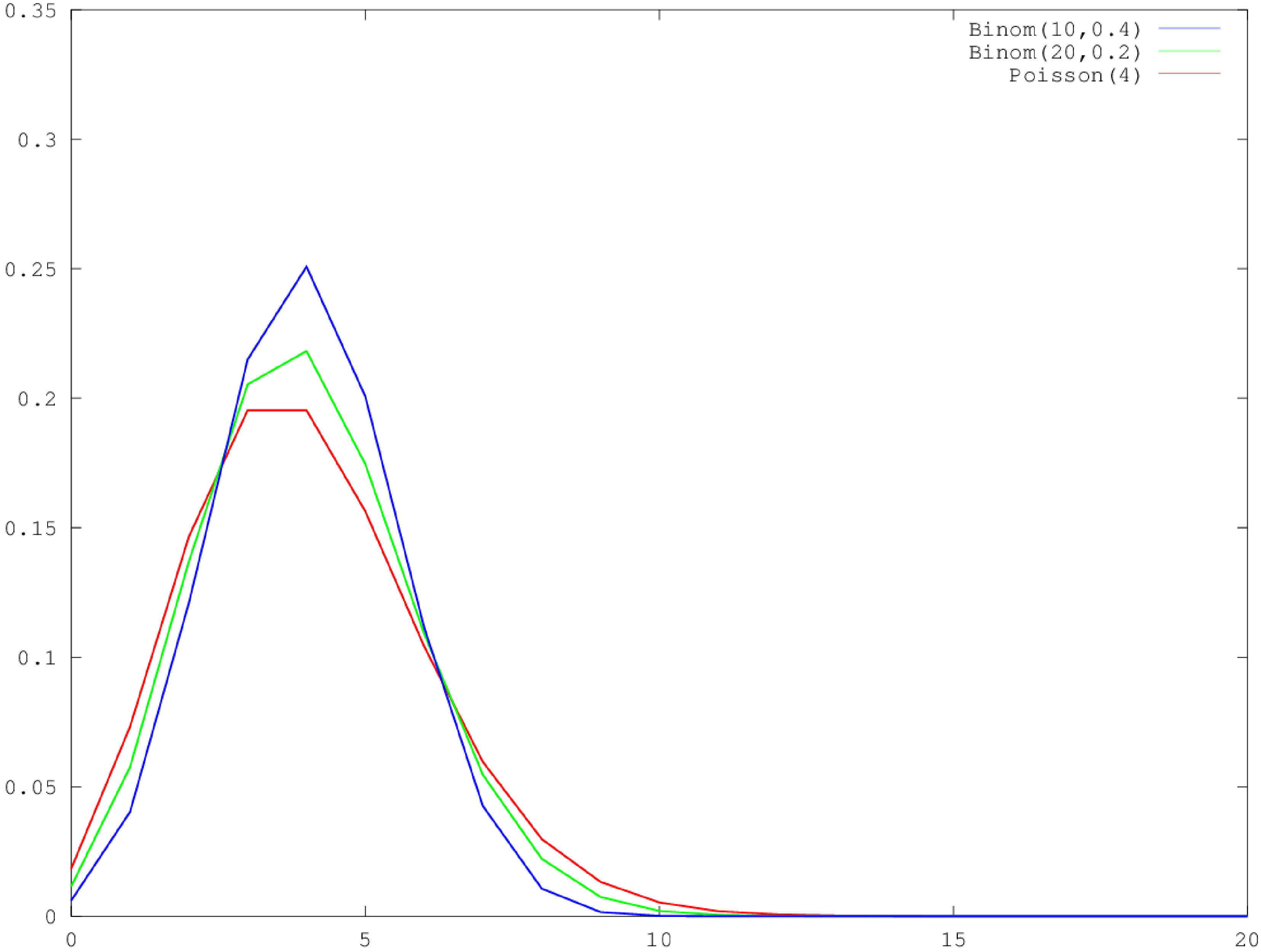
Variables aléatoires discrètes

- Poisson (μ):
  - X est une v.a. comptant le nombre d'arrivées de clients dans un processus de Poisson pendant une unité de temps μ
  - $S_X = \{0,1,2,\ldots\} = \mathbb{N}$
  - $P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$
  - $\mu_X = E[X] = \mu$
  - $\sigma_X^2 = \mu$
  - $G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} z^k = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu z)^k}{k!} = e^{-\mu} e^{\mu z} = e^{\mu(z-1)}$

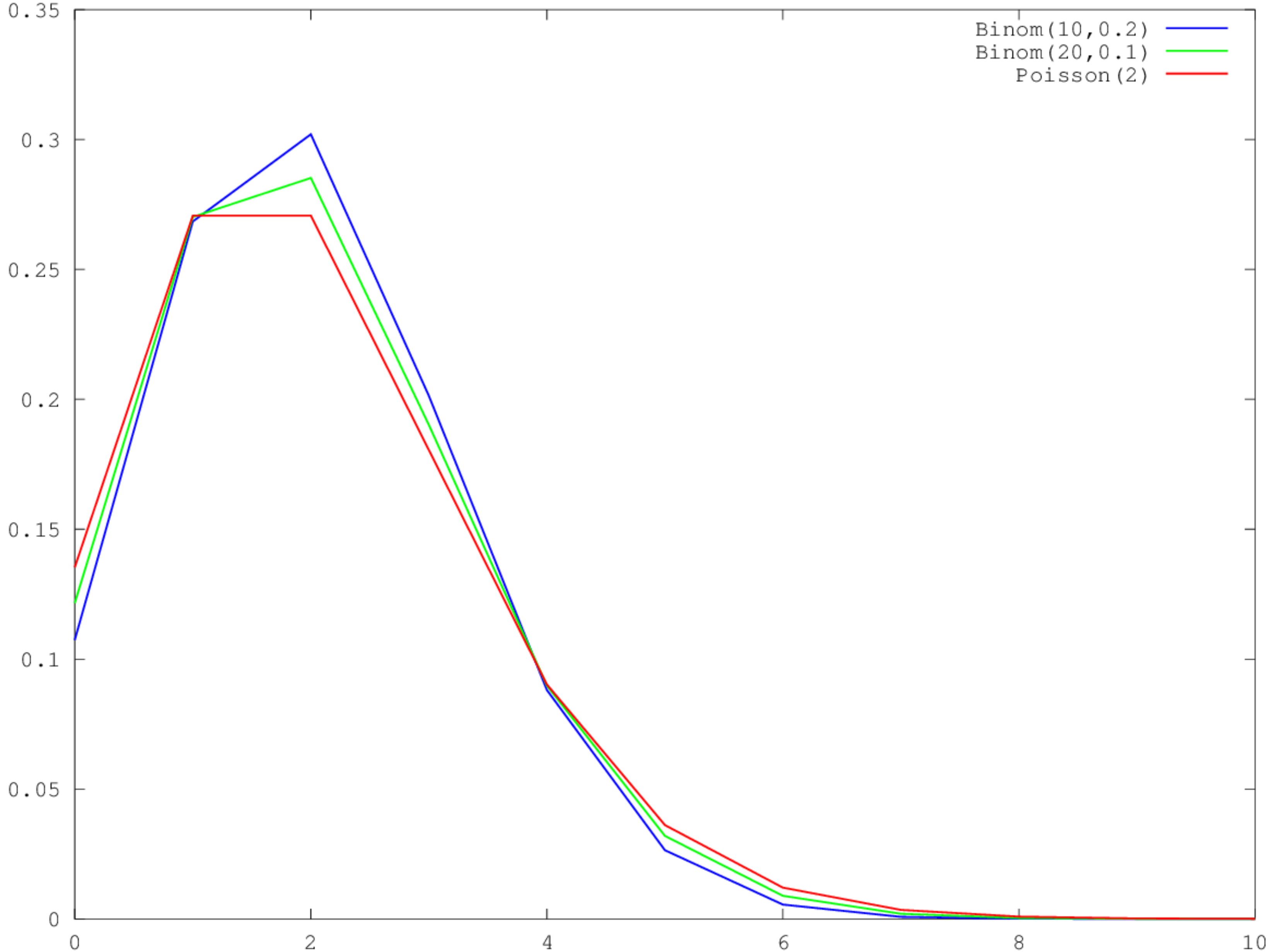
Propriété: Binomiale vs Poisson

- Soit X une binomiale (n, p):
  - $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
- Pour $np = \mu$ constant et $n \to \infty$:
  - $\boldsymbol{p_k \to \dfrac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}}$
- Dém:
  - $p_0 = \binom{n}{0} p^0 (1 - p)^n = (1 - p)^n = \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \to e^{-\mu}$
  - $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{(1-\frac{k}{n})\mu}{(k+1)(1-\frac{\mu}{n})} \to \frac{\mu}{k+1}$
  - $p_{k+1} = \frac{\mu}{k+1} p_k = \frac{\mu}{k+1} \frac{\mu}{k} p_{k-1} = \cdots = \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!} p_0 \to \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\mu}$

Binom → Poisson

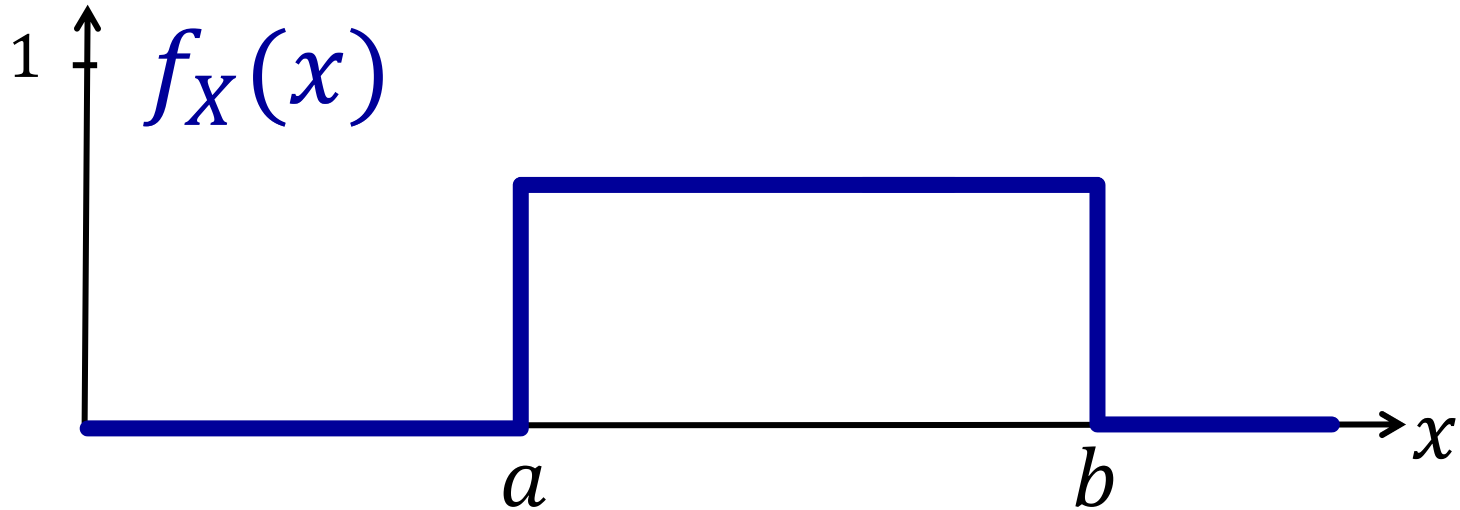


Binom → Poisson



Variables aléatoires continues

- Uniforme (a, b):
  - $S_X = [a, b]$
  - $f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$
  - $\mu_X = \frac{a+b}{2}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
  - $\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, e^{j\omega x} dx = \frac{1}{b-a} \frac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega}$



Variables aléatoires continues

- Gaussienne $N(\mu, \sigma^2)$
  - $S_X = \mathbb{R}$
  - $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
  - $F_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-(x-\mu)/\sigma} e^{-t^2/2} dt$
  - $\mu_X = \mu$
  - $\sigma_X^2 = \sigma^2$
  - $\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) e^{j\omega x} dx =$

    $$= e^{j\mu\omega - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$$
- V.a. normale
  - = gaussienne normalisée $N(0{,}1)$

Variables aléatoires continues

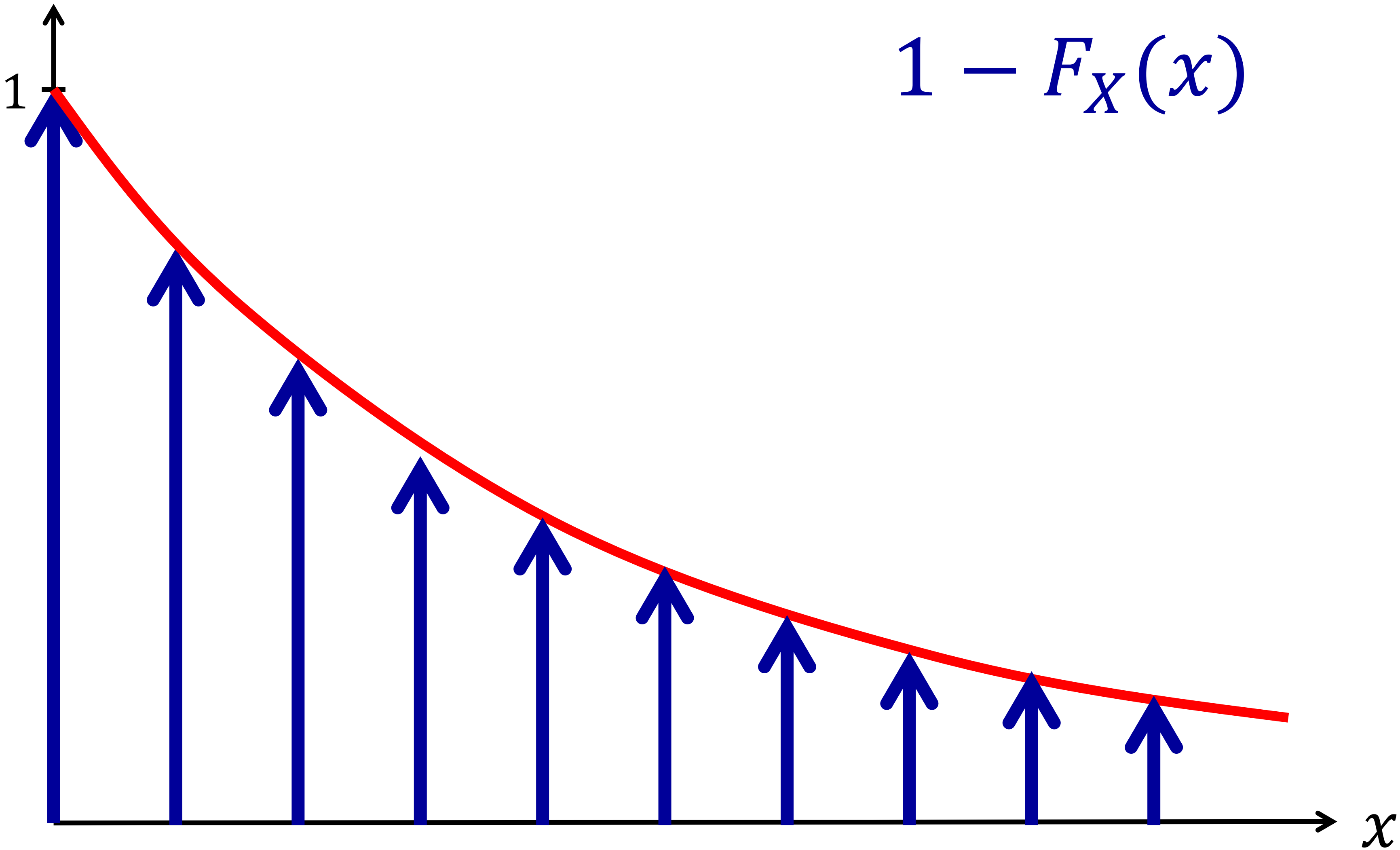
- Exponentielle (λ)
  - Mesure le temps entre deux arrivées successives de clients dans un processus poissonien
  - $S_X = [0, \infty)$
  - $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
  - $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
  - $\mu_X = \lambda^{-1}$
  - $\sigma_X^2 = \lambda^{-2}$
  - $\Phi_X(\omega) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{j\omega x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{(j\omega - \lambda)x} dx =$

$$= \frac{\lambda}{j\omega - \lambda} \left[e^{(j\omega - \lambda)x} \right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}$$

Variables aléatoires continues

- Propriété: v.a. exponentielle est sans mémoire
  - $P(X > t + T | X > T) =$
  - $= \frac{P(X>t+T, X>T)}{P(X>T)} =$
  - $= \frac{P(X>t+T)}{P(X>T)}$
  - $= \frac{e^{-\lambda(t+T)}}{e^{-\lambda T}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$

Géométrique vs exponentielle



Variables aléatoires continues

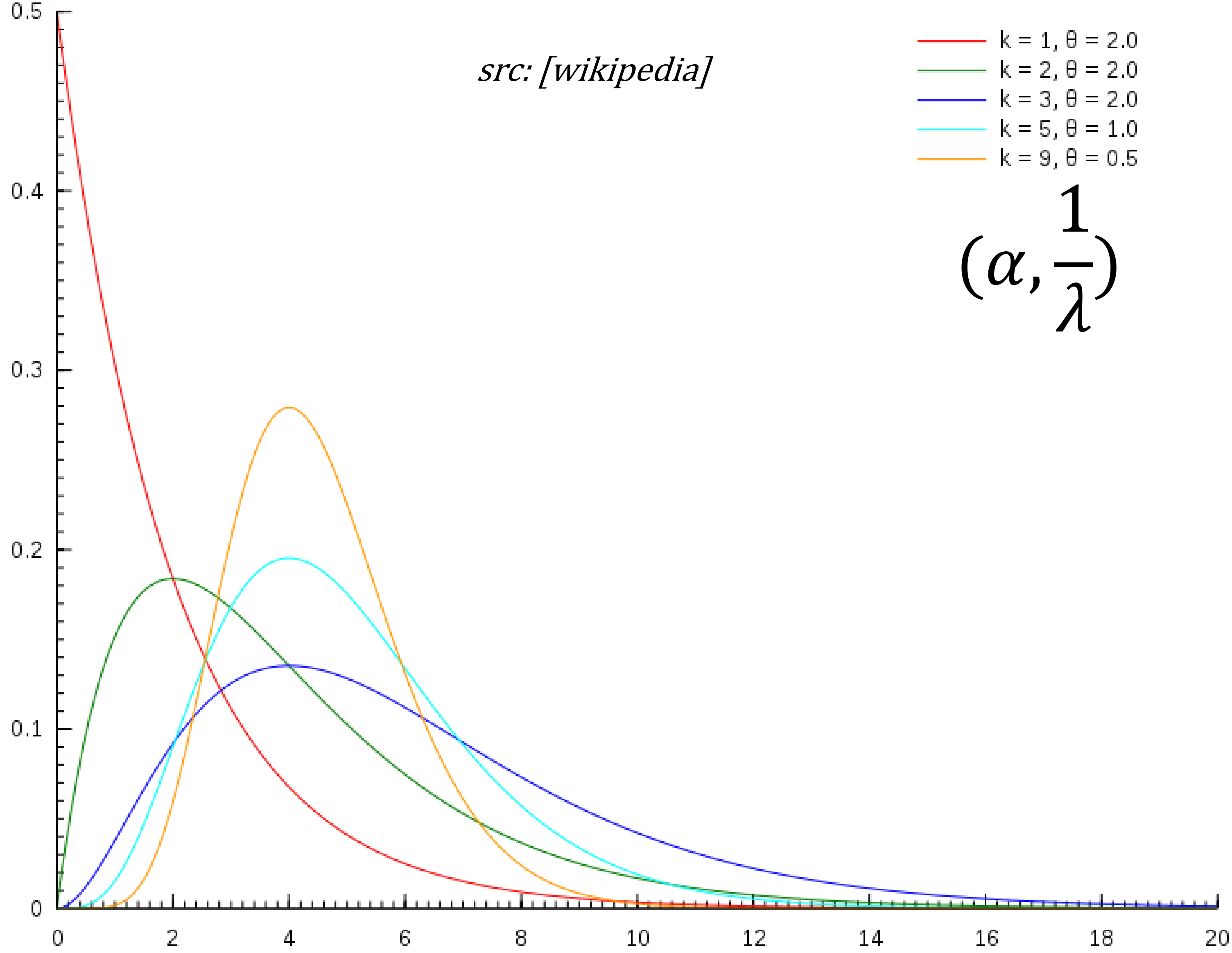
- V.a. Gamma (λ, α):
  - λ: «rate» ou «inverse scale», α: «shape»
  - $S_X = (0, \infty)$
  - $f_X(x) = \dfrac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0, \gamma > 0$
  - $\mu_X = \alpha/\lambda$
  - $\sigma_X^2 = \alpha/\lambda^2$
  - $\Phi_X(\omega) = \dfrac{1}{\left(1-\frac{j\omega}{\lambda}\right)^{\alpha}}$
- Fonction $\Gamma(.)$:
  - $\Gamma(\mathrm{u}) = \int_0^\infty x^{u-1}e^{-x}dx; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
  - Généralisation du factoriel: $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$
    $\Rightarrow \Gamma(u+1) = u!$

Variables aléatoires continues

- Propriétés de la v.a. Gamma:
  - Gamma (λ, m) → Erlang (λ, m)
  - Gamma $\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$ → $\mathrm{X}^2(\nu)$ (Chi-carré)
    - $\lambda = \frac{1}{2}$
    - $\alpha = \frac{\nu}{2}$, ν est le # de degrés de liberté
  - $X \sim N(0,1), Y = X^2 \sim \mathrm{X}^2(1)$
    - Dém:
      - $f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{y}}\left[e^{-\frac{y}{2}} + e^{-\frac{y}{2}}\right] = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi y}} = \frac{y^{-\frac{1}{2}}e^{-y/2}}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Gamma



src: [wikipedia]
k = 1, θ = 2.0
k = 2, θ = 2.0
k = 3, θ = 2.0
k = 5, θ = 1.0
k = 9, θ = 0.5
$(\alpha, \frac{1}{\lambda})$
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20