

# Modèles stochastiques pour les communications

## formulaire officiel

30 septembre 2024

### 1 Variables aléatoires (v.a.) : généralités et définitions

Si  $A, B$  sont des évènements aléatoires, et si  $\{A_1, \dots, A_n\}$  est une partition de l'espace  $\Omega$ ,

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- (Théorème des probabilités totales)  $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)$ .
- (Règle de Bayes)  $P(A_i | B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)}$ .

Fonction de répartition de la v.a.  $X$  :  $F_X(x) = P(X \leq x)$

Densité de probabilité de la v.a.  $X$  :  $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$ .

**Changement de v.a.** Si  $Y = g(X)$  avec  $g(\cdot)$  une fonction continue,  $f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$  où  $x_i$  sont les racines de l'équation  $y = g(x)$ .

**Espérance d'une fonction de v.a.**

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx.$$

Quelques moments particuliers :

- Moyenne :  $\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$  (Cas discret :  $\mu_X = \sum_i P(X = x_i)x_i$ ).
- Variance :  $VAR[X] = \sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = E[X^2] - \mu_X^2$ .
- Fonction caractéristique :  $\Phi_X(\omega) = E[e^{j\omega X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x)dx$ . Transformée inverse :  $f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} \Phi(\omega)d\omega$ . Moment d'ordre  $k$  :  $E[X^k] = \frac{1}{j^k} \frac{d^k \Phi_X(\omega)}{d\omega^k} \Big|_{\omega=0}$ .
- Fonction génératrice de moment :  $\hat{\Phi}_X(s) = E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x)dx$ .
- Fonction génératrice de probabilité (pour une v.a. discrète dont le domaine est inclus dans  $\mathbb{N}$ ) :  $G_X(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X = k)$ . Transformée inverse :  $P(X = k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k G_X(z)}{dz^k} \Big|_{z=0}$ . Moments :  $E[X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)] = \frac{d^k G_X(z)}{dz^k} \Big|_{z=1}$ .

**Inégalités.**

- Markov : Si  $X \geq 0$  et  $a > 0$ ,  $P(X \geq a) \leq E[X]/a$ .
- Tchébyscheff : Si  $b > 0$ ,  $P(|X - \mu_X| \geq b) \leq \sigma_X^2/b^2$ .
- Chernoff : Si  $x, s > 0$ ,  $P(X > x) \leq e^{-sx} \hat{\Phi}_X(s)$ .

## 2 Exemples de variables aléatoires

### 2.1 Variable aléatoire de Bernoulli

La fonction indicatrice  $I_A$  d'un évènement  $A$  lié à une expérience aléatoire est

$$I_A(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \zeta \notin A, \\ 1 & \text{si } \zeta \in A. \end{cases} \quad (1)$$

Cette fonction est donc une v.a.  $X = I_A$ , qui prend une des valeurs de  $S_X = \{0, 1\}$  avec les probabilités  $P(X = 0) = 1 - p$  et  $P(X = 1) = p$ , où  $p = P(A)$ , et est appelée *variable aléatoire de Bernoulli* de paramètre  $p$ . On calcule aisément sa moyenne

$$\mu_X = E[X] = p, \quad (2)$$

sa variance

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2 = p - p^2 = p(1 - p) \quad (3)$$

et sa fonction génératrice de probabilité

$$G_X(z) = 1 - p + pz. \quad (4)$$

### 2.2 Variable aléatoire binomiale

La v.a.  $X$  comptant le nombre de succès obtenus est la *variable aléatoire binomiale* de paramètres  $(n, p)$ , qui s'exprime à partir de la fonction indicatrice par

$$X = I_{A_1} + I_{A_2} + \dots + I_{A_n}.$$

Son domaine est donc  $S_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Sa loi de probabilité est donnée par

$$p_k = P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \quad (5)$$

où

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

À l'aide de la formule du binôme (ou plus simplement en utilisant le fait que  $X$  est une somme de v.a. de Bernoulli indépendantes), on trouve

$$\mu_X = E[X] = np, \quad (6)$$

$$\sigma_X^2 = np(1 - p), \quad (7)$$

$$G_X(z) = (1 - p + pz)^n. \quad (8)$$

### 2.3 Variable aléatoire géométrique

Dans une première version, la *variable aléatoire géométrique* de paramètre  $p$   $X$  compte le nombre d'*échecs* avant le premier succès. Par conséquent, son domaine est  $S_X = \{0, 1, 2, \dots\}$  et sa loi de probabilité est donnée par

$$p_k = P(X = k) = p(1 - p)^k. \quad (9)$$

On trouve, en recourant aux formules relatives aux progressions géométriques,

$$\mu_X = E[X] = \frac{1-p}{p}, \quad (10)$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2}, \quad (11)$$

$$G_X(z) = \frac{p}{1-(1-p)z}. \quad (12)$$

Dans une seconde version, la *variable aléatoire géométrique* de paramètre  $p$   $X'$  compte le nombre d'*essais* avant le premier succès. Par conséquent,  $X' = X + 1$ , son domaine est  $S_{X'} = \{1, 2, \dots\}$  et sa loi de probabilité est donnée par

$$p'_k = P(X' = k) = p(1-p)^{k-1} \quad (13)$$

On trouve immédiatement, comme  $X' = X + 1$ ,

$$\mu_{X'} = E[X'] = \frac{1}{p}, \quad (14)$$

$$\sigma_{X'}^2 = \frac{1-p}{p^2}, \quad (15)$$

$$G_{X'}(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}. \quad (16)$$

## 2.4 Variable aléatoire de Poisson

La variable aléatoire de Poisson, de paramètre  $\lambda T > 0$ , est définie par la loi de probabilité

$$p_k = P(X = k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}. \quad (17)$$

En utilisant le développement de  $e^{\lambda T}$  en série de Taylor, on obtient après quelques manipulations

$$\mu_X = E[X] = \lambda T, \quad (18)$$

$$\sigma_X^2 = \lambda T, \quad (19)$$

$$G_X(z) = e^{\lambda T(z-1)}. \quad (20)$$

La v.a. de Poisson a la propriété d'être la limite d'une v.a. binomiale  $B(n, p)$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$  et  $p \rightarrow 0$ .

## 2.5 Variable aléatoire uniforme

Une *variable aléatoire uniforme continue* sur un intervalle  $[a, b] = S_X$  est définie par sa densité de probabilité

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (21)$$

On calcule immédiatement sa moyenne

$$\mu_X = E[X] = \frac{a+b}{2}, \quad (22)$$

sa variance

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad (23)$$

et sa fonction caractéristique

$$\Phi_X(\omega) = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{j\omega x} dx = \frac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{(b-a)j\omega}. \quad (24)$$

## 2.6 Variable aléatoire gaussienne

Une *variable aléatoire gaussienne*  $X$  de paramètres  $(\mu, \sigma)$  est définie par sa densité de probabilité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (25)$$

L'interprétation des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  est fournie par le calcul de sa moyenne et de sa variance. En effet,  $\mu$  n'est autre que la moyenne, car la fonction  $f_X(x)$  est symétrique autour du point  $x = \mu$ ,

$$\mu_x = E[X] = \mu, \quad (26)$$

tandis que  $\sigma$  est l'écart-type car le calcul de la variance donne

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_x^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx - \mu^2 = \dots = \sigma^2. \quad (27)$$

La fonction de répartition doit être calculée numériquement ou à l'aide de tables (fonction  $Q(\cdot)$  ou  $\text{erf}(\cdot)$ )

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\xi^2/2} d\xi = 1 - \text{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (28)$$

car cette intégrale n'est pas connue sous forme analytique. Sa fonction caractéristique est :

$$\Phi_X(\omega) = e^{j\mu\omega - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}}. \quad (29)$$

Une v.a. gaussienne centrée et normalisée, i.e., dont la moyenne est  $\mu = 0$  et l'écart-type  $\sigma = 1$ , est encore appelée *variable aléatoire normale*.

## 2.7 Variable aléatoire exponentielle

Une *variable aléatoire exponentielle* mesure le temps entre deux arrivées successives dans un processus poissonien. Elle est à valeurs positives  $S_X = [0, \infty[$  et est paramétrisée par un réel positif  $\lambda > 0$ . Sa densité de probabilité est

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (30)$$

ce qui permet de calculer sa fonction de répartition, sa moyenne, sa variance et sa fonction caractéristique :

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad (31)$$

$$\mu_X = E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad (32)$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (33)$$

$$\Phi_X(\omega) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{j\omega x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}. \quad (34)$$

La v.a. exponentielle est la seule v.a. continue sans mémoire :  $P(X > t + T \mid X > t) = P(X > T)$ .

## 2.8 Variable aléatoire Gamma

Pour introduire cette v.a., il faut d'abord introduire la fonction  $\Gamma(\cdot)$  définie pour  $u > 0$  par

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} e^{-x} dx$$

Elle possède les propriétés

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi}, \\ \Gamma(u+1) &= u\Gamma(u), \\ \Gamma(u) &= (u-1)! \quad \text{si } u \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Une *variable aléatoire Gamma*  $G(\lambda, \alpha)$  est une v.a. à valeurs strictement positives ( $S_X = ]0, \infty[$ ), paramétrisée par deux réels positifs  $\alpha, \lambda > 0$  et définie par sa densité de probabilité

$$f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (35)$$

Sa moyenne, sa variance et sa fonction caractéristique sont données par

$$\mu_X = E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad (36)$$

$$\sigma_X^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \quad (37)$$

$$\Phi_X(\omega) = \frac{1}{(1 - j\omega/\lambda)^\alpha}. \quad (38)$$

Beaucoup de v.a. continues sont des cas particuliers de la v.a.  $\text{Gamma}(\lambda, \alpha)$ . Par exemple, la v.a.  $G(\lambda, m)$  où  $m \in \mathbb{N}$  est une *variable aléatoire d'Erlang* de paramètres  $(\lambda, m)$ . Comme  $m$  est entier, (35) devient

$$f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{m-1} e^{-\lambda x}}{(m-1)!} \quad (39)$$

En particulier, la v.a. d'Erlang lorsque  $m = 1$  est une v.a. exponentielle.

Par contre, si  $\lambda = 1/2$  et si  $\alpha = \nu/2$  avec  $\nu \in \mathbb{N}$ , la v.a.  $G(1/2, \nu/2)$  est une *variable aléatoire Chi-carré*  $\chi^2(\nu)$  à  $\nu$  degrés de liberté. Dans ce cas (35) devient

$$f_X(x) = \frac{x^{(\nu-2)/2} e^{-x/2}}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)}. \quad (40)$$

## 3 Vecteurs aléatoires

Fonction de répartition de la paire de v.a.  $X, Y$  :  $F_{XY}(x, y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})$ .

**Changement de v.a.** Si  $g_1(\cdot)$  et  $g_2(\cdot)$  sont deux fonctions continues, la densité de probabilité jointe des variables

$$\begin{aligned} Z &= g_1(X, Y), \\ W &= g_2(X, Y) \end{aligned}$$

s'exprime en fonction de la densité jointe des v.a.  $X$  et  $Y$  comme suit.

Soit  $(z, w)$  une paire de valeurs particulières que peuvent prendre la paire de v.a.  $(Z, W)$ , et soient  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$  les  $m$  racines respectives du système d'équations

$$\begin{aligned} z &= g_1(x, y), \\ w &= g_2(x, y). \end{aligned}$$

le Jacobien de la transformation  $(g_1(\cdot), g_2(\cdot))$  est le déterminant

$$J(x, y) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial y} & \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Alors on peut montrer que

$$f_{ZW}(z, w) = \sum_i \frac{f_{XY}(x_i, y_i)}{|J(x_i, y_i)|}. \quad (41)$$

L'espérance d'une fonction de v.a.  $G(X, Y) = Z$ , où  $X$  et  $Y$  sont deux v.a. de densité de probabilité jointe  $f_{XY}(x, y)$ , est

$$E[Z] = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy$$

Dans le cas discret, cette grandeur devient, avec  $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ ,

$$E[Z] = E[g(X, Y)] = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) p_{ij}.$$

Moments particuliers :

- $COV[X, Y] = E[XY] - \mu_X \mu_Y = E[XY] - E[X]E[Y]$ .
- Fonction caractéristique :  $\Phi_{XY}(\omega_1, \omega_2) = E[e^{j(\omega_1 X + \omega_2 Y)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 x + \omega_2 y)} f_{XY}(x, y) dx dy$ .  
Transformée inverse :  $f_{XY}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_1 x + \omega_2 y)} \Phi_{XY}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2$ . Les moments joints peuvent être calculés par

$$E[X^m Y^n] = \frac{1}{j^{m+n}} \left. \frac{\partial^{m+n} \Phi_{XY}(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1^m \partial \omega_2^n} \right|_{(\omega_1, \omega_2) = (0,0)}.$$

- Fonction génératrice de moment :  $\hat{\Phi}(s_1, s_2) = E[e^{s_1 X + s_2 Y}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{s_1 x + s_2 y} f_{XY}(x, y) dx dy$ .

**Densité de probabilité conditionnelle.** Considérons d'abord deux v.a. discrètes  $X$  et  $Y$ .

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \quad \text{si } P(Y = y_j) \neq 0, \quad (42)$$

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} \quad \text{si } P(X = x_i) \neq 0, \quad (43)$$

$$P(X = x_i | Y = y_j) = 0 \quad \text{si } P(Y = y_j) = 0, \quad (44)$$

$$P(Y = y_j | X = x_i) = 0 \quad \text{si } P(X = x_i) = 0. \quad (45)$$

Si  $X$  est une v.a. continue tandis que  $Y$  est une v.a. discrète, la fonction de répartition conditionnelle est

$$P(X \leq x | Y = y_j) = F_{X|Y}(x | y_j) = \frac{P(X \leq x, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \quad \text{si } P(Y = y_j) \neq 0, \quad (46)$$

$$P(X \leq x | Y = y_j) = F_{X|Y}(x | y_j) = 0 \quad \text{si } P(Y = y_j) = 0. \quad (47)$$

et la densité de probabilité conditionnelle de  $X$  étant donné que  $Y = y_j$  est

$$f_{X|Y}(x | y_j) = \frac{dF_{X|Y}(x | y_j)}{dx}.$$

Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a. continues, la densité de probabilité conditionnelle de  $X$  si  $Y = y$  est

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{dF_{X|Y}(x | y)}{dx} = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}. \quad (48)$$

**V.a. gaussiennes multivariées.** Les v.a.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires gaussiennes jointes ssi leur densité jointe de probabilité est

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}, \quad (49)$$

où

$$\boldsymbol{\mu} = [E[X_1] \ \dots \ E[X_n]]^T,$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & COV[X_1, X_2] & \dots & COV[X_1, X_n] \\ COV[X_2, X_1] & \sigma_{X_2}^2 & \dots & COV[X_2, X_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ COV[X_n, X_1] & COV[X_n, X_2] & \dots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix}.$$

Fonction caractéristique :  $\Phi_{X_1 X_2 \dots X_n}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega}) = e^{j\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega}}$ . Si  $X_1, X_2, \dots, X_n, X$  sont des v.a. gaussiennes jointes de moyennes nulles,

$$E[X_1 X_2 X_3 X_4] = E[X_1 X_2]E[X_3 X_4] + E[X_1 X_3]E[X_2 X_4] + E[X_1 X_4]E[X_2 X_3],$$

$$E[X_1 X_2 \dots X_{2k+1}] = 0,$$

$$E[X^{2k+1}] = 0,$$

$$E[X^{2k}] = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k-1) \sigma_X^{2k}.$$

## 4 Convergence de suites de variables aléatoires

**Convergence presque sûre (ou presque partout) : définition.** La suite de v.a.  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  converge presque sûrement vers  $X$  lorsque

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \rightarrow X\right) = 1. \quad (50)$$

**Lemmes de Borel-Cantelli** Pour toute suite d'évènements  $\{A_n\}_{n \geq 1}$ , soit

$$\{A_n \text{ i.o.}\} = \{\zeta \in \Omega \mid \zeta \in A_n \text{ pour une infinité d'indices } n \geq 1\}.$$

**Lemme 1** (Premier Lemme de Borel-Cantelli). *Pour toute suite d'évènements  $\{A_n\}_{n \geq 1}$ ,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies P(A_n \text{ i.o.}) = 0.$$

**Lemme 2** (Second Lemme de Borel-Cantelli). *Pour toute suite d'évènements  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  indépendants,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \implies P(A_n \text{ i.o.}) = 1.$$

**Conditions suffisante de convergence presque sûre.** Toute suite de v.a.  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  converge presque sûrement (i.e., avec probabilité 1) vers une v.a.  $X$ , si pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty. \quad (51)$$

Dans le cas où les v.a.  $X_n$  sont indépendantes, cette condition est nécessaire et suffisante.

**Convergence en distribution (ou en loi) : définition.** La suite de v.a.  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  converge en distribution vers  $X$  s'il existe une fonction continue  $F(\cdot)$  qui est la fonction de répartition d'une v.a.  $X$  telle que pour tout  $x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x). \quad (52)$$

**Théorème central limite.** Soit  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  une suite de v.a. i.i.d., de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ . A partir de cette suite de v.a., on construit une autre suite de v.a.  $\{Z_n\}$  données par

$$Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}. \quad (53)$$

Alors le théorème central limite énonce que la suite de v.a.  $\{Z_n\}$  converge en distribution vers une v.a. normale  $Z$  :

$$Z_n \xrightarrow{\text{dis}} Z \sim N(0, 1),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(z) = F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx.$$

**Convergence en probabilité : définition.** La suite de v.a.  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers  $X$  lorsque, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X - X_n| \geq \varepsilon) = 0. \quad (54)$$

**Loi faible des grands nombres.** Soit  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  une suite de v.a. indépendantes, de même moyenne  $\mu$  et de même variance  $\sigma^2$ . A partir de cette suite de v.a., on construit une autre suite de v.a.  $\{\bar{X}_n\}$  données par

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (55)$$

Alors la loi faible des grands nombres énonce que la suite de v.a.  $\{\bar{X}_n\}$  converge en probabilité vers  $\mu$ .

**Convergence en moyenne quadratique : définition.** La suite de v.a.  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  converge en moyenne quadratique vers  $X$  lorsque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n - X)^2] = 0. \quad (56)$$

## 5 Processus stochastiques à temps continu

**Stationnarité.** Un processus stochastique  $X(t)$  est stationnaire au sens strict (SSS), ssi toutes ses propriétés statistiques sont indépendantes de l'origine des temps. En d'autres termes, quels que soient  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$F_{X(t_1) \dots X(t_n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F_{X(t_1+c) \dots X(t_n+c)}(x_1, \dots, x_n; t_1 + c, \dots, t_n + c). \quad (57)$$

Un processus stochastique  $X(t)$  est *stationnaire au sens large* (WSS pour “wide-sense stationary”), ou encore stationnaire du second ordre, ssi sa moyenne ne dépend pas du temps  $t$  et sa fonction d'auto-corrélation (ou de covariance) ne dépend que de la différence entre les deux instants auxquels elle est évaluée :

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= \mu_X, \\ R_X(t_1, t_2) &= R_X(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

Si  $X$  est réel,  $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$  et  $|R_X(\tau)| \leq R_X(0) = E[X^2(t)]$ .

Deux processus réels  $X(t)$  et  $Y(t)$  sont conjointement stationnaires au sens large s'ils sont stationnaires au sens large et si leur fonction de cross-corrélation ne dépend que de la différence entre les deux instants auxquels elle est évaluée :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2).$$

La fonction de cross-corrélation de ces deux processus a les propriétés suivantes. Si  $X$  et  $Y$  sont réels,  $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$ , et

$$\begin{aligned} |R_{XY}(\tau)| &\leq \sqrt{R_X(0)R_Y(0)}, \\ |R_{XY}(\tau)| &\leq (R_X(0)R_Y(0))/2. \end{aligned}$$

**Ergodisme.** Si  $\langle X(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$ , le processus WSS  $X(t)$  est ergodique par rapport à sa moyenne ssi

$$VAR[\langle X(t) \rangle_T] = E[(\langle X(t) \rangle_T - \mu_X)^2] \rightarrow 0$$

quand  $T \rightarrow \infty$ , ou encore ssi

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T C_X(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = 0.$$

Le processus WSS  $X(t)$  est ergodique par rapport à sa moyenne si  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C_X(\tau) = 0$ . De manière similaire, un processus  $X(t)$  stationnaire est ergodique par rapport à sa variance ssi

$$\begin{aligned} E[\langle X^2(t) \rangle_T - \mu_X^2] &\rightarrow \sigma_X^2, \\ VAR[\langle X^2(t) \rangle_T - \mu_X^2] &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

et *ergodique par rapport à sa fonction d'auto-corrélation* ssi

$$\begin{aligned} E[\langle X(t+\tau)X(t) \rangle_T] &\rightarrow R_X(\tau), \\ VAR[\langle X(t+\tau)X(t) \rangle_T] &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

où

$$\langle X(t+\tau)X(t) \rangle_T = \int_0^T X(t+\tau)X(t) dt$$

est un estimateur de la fonction d'auto-corrélation.

**Densité spectrale de puissance.** Soit  $X(t)$  un processus continu stationnaire au sens large. Sa *densité spectrale de puissance*  $S_X(f)$  est la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation :  $S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$ . Celle-ci est bien définie si  $\int_{-\infty}^{+\infty} |R_X(\tau)| d\tau < \infty$ . En fait, si la moyenne du processus n'est pas identiquement nulle, cette condition n'est pas satisfaite, car  $|R_X(\tau)| = |C_X(\tau)| + \mu_X^2$  pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ . On peut alors utiliser les impulsions de Dirac, et écrire

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \mu_X^2 \delta(f).$$

La fonction d'auto-corrélation peut être obtenue par la transformée inverse  $R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$ .  $S_X(f)$  est réelle, paire, non négative. La fonction  $S_X(f)/R_X(0)$  est une densité de probabilité.

La densité spectrale mutuelle de puissance (en anglais : “cross-power spectral density”) de deux processus  $X$  et  $Y$  est la transformée de Fourier de leur fonction de cross-corrélation :  $S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$ .

Le bruit blanc  $N(t)$  est un processus stochastique WSS dont la densité spectrale de puissance est une constante  $S_N(f) = \frac{N_0}{2}$ .

Un système transformant un signal d'entrée  $x(t)$  en un signal de sortie  $y(t) = T(x(t))$  est *linéaire* si  $T[ax_1(t) + bx_2(t)] = aT(x_1(t)) + bT(x_2(t))$ . Il est *invariant dans le temps* si  $y(t-\tau) = T(x(t-\tau))$ .

La fonction de transfert d'un système linéaire et invariant dans le temps (LTI) est la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle, c'est-à-dire

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

La densité spectrale de la réponse  $Y(t)$  d'un système linéaire et invariant dans le temps dont la réponse impulsionnelle  $h(t)$  est absolument intégrable et dont la transmittance est  $H(f)$ , à un processus  $X(t)$  WSS de densité spectrale  $S_X(f)$  est  $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$ . De plus  $S_{YX}(f) = H(f) S_X(f)$  et  $S_{XY}(f) = H^*(f) S_X(f)$ .

## 6 Processus stochastiques à temps discret

**Processus ARMA.** Soit  $U(n)$  un processus stochastique à temps discret, appelé *processus d'innovation*. On supposera par défaut que  $U(n)$  est un bruit blanc de variance  $\sigma_U^2$ . Le processus

$$X(n) = \sum_{k=0}^m b_k U(n-k) \quad (58)$$

est appelé *moyenne mobile* ("Moving Average", MA) d'ordre  $m$  de  $U$ , pondérée par les coefficients  $b_k$ ,  $0 \leq k \leq m$ .

Le processus calculé récursivement à partir de  $U$  et de  $p$  valeurs initiales  $X(0), \dots, X(p-1)$

$$X(n) = - \sum_{k=1}^p a_k X(n-k) + U(n) \quad (59)$$

est appelé *processus auto-régressif* (AR) d'ordre  $p$ . Les coefficients  $a_1, \dots, a_p$  doivent être choisis de telle manière que ce système soit stable.

La combinaison de ces deux processus donne un processus ARMA( $m, p$ ) :

$$X(n) = - \sum_{k=1}^p a_k X(n-k) + \sum_{k=0}^m b_k U(n-k). \quad (60)$$

**Stationnarité.** Un processus stochastique  $X(n)$  est *stationnaire* ou plus précisément *stationnaire au sens strict* (SSS) ssi toutes ses propriétés statistiques sont indépendantes de l'origine des temps. En d'autres termes, quels que soient  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$  et  $c \in \mathbb{Z}$ <sup>1</sup>,

$$F_{X(n_1) \dots X(n_m)}(x_1, \dots, x_m; n_1, \dots, n_m) = F_{X(n_1+c) \dots X(n_m+c)}(x_1, \dots, x_m; n_1+c, \dots, n_m+c).$$

Un processus stochastique  $X(n)$  est *stationnaire au sens large* (WSS pour "wide-sense stationary"), ou encore stationnaire du second ordre, ssi sa moyenne ne dépend pas du temps  $n$  et sa fonction d'auto-corrélation (ou de covariance) ne dépend que de la différence entre les deux instants auxquels elle est évaluée :

$$\begin{aligned} \mu_X(n) &= \mu_X, \\ R_X(n_1, n_2) &= R_X(n_1 - n_2). \end{aligned}$$

---

1. Si le processus est restreint aux  $n \in \mathbb{N}$  (au lieu de  $n \in \mathbb{Z}$ ), il faut prendre  $n_1, \dots, n_m, c \in \mathbb{N}$ .

**Ergodisme.** Soit  $X(\cdot)$  un processus stationnaire au sens large, et

$$\langle X(n) \rangle_m = \frac{1}{2m+1} \sum_{n=-m}^m X(n).$$

Ce processus est ergodique par rapport à sa moyenne ssi

$$\text{VAR}[\langle X(n) \rangle_m] = E[(\langle X(n) \rangle_m - \mu_X)^2] \rightarrow 0$$

ou encore ssi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m+1} \sum_{k=-2m}^{2m} C_X(k) \left(1 - \frac{|k|}{2m+1}\right) = 0.$$

Une condition seulement suffisante : un processus WSS  $X(n)$  est ergodique par rapport à sa moyenne si  $\lim_{k \rightarrow \infty} C_X(k) = 0$ .

Le processus est ergodique par rapport à sa fonction d'auto-corrélation lorsque

$$\langle X(n)X(n-k) \rangle_m = \frac{1}{2m+1} \sum_{n=-m}^m X(n)X(n-k)$$

tend vers  $R_X(k)$  au sens des moindres carrés quand  $m \rightarrow \infty$ .

**Densité spectrale de puissance.** Soit  $X(n)$  un processus discret stationnaire au sens large. Sa *densité spectrale de puissance*  $S_X(f)$  est la transformée de Fourier discrète de sa fonction d'auto-corrélation :

$$S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(k) e^{-j2\pi f k}. \quad (61)$$

A nouveau, celle-ci est bien définie si  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |R_X(k)| < \infty$ . Comme  $S_X(f)$  est périodique (de période 1), on peut considérer les seules fréquences du domaine  $-1/2 \leq f \leq 1/2$ . La fonction d'auto-corrélation peut être obtenue par la transformée inverse

$$R_X(k) = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(f) e^{j2\pi f k} df. \quad (62)$$

On peut également étendre la définition (61) à la variable  $z$  pour obtenir la transformée en  $z$  de  $R_X(k)$  :

$$\hat{S}_X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(k) z^{-k}. \quad (63)$$

La densité spectrale s'obtient en posant  $z = e^{j2\pi f}$  :  $\hat{S}_X(e^{j2\pi f}) = S_X(f)$ . La *densité spectrale mutuelle de puissance* (en anglais : "cross-power spectral density") de deux processus  $X$  et  $Y$  est la transformée de Fourier de leur fonction de cross-corrélation :  $S_{XY}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{XY}(k) e^{-j2\pi f k}$ .

Un bruit blanc  $N(n)$  a une densité spectrale constante sur toute la bande de fréquences  $-1/2 \leq f \leq 1/2$  qui vaut  $S_N(f) = \sigma_N^2$ .

La densité spectrale de la réponse  $Y(n)$  d'un système linéaire et invariant dans le temps dont la réponse impulsionnelle  $h(n)$  est absolument sommable et dont la transmittance est  $H(f)$ , à un processus  $X(n)$  WSS de densité spectrale  $S_X(f)$  est  $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$  et  $\hat{S}_Y(z) = \hat{H}(z) \hat{H}(1/z) \hat{S}_X(z)$  où la fonction de transfert  $H(z)$  est définie par  $\hat{H}(z) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} h(\ell) z^{-\ell}$ . De plus  $S_{YX}(f) = H(f) S_X(f)$  et  $S_{XY}(f) = H^*(f) S_X(f)$ .

**Filtre optimal de Wiener.** La transmittance du filtre de Wiener est  $H(f) = \frac{S_{DX}(f)}{S_X(f)}$ . Equations normales (filtre causal) :  $\sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell)R_X(k-\ell) = R_{DX}(k)$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .

## 7 Processus de Poisson

Les trois définitions suivantes du processus de Poisson homogène sur  $\mathbb{R}^+$  sont équivalentes.

**Définition 1.** Un processus de Poisson homogène d'intensité (taux)  $\lambda > 0$  est un processus de comptage  $N(t)$  qui satisfait aux trois hypothèses suivantes :

H1. Le processus est à accroissements indépendants : des événements se déroulant dans des intervalles disjoints sont indépendants, i.e.

$$P(\{N(t+T) - N(t) = n_0\} \cap \{N(t) = n_1\}) = P(N(t+T) - N(t) = n_0)P(N(t) = n_1)$$

H2. Le processus est homogène dans le temps, ce qui signifie que ses accroissements sont stationnaires : le nombre d'événements se déroulant dans un intervalle de temps ne dépend que de sa longueur, i.e.

$$P(N(t+T) - N(t) = n_0) = P(N(T) = n_0)$$

H3. La probabilité que deux événements ou plus se produisent dans un petit intervalle de temps  $\Delta t$  est négligeable par rapport à la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul événement. Plus précisément,

$$\begin{aligned} P(N(\Delta t) = 1) &= \lambda \Delta t + o(\Delta t), \\ P(N(\Delta t) \geq 2) &= o(\Delta t), \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est un paramètre positif (appelé intensité) et où la fonction  $f(\cdot)$  est " $o(\Delta t)$ " si

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

On en déduit que

$$P(N(\Delta t) = 0) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

**Définition 2.** Un processus de Poisson homogène d'intensité (taux)  $\lambda > 0$  est un processus de comptage  $N(t)$  qui satisfait aux deux hypothèses suivantes :

H1'. Le processus est à accroissements indépendants : des événements se déroulant dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants, i.e.

$$P(\{N(t+T) - N(t) = n_0\} \cap \{N(t) = n_1\}) = P(N(t+T) - N(t) = n_0)P(N(t) = n_1)$$

H2'. Le nombre d'événements se déroulant dans un intervalle de temps de longueur  $T$  suit une loi de Poisson, i.e., pour tout  $t, T \geq 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P(N(t+T) - N(t) = n) = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}.$$

**Définition 3.** Soit  $\{T(n), n \in \mathbb{N}\}$  une suite de variables aléatoires exponentielles i.i.d. de moyennes  $1/\lambda$ , à partir de laquelle on forme la séquence

$$S(n) = \sum_{m=0}^{n-1} T(m).$$

Le processus de comptage  $N(t)$  obtenu en posant  $N(t) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : S(n) \leq t\}$  est un processus de Poisson homogène d'intensité (taux)  $\lambda > 0$ .

Le processus de Poisson homogène possède les propriétés suivantes :

- P1. Sa fonction d'auto-corrélation est  $R_N(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2)$ .
- P2. La superposition de  $M$  processus de Poisson indépendants  $N_i(t)$  de taux  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq M$  est encore un processus de Poisson  $N(t)$ , de taux  $\lambda = \sum_{i=1}^M \lambda_i$ .
- P3. La décomposition d'un processus de Poisson  $N(t)$  de taux  $\lambda$  en  $M$  processus différents, telle que la probabilité qu'un événement de ce processus fasse partie du processus  $i$  ( $1 \leq i \leq M$ ) est égale à  $p_i$  ( $\sum_{i=1}^M p_i = 1$ ) donne encore naissance à  $M$  processus de Poisson  $N_i(t)$  indépendants, de taux  $p_i \lambda$ ,  $1 \leq i \leq M$ .
- P4. La séquence des temps d'arrivée  $\{S(n), n \in \mathbb{N}_0\}$  suit une loi d'Erlang :  $f_{S(n)}(s; n) = \frac{\lambda(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s}$  avec  $s \in \mathbb{R}^+$ .

**Bruit impulsif de Poisson (Shot Noise).** Le processus stochastique  $\hat{X}_h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n h(t - S(n))$  où  $h(t)$  est une fonction déterministe, où  $\{S(n), n \in \mathbb{Z}\}$  est la séquence des temps d'arrivée d'un processus de Poisson homogène  $\{N(t), t \in \mathbb{R}\}$ , et où  $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. et indépendantes de  $N(t)$  est appelé bruit impulsif de Poisson composé. Si  $A_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , le processus est le bruit impulsif de Poisson.

Théorème de Campbell : si  $h(t)$  est une fonction absolument intégrable, la moyenne, la variance et la densité spectrale de  $\hat{X}_h(t)$  valent respectivement

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{X}_h} &= E[\hat{X}_h(t)] = \lambda \mu_A H(0) = \lambda \mu_A \int_{-\infty}^{\infty} h(s) ds, \\ \sigma_{\hat{X}_h}^2 &= \lambda(\mu_A^2 + \sigma_A^2) \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \lambda(\mu_A^2 + \sigma_A^2) \int_{-\infty}^{\infty} h^2(s) ds \\ S_{\hat{X}_h}(f) &= \mu_A^2 \lambda^2 H^2(0) \delta(f) + (\mu_A^2 + \sigma_A^2) \lambda |H(f)|^2, \end{aligned}$$

où  $\mu_A = E[A_n]$  et  $\sigma_A^2 = \text{VAR}[A_n] = E[(A_n - \mu_A)^2]$  et  $H(f)$  est la transformée de Fourier de  $h(t)$ .

## 8 Chaînes de Markov à temps discret

Avec  $P = [p_{ij}]$  la matrice de transition et  $\pi(n) = [\pi_i(n)]$  le vecteur ligne des probabilités d'état au temps  $n$ , on a

$$\begin{aligned}\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i(n) &= 1, \\ \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} &= 1, \\ P^{(n)} &= P^n, \\ \pi(n) &= \pi(n-1)P = \dots = \pi(0)P^n.\end{aligned}$$

L'état  $i \in \mathcal{S}$  est **récurrent** si et seulement si  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$  et transitoire sinon. Soit  $T_i = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X(n) = i\}$  le temps de premier passage par l'état  $i$ . Si  $i$  est récurrent, alors il est récurrent positif ssi  $E[T_i \mid X(0) = i] = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} m P(T_i = m \mid X(0) = i) < \infty$ , et récurrent nul sinon. Une chaîne de Markov homogène irréductible, apériodique et dont tous les états sont récurrents positifs est dite *ergodique*.

Si  $X(n)$  est une **chaîne de Markov homogène ergodique** alors il existe une seule distribution stationnaire donnée par  $\pi_j^* = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^* p_{ij}$  et  $\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^* = 1$ . De plus, tout vecteur des probabilités d'état tend vers cette distribution stationnaire ( $\pi(n) \rightarrow \pi^*$ ) lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Si  $X(n)$  possède une distribution stationnaire unique  $\pi^* = [\pi_0^* \ \pi_1^* \ \dots]$ , alors le temps moyen de retour à l'état  $i$  vaut  $E[T_i \mid X(0) = i] = 1/\pi_i^*$ .

On définit le **temps d'atteinte** de  $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$  par  $H_{\mathcal{A}} = \inf\{n \in \mathbb{N} : X(n) \in \mathcal{A}\}$ , et par  $H_{\mathcal{A}} = \infty$  si l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} : X(n) \in \mathcal{A}\}$  est vide. Soit  $h_{i\mathcal{A}} = P(H_{\mathcal{A}} < \infty \mid X(0) = i)$ . Alors le vecteur des probabilités  $\mathbf{h}_{\mathcal{A}} = [h_{i\mathcal{A}}, i \in \mathcal{S}]$  est la solution minimale non négative du système d'équations linéaires

$$\begin{aligned}h_{i\mathcal{A}} &= 1 & \text{si } i \in \mathcal{A}, \\ h_{i\mathcal{A}} &= \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} h_{j\mathcal{A}} & \text{si } i \notin \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Soit  $\mu_{i\mathcal{A}}^H = E[H_{\mathcal{A}} \mid X(0) = i]$ . Le vecteur des temps d'atteinte  $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{A}}^H = [\mu_{i\mathcal{A}}^H, i \in \mathcal{S}]$  est la solution minimale non négative du système d'équations linéaires

$$\begin{aligned}\mu_{i\mathcal{A}}^H &= 0 & \text{si } i \in \mathcal{A}, \\ \mu_{i\mathcal{A}}^H &= 1 + \sum_{j \notin \mathcal{A}} p_{ij} \mu_{j\mathcal{A}}^H & \text{si } i \notin \mathcal{A}.\end{aligned}$$

**Processus de branchement.** Soit  $X(n)$  le nombre d'individus de la génération  $(n+1)$ . On suppose que chaque individu  $i$  de la  $(n+1)$ ème génération aura généré durant son existence  $C_i^n$  descendants, où les  $C_i^n$  forment une suite de v.a. i.i.d., de loi de probabilité  $P(C_i^n = k) = c_k$  donnée pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et  $c_0 > 0$ . Soit  $G_C(z)$  la fonction génératrice de probabilité des variables  $C_i^n$ . La première génération ne comporte qu'un seul individu ( $X(0) = 1$ ). La probabilité d'extinction du processus  $h_{10}$  est la solution réelle minimale non négative de l'équation  $G_C(z) = z$ .

**Chaîne réversible.** Supposons qu'on ait une chaîne de Markov ergodique à l'état stationnaire, et qu'à partir d'un certain temps  $n$ , on considère la séquence d'états  $X(n), X(n-1), X(n-2), \dots, X(0)$ , c'est à dire la chaîne originelle en remontant le temps (chaîne renversée ou backward chain). Si les probabilités de transition de la chaîne renversée sont les mêmes que celles de la chaîne directe, la chaîne est réversible. Une chaîne de Markov ergodique est donc réversible ssi pour tout  $i, j \in \mathcal{S}$ ,  $\pi_i^* p_{ij} = \pi_j^* p_{ji}$ .

## 9 Chaînes de Markov à temps continu

Les deux **définitions** suivantes de chaînes de Markov à temps continu sont équivalentes.

**Définition 4.** Une chaîne de Markov à temps continu est un processus  $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$  à valeurs discrètes dans  $\mathcal{S}$  qui satisfait aux hypothèses suivantes :

H1. Processus Markovien : pour toute suite d'instants  $t_0 < t_1 < \dots < t_n \in \mathbb{R}^+$  et toute suite d'états  $i_0, i_1, \dots, i_n \in \mathcal{S}$ ,

$$P(X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X(t_0) = i_0) = P(X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}). \quad (64)$$

H2. Processus homogène : pour tout  $s, t \in \mathbb{R}^+$  et  $i, j \in \mathcal{S}$ ,

$$P(X(t+s) = j \mid X(s) = i) = p_{ij}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i). \quad (65)$$

**Définition 5.** Soit le processus  $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$  à valeurs discrètes dans  $\mathcal{S}$ , et soit  $\{S(n), n \in \mathbb{N}\}$  la séquence des instants de transition d'un état à l'autre. Ce processus est une chaîne de Markov à temps continu si et seulement si

H1'. La séquence des temps de séjour (holding times)  $\{T(n), n \in \mathbb{N}\}$  avec  $T(n) = S(n+1) - S(n)$ , est une suite de v.a. exponentielles indépendantes, avec les temps de séjour dans un même  $i$  ( $T_i(n)$ ) identiquement distribués.

H2'. Le processus  $\{\hat{X}(n) = X(S(n)), n \in \mathbb{N}\}$  est une chaîne de Markov à temps discret homogène (appelé chaîne induite).

**Equations de Kolmogorov,** Avec  $\nu_i$  qui est l'inverse de la durée moyenne de séjour du processus dans l'état  $i$  entre deux transitions successives, ou encore le taux moyen avec lequel le processus fait une transition quand il est à l'état  $i$ , et  $\hat{q}_{ij}$  la probabilité que lors d'une transition,  $X(t)$  passe de l'état  $i$  à l'état  $j$ , on définit le générateur infinitésimal de la chaîne de Markov à temps continu par

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \nu_i \hat{q}_{ij} & \text{si } i \neq j, \\ q_{ij} &= -\nu_i & \text{si } i = j. \end{aligned}$$

Alors, avec chaque fois la condition initiale  $P(0) = I$ ,

$$\frac{dp_{ij}}{dt}(t) = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}(t) q_{kj} \quad \text{ou} \quad \frac{dP}{dt}(t) = P(t)Q, \quad (66)$$

$$\frac{dp_{ij}}{dt}(t) = \sum_{k \in \mathcal{S}} q_{ik} p_{kj}(t) \quad \text{ou} \quad \frac{dP}{dt}(t) = QP(t), \quad (67)$$

$$\frac{d\pi}{dt}(t) = \pi(t)Q. \quad (68)$$

Si  $X(t)$  est une chaîne de Markov homogène ergodique alors il existe une seule distribution stationnaire donnée par la solution unique de  $\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^* q_{ij} = 0$  et  $\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^* = 1$ . De plus, tout vecteur des probabilités d'état tend vers cette distribution stationnaire :  $\pi(t) \rightarrow \pi^*$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

**Chaîne réversible.** Si la chaîne de Markov induite  $\hat{X}(n)$  est réversible, alors la chaîne de Markov à temps continu  $X(t)$  est elle-même dite réversible (temporellement). Une chaîne de Markov ergodique est donc réversible ssi pour tout  $i, j \in \mathcal{S}$ ,  $\pi_i^* q_{ij} = \pi_j^* q_{ji}$ . Tous les processus de naissance et de mort à l'état stationnaire sont réversibles.

## 10 Files d'attente

**Loi de Little.** Nombre moyen de clients dans le système = taux d'arrivée  $\times$  temps de réponse moyen. Exemple :  $E[N] = \lambda E[R]$  avec  $N$  le nombre de clients séjournant dans la file d'attente,  $R$  le temps de réponse du système et  $\lambda$  le taux d'arrivée moyen (effectif).

**File M/M/1.** Si  $\lambda$  est le taux d'arrivée,  $\mu$  le taux de service et  $\rho = \lambda/\mu < 1$  l'intensité du trafic,

$$\begin{aligned} P(N = n) &= (1 - \rho)\rho^n, \\ E[N] &= \frac{\rho}{1 - \rho}, \\ f_R(r) &= (\mu - \lambda)e^{-(\mu - \lambda)r} \quad \text{avec } r > 0, \\ E[R] &= 1/(\mu - \lambda). \end{aligned}$$

**Théorème de Burke :** le processus de départ d'une file M/M/1 est un processus de Poisson de taux  $\lambda$ , et à chaque instant  $t$ , le nombre de clients présents dans le système est indépendant de la séquence des temps de départ avant  $t$ .

**Formule d'Erlang B.** (File M/GI/s/s) :

$$P(\text{rejet}) = P(N = s) = \frac{(\lambda/\mu)^s / s!}{\sum_{n=0}^s (\lambda/\mu)^n / n!}.$$

**Formule d'Erlang C.** (File M/M/s), avec  $\rho = \lambda/\mu < s$  :

$$P(\text{attente}) = P(N \geq s) = \frac{\rho^s / s!}{(1 - \rho/s) \sum_{n=0}^{s-1} \rho^n / n! + \rho^s / s!}.$$

**File M/G/1 (ou M/GI/1).** Si  $\lambda$  est le taux d'arrivée,  $\mu$  le taux de service,  $\rho = \lambda/\mu < 1$  l'intensité du trafic,  $\sigma_S^2$  la variance des temps de service et  $G_A(z)$  la transformée de Laplace évaluée en  $\lambda(z - 1)$  de la densité de probabilité  $f_S(s)$ ,

$$\begin{aligned} G_N(z) &= \frac{(1 - \rho)(z - 1)G_A(z)}{z - G_A(z)}, \\ E[N] &= \frac{\rho}{1 - \rho} \left( 1 - \frac{\rho(1 - \mu^2 \sigma_S^2)}{2} \right), \\ E[R] &= E[N]/\lambda. \end{aligned}$$

**File M/G/∞ (ou M/GI/∞).** Si  $\lambda$  est le taux d'arrivée,  $\mu$  le taux de service et  $\rho = \lambda/\mu$ ,

$$\begin{aligned}P(N = n) &= \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}, \\E[N] &= \rho, \\E[R] &= 1/\mu.\end{aligned}$$

Théorème de Burke : le processus de départ d'une file M/GI/∞ est un processus de Poisson de taux  $\lambda$ , et à chaque instant  $t$ , le nombre de clients présents dans le système est indépendant de la séquence des temps de départ avant  $t$ .

## 11 Formules classiques

### 11.1 Trigonométrie

$$\begin{aligned}\sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\ \cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \\ \tan(A \pm B) &= \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B} \\ \sin 2A &= 2 \sin A \cos A \\ \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ \sin 3A &= 3 \sin A - 4 \sin^3 A \\ \cos 3A &= 4 \cos^3 A - 3 \cos A \\ 1 - \cos 2A &= 2 \sin^2 A \\ 1 + \cos 2A &= 2 \cos^2 A \\ \sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ \sin A \sin B &= (\cos(A-B) - \cos(A+B))/2 \\ \cos A \cos B &= (\cos(A-B) + \cos(A+B))/2 \\ \sin A \cos B &= (\sin(A-B) + \sin(A+B))/2\end{aligned}$$

## 11.2 Paires de transformées de Fourier continues

$$\begin{aligned}
g(t) &\longleftrightarrow G(f) = \mathcal{F}\{g\}(f) \\
g(t/a) &\longleftrightarrow |a|G(af) \\
t^n g(t) &\longleftrightarrow (j/2\pi)^n d^n G(f)/df^n \\
d^n g(t)/dt^n &\longleftrightarrow (2\pi j f)^n G(f) \\
\cos(2\pi f_0 t) &\longleftrightarrow (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))/2 \\
\sin(2\pi f_0 t) &\longleftrightarrow i(\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0))/2 \\
g(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} &\longleftrightarrow G(f) = \frac{1}{a + 2\pi j f} \\
\exp(-a|t|) &\longleftrightarrow 2a/(a^2 + 4\pi^2 f^2) \quad a > 0 \\
\exp(-\pi t^2) &\longleftrightarrow \exp(-\pi f^2) \\
1_{\mathbb{R}_0^+}(t) &\longleftrightarrow 1/(2\pi j f) \\
\text{rect}(t/T) = 1_{\{|t| < T/2\}}(t) &\longleftrightarrow T \text{sinc}(fT) = \sin(\pi fT)/(\pi f) \\
\text{tri}(t/T) = (1 - |t|/T)1_{\{|t| < T\}}(t) &\longleftrightarrow T \text{sinc}^2(fT) = \sin^2(\pi fT)/(\pi^2 f^2 T)
\end{aligned}$$

## 11.3 Paires de transformées de Fourier discrètes

$$g(n) = a^{|n|} \longleftrightarrow \mathcal{F}\{g\}(f) = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi f)} \quad \text{si } |a| < 1$$

## 11.4 Séries

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a^n &= 1/(1 - a) \quad \text{si } |a| < 1 \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &= \exp(x) \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!n!} &= I_0(2\sqrt{x})
\end{aligned}$$

où  $I_0(x)$  est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre 0.

## 11.5 Autres formules

Si  $n \in \mathbb{N}$  et  $a > 0$ ,

$$\int_0^{\infty} x^n \exp(-ax) dx = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$