Modèles stochastiques pour les communications : test

Section d'ingénieurs en systèmes de communication, 5ième semestre

NOM et prénom :

Si une page est dégraphée, veillez à indiquer votre nom dessus. Il y a 7 pages. Toutes les questions ont une et une seule réponse. Cocher celle qui convient. Notation :

- Réponse correcte = +1 point
- Réponse fausse = −0.5 point
- Réponse "Je ne sais pas" ou absence de réponse = 0 point

Toutes les variables aléatoires (abrégées par v.a.) et processus stochastiques des questions qui suivent sont à valeurs réelles. L'abréviation i.i.d. signifie indépendant(es) et identiquement distribué(es). L'abréviation WSS signifie stationnaire au sens large. L'abréviation SSS signifie stationnaire au sens strict.

Total : 20 points

Question 1 : Soit $X(t)$ un processus stochastique de moyenne nulle ($\mu = \mathbb{E}[X(t)] = 0$) et de variance unité ($\sigma^2 = \mathbb{E}[X(t)^2] = 1$). Laquelle des fonctions suivantes pourraît être la densité spectrale $S_X(f)$ de $X(t)$?

☐ $S_X(f) = \frac{1}{1+2\pi jf}$.

☐ $S_X(f) = 1$.

☐ $S_X(f) = \delta(f)$.

☐ Je ne sais pas.

Question 2 : Un bruit blanc gaussien $\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est transformé par un système linéaire et invariant dans le temps, de réponse impulsionnelle $h(n)$ en un processus $\{Y(n), n \in \mathbb{Z}\}$, i.e.

$$Y(n) = (h * X)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)X(n-k).$$

Alors $\{Y(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est toujours

☐ un processus gaussien, mais pas nécessairement un bruit blanc.

☐ un bruit blanc, mais pas nécessairement gaussien.

☐ un bruit blanc gaussien.

☐ Je ne sais pas.

Question 3 : Une firme produit plusieurs milliers d'ordinateurs chaque jour, dont un petit nombre est défectueux. On a mesurÃ© qu'en moyenne il y a 10 ordinateurs défectueux produits par jour. La directrice de la firme vous demande une estimation conservatrice de la probabilité p qu'un jour il y ait plus de 100 ordinateurs défectueux qui soient produits. Quelle est la plus petite borne supérieure $\overline{p} \geq p$ que vous pouvez lui garantir ?

- ☐ $\overline{p} = 9/10$.
- ☐ $\overline{p} = 9/1000$.
- ☐ $\overline{p} = 1/10$.
- ☐ Je ne sais pas.

Question 4 : Soient X_i, $\{1 \leq i \leq n\}$, un ensemble de n v.a. indépendantes et distribuées comme une v.a. X, i.e., telles que $\Phi_{X_i}(\omega) = \Phi_X(\omega)$ où $\Phi_X(\omega)$ est la fonction caractéristique de X. Quelle est la fonction caractéristique de la moyenne $\frac{1}{n}\sum_{1=1}^{n} X_i$ des v.a. $\{X_i\}_{i=1}^{n}$?

- ☐ $\Phi_X(\omega)$.
- ☐ $\frac{1}{n}\Big(\Phi_X(\omega)\Big)^n$.
- ☐ $\Big(\Phi_X(\frac{\omega}{n})\Big)^n$.
- ☐ Je ne sais pas.

Question 5 : La fonction caractéristique d'une v.a. X est donnée par $\phi_X(\omega) = \frac{2}{2-j\omega}$. Que vaut $E[X]$?

- ☐ 2.
- ☐ -1.
- ☐ 1/2.
- ☐ Je ne sais pas.

Question 6 : Soit $N(t)$ un processus de Poisson d'intensité λ et $T > 0$. Alors, la probabilité

$$P(N(T) = N(2T))$$

- ☐ est indépendante de T.
- ☐ vaut λT.
- ☐ vaut $e^{-\lambda T}$.
- ☐ Je ne sais pas.

Question 7 : Nous considérons deux paires de v.a. gaussiennes multivariées (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2), dont les courbes de niveau de la densité de probabolité jointe sont données dans la Figure 1. Quelle relation peut-on déduire entre les coéfficients de corrélation de ces deux paires ?

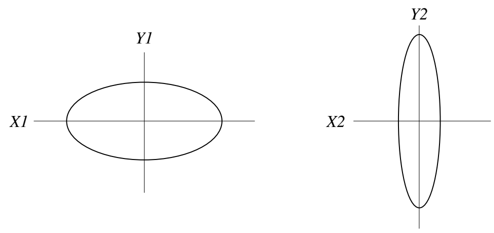

FIGURE 1 – Lignes de niveau de paires gaussiennes (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) de la question 7.

- ☐ $\rho_{X_1Y_1} > \rho_{X_2Y_2}$.
- ☐ $\rho_{X_1Y_1} < \rho_{X_2Y_2}$.
- ☐ $\rho_{X_1Y_1} = \rho_{X_2Y_2}$.
- ☐ Je ne sais pas.

Question 8 : Des étudiantes et étudiants entrent dans le Rolex Learning Center (RLC), suivant deux processus de Poisson homogènes indépendants d'intensités respectives λ_F (pour les étudiantes) et λ_H (pour les étudiants). En supposant que seuls des étudiantes et étudiants soient ce jour-là admis dans le RLC, quelle est la probabilité que la prochaine personne entrant dans le RLC soit une étudiante ?

- ☐ $\lambda_F e^{-(\lambda_F+\lambda_H)}$.
- ☐ $\frac{\lambda_H}{\lambda_F+\lambda_H}\left(1 - e^{-(\lambda_F+\lambda_H)}\right)$.
- ☐ $\frac{\lambda_F}{\lambda_F+\lambda_H}$.
- ☐ Je ne sais pas.

Question 9 : Vous pensez souffrir d'une maladie rare, dont une personne sur 10'000 souffre en moyenne. On vous propose de faire un test, dont le résultat est correct à 99% (c'est-à-dire qu'une fois sur 100, le test indiquera que vous êtes malade alors que vous êtes en parfaite santé, ou au contraire que vous n'avez rien alors que vous souffrez de la maladie). Vous décidez de faire le test. Sachant que le résultat du test est positif (il indique que vous souffrez de la maladie), quelle est la probabilité que vous soyez vraiment malade ?

Hint : Soient A l'événement correspondant au cas où vous êtes malade, et B l'événement correspondant à un test donnant un résultat positif. Sachant que $P(A) = \frac{1}{10\,000}$ et que $P(B \mid \bar{A}) = P(\bar{B} \mid A) = \frac{1}{100}$, on vous demande de calculer la probabilité $P(A \mid B)$.

- ☐ Plus petite que 0.01.
- ☐ Supérieure à 0.99.
- ☐ Égale à 0.90.
- ☐ Je ne sais pas.

Question 10 : Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus stochastique stationnaire au sens large, dont la moyenne est $\mu_X = \mathbb{E}[X(t)]$. Soit $T > 0$ une constante déterministe à partir de laquelle on construit la variable aléatoire

$$Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t)dt.$$

Si

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[(Y_T - \mu_X)^2\right] = 0,$$

alors on peut affirmer que

- ☐ le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est ergodique par rapport à sa moyenne.
- ☐ la fonction d'auto-covariance $C_X(\tau)$ tend vers 0 pour $\tau \to \infty$
- ☐ le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est stationnaire au sens strict.
- ☐ Je ne sais pas.

Question 11 : Soient X et Y deux v.a. dont la densité de probabilité jointe est notée $f_{XY}(x,y)$. Dans quel cas ces deux v.a. sont-elles statistiquement dépendantes ?

☐ $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy & \text{si } 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

☐ $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{si } 0 < x, y < \infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

☐ $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

☐ Je ne sais pas.

Question 12 : Soit X une v.a. distribuée uniformément sur $[0,1]$ et $Y = g(X)$, où

$$g(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $f_X(x)$ est la densité de probabilité de X et $f_Y(y)$ est la densité de probabilité de Y, laquelle des propositions suivantes est toujours vraie ?

☐ $f_Y(\frac{3}{4}) = \frac{1}{3}$.

☐ $f_Y(\frac{3}{4}) = 3$.

☐ $f_Y(\frac{3}{4}) = 1$.

☐ Je ne sais pas.

Question 13 : Soient X et Y deux v.a. gaussiennes indépendantes et soit $Z = (X+Y)^2$. Laquelle des trois propriétés suivantes est toujours vraie ?

☐ Z est une v.a gaussienne.

☐ Z n'est pas une v.a gaussienne.

☐ On n'a pas assez d'information pour déterminer si Z est, ou n'est pas, une v.a gaussienne.

☐ Je ne sais pas.

Question 14 : Soit $\{N(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$, échantillonné à deux instants $t_1 < t_2$. Laquelle des trois v.a. suivantes est indépendante de la v.a. $N(t_1)$?

☐ $N(t_2)$.

☐ $N(t_2) - \lambda t_1$.

☐ $N(t_2) - N(t_1)$.

☐ Je ne sais pas.

Question 15 : Soit une paire de v.a. (X, Y), où X est une gaussienne et Y une exponentielle. On peut conclure que X et Y sont indépendantes quand

☐ $COV(X, Y) = 0$.

☐ $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$.

☐ $E[X] = E[Y]$.

☐ Je ne sais pas.

Question 16 : Une v.a. binomiale de paramètres n et p est la somme de n v.a. Bernoulli indépendantes de moyenne p. Laquelle des formules suivantes donne sa fonction génératrice de prbabilité ?

☐ $G(z) = ((1 - p)z + p(1 - z))^n$.

☐ $G(z) = ((1 - p)z + p)^n$.

☐ $G(z) = ((1 - p) + pz)^n$.

☐ Je ne sais pas.

Question 17 : Dans un jeu, vous tirez aléatoirement des numéros parmi l'ensemble des 100 numéros de 1 à 100, chaque numéro tiré étant remis en place avant de faire le tirage suivant. Quelle est la probabilité que le numéro 1 figure parmi les nombres qui ont été tirés au bout de 50 tirages ?

☐ $\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{50}$.

☐ $\left(1 - \frac{1}{50}\right)^{100}$.

☐ $1 - \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{50}$.

☐ Je ne sais pas.

Question 18 : Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus stochastique stationnaire au sens large (WSS), dont la fonction d'auto-corrélation $R_X(\cdot)$ s'annule en un certain $s \in \mathbb{R}$: $R_X(s) = 0$. Laquelle des affirmations suivantes est toujours vraie ?

- ☐ $X(2)$ et $X(2+s)$ sont indépendantes.
- ☐ Si $\mathbb{E}[X(t)] = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $X(2)$ et $X(2+s)$ sont indépendantes.
- ☐ Même si $\mathbb{E}[X(t)] = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on n'a pas assez d'information pour déterminer si $X(2)$ et $X(2+s)$ sont indépendants ou non.
- ☐ Je ne sais pas.

Question 19 : Que vaut le coefficient de corrélation entre une v.a. X (de moyenne et variance finies) et la v.a. Y donnée par $Y = X/2 + 3$?

- ☐ 2
- ☐ 1
- ☐ 1/2
- ☐ Je ne sais pas.

Question 20 : Soit $\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$ un processus stationnaire au sens large de moyenne nulle et de fonction d'auto-corrélation $R_X(k) = 2^{-|k|}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et soit A une v.a. de Bernouilli avec $\mathbb{P}(A = 1) = \mathbb{P}(A = 0) = 1/2$ indépendante de $\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$. Lequel des trois processus suivants n'est pas ergodique par rapport à sa moyenne ?

- ☐ Le processus $\{Y_1(n), n \in \mathbb{Z}\}$ où $Y_1(n) = A + X(n)$.
- ☐ Le processus $\{Y_2(n), n \in \mathbb{Z}\}$ où $Y_2(n) = A \cdot X(n)$.
- ☐ Le processus $\{Y_3(n), n \in \mathbb{Z}\}$ où $Y_3(n) = (-1)^A \cdot X(n)$.
- ☐ Je ne sais pas.