Exercices

Exercice 1 : *Colonne d'acier soumise à son poids propre*

Considérons une colonne cylindrique en acier soumise à son poids propre. Le matériau a une masse volumique ρ et un module d'élasticité E. La colonne est fixée à sa base qui est à l'origine de l'axe vertical. Etant donné la grande hauteur de la colonne devant son rayon, nous choisissons de résoudre le problème 1D associé où l'inconnue est alors seulement $u_x(x) = u(x)$.

Dans cet exercice nous cherchons à déterminer le déplacement vertical dû au poids propre avec deux méthodes différentes.

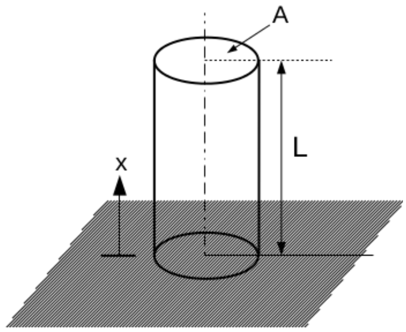

FIGURE 1 – Colonne

Première méthode : résolution des équations d'équilibre

1. A partir des conditions aux limites, de l'équation d'équilibre et de la loi de Hooke, déterminer le déplacement u en fonction de x.

Seconde méthode : minimisation de l'énergie

1. Pour cette méthode, nous allons nous donner un champ de déplacement de la forme

$$u(x) = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

   Exploiter la condition aux limites pour déterminer c.
2. Calculer l'énergie élastique de déformation E_d.
3. Calculer le travail du poids propre W.
4. En déduire l'énergie potentielle du système en fonction des données du problème, de a et de b.
5. A présent, pour déterminer a et b, minimiser l'énergie potentielle du système par rapport à ces paramètres. En déduire un système de deux équations à deux inconnues.
6. Résoudre le système.
7. Déterminer le déplacement solution. Est-ce le même que celui trouvé par la première méthode ? Est-ce normal ?

Exercice 2 : ***Structure en acier soumise à son poids propre***

Considérons une structure carré de côté 1 encastrée sur tout son périmètre. L'origine du repère est placée dans le coin en bas à gauche de la structure Ω. Le seul chargement considéré est le poids propre de la structure. On notera g l'accélération de pesanteur, ρ la masse volumique du solide, λ et μ les coefficients de Lamé du matériau. On fait l'hypothèse des déformations planes.

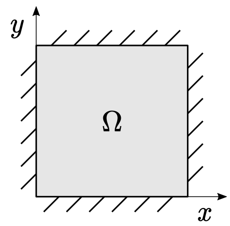

FIGURE 2 – Structure encastrée

1. Écrire les conditions aux limites du problème
2. Écrire les équations de la mécanique sur cette structure. Pouvez-vous calculer la solution exacte de ce problème à partir de ces équations ?

Puisque la solution analytique exacte de ce problème n'est pas accessible, on se propose de se donner une forme de champ de déplacement et de déterminer le meilleur champ de déplacement de cette forme, c'est-à-dire celui qui minimise l'énergie potentielle.

3. Proposer un champ de déplacement vérifiant les conditions aux limites.
4. Pour la suite, on notera
$$\underline{u}(x,y) = aD(x,y)\underline{e}_x + bD(x,y)\underline{e}_y$$
où $D(x,y)$ est une fonction polynomiale en x et en y (elle assure justement que les conditions aux limites soit respectées). Déterminer le tenseur des déformations ϵ en fonction de a, de b, de D et de ses dérivées.
5. Déterminer l'énergie élastique en fonction de a, de b, de D et de ses dérivées.
6. Déterminer le travail de la force volumique en fonction de a, de b, de D et de ses dérivées.
7. Déterminer l'énergie potentielle en fonction de a, de b, de D et de ses dérivées.
8. En exploitant le fait que la meilleure solution minimise l'énergie potentielle du problème, montrer que les constantes a et b vérifient un système de deux équations à deux inconnues.
9. Prenons $D(x,y) = xy(1-x)(1-y)$. En utilisant le fait que $\int_\Omega D_{,x}^2 \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega D_{,y}^2 \,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{90}$, que $\int_\Omega D_{,y} D_{,x} \,\mathrm{d}\Omega = 0$, et que $\int_\Omega D \,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{36}$ exprimer a et b en fonction des coefficients de Lamé, de la masse volumique et de l'accélération de pesanteur. Si vous avez trouvé une autre fonction D à la question 3 qui satisfait les conditions limites, vous pouvez calculer vous-même la valeur des intégrales pour résoudre le problème.
10. Exprimer a et b en fonction du module d'Young, du coefficient de Poisson, de la masse volumique et de l'accélération de pesanteur.
11. Faire l'application numérique pour un acier et pour $g = 10\ ms^{-2}$.
12. Quelle valeur de ν annule le dénominateur de b ? (ce qui pourrait donc poser problème....) Cela est-il physiquement possible ?